An object model of finite element and its interaction with subsystems of software framework Nadra-3D for generating of systems of linear equations are considered.

Key words: *finite element method, object model, software framework.*

Одержано 24.02.2017

УДК 517.9:519.6

А. В. Гладкий*, д-р. фіз.-мат. наук, професор,
Ю. А. Гладка,** канд. фіз.-мат. наук, доцент

*Інститут кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України, м. Київ,
**Київський національний торговельно-економічний університет, м. Київ

ПРО МОДЕЛЮВАННЯ ТА ФОРМУВАННЯ АКУСТИЧНИХ ПОЛІВ НА ОСНОВІ ХВИЛЬОВОГО РІВНЯННЯ ТИПУ ШРЕДІНГЕРА

Досліджуються питання чисельного моделювання та формування акустичних полів на основі параболічного хвильового рівняння в неоднорідному хвилеводі з урахуванням тонких включень. Сформульовано критерій оптимальності, досліджено диференціальні властивості функціонала якості, запропоновано чисельний метод для моделювання та оптимізації акустичних полів.

Ключові слова: *акустичне поле, рівняння типу Шредінгера, екстремальна задача, різницева схема, стійкість.*

Вступ. На сьогодні підвищений інтерес до досліджень акустичних полів в океані значною мірою обумовлений розширенням освоєння водних акваторій Світового океану, потребами дистанційного зондування та акустичного моніторингу, оскільки звукові хвилі є практично єдиними хвилями, здатними поширюватися на значні відстані [1–3].

У роботі на основі параболічних апроксимацій хвильового рівняння Гельмгольца досліджуються питання чисельного моделювання процесів поширення акустичних хвиль у неоднорідному осесиметричному хвилеводі $G=\{\ r_0<r<\infty, 0<z<L, r_0>0\ \}$, де (r,z) — циліндричні координати, і вісь z направлена вертикально вниз.

Постановка задачі. Для визначеності будемо припускати, що хвилевод двошаровий з горизонтальною межею поділу середовищ $z=\xi$, на якій виконуються умови неідеального контакту, а кусково-неперервна швидкість звука $c(r,z)$ і кусково-стала густина $\rho(z)$ мають розрив першого роду. Верхній шар G_1 заповнений середовищем зі сталою густиною ρ_1, швидкістю звуку $c_1(r,\mathrm{z})$ та коефіцієнтом поглинання $\upsilon_1(r,z)\ge 0$. Нижній шар G_2 характеризується сталою густиною ρ_2, швидкістю звуку $c_2(r,\mathrm{z})$, коефіцієнтом поглинання $\upsilon_2(r,z)\ge 0$. Крім того, верхню та нижню межі хвилеводу без обмеження загальності будемо вважати абсолютно м'якими. Таким чином, акустичні параметри можна записати співвідношеннями

$$c(r,z)=\begin{cases} c_1(r,z), & 0<z<\xi, \\ c_2(r,z), & \xi<z<L; \end{cases} \quad \upsilon(r,z)=\begin{cases} \upsilon_1(r,z), & 0<z<\xi, \\ \upsilon_2(r,z), & \xi<z<L; \end{cases}$$

$$\rho(z)=\begin{cases} \rho_1, & 0<z<\xi, \\ \rho_2, & \xi<z<L. \end{cases}$$

Комплекснозначний акустичний тиск $P(r,z)$ у хвилеводі з тонким прошарком задовольняє в області $z\in(0,\xi)\cup(\xi,L)$, $0<r<\infty$ рівняння Гельмгольця [1, 3]

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial P}{\partial r}\right)+\rho(z)\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\rho(z)}\frac{\partial P}{\partial z}\right)+k_0^2 n^2(r,z)P=0,$$

умови неідеального контакту

$$\left\{\frac{1}{\rho(z)}\frac{\partial P}{\partial z}\right\}^{+}=\alpha\left[P\right]\Big|_{z=\xi},\quad \left\{\frac{1}{\rho(z)}\frac{\partial P}{\partial z}\right\}^{-}=\alpha\left[P\right]\Big|_{z=\xi},$$

граничні умови

$$P\big|_{z=0}=0,\ P\big|_{z=L}=0,$$

а також умови випромінювання на нескінченності.

Тут $P(r,z)$ — комплекснозначний розв'язок, $i=\sqrt{-1}$ — уявна одиниця, $k_0=\omega/c_0$ — хвильове число, c_0 — деяке значення швидкості звуку $c(r,z)$, ω — частота, $n^2(r,z)=(c_0/c(r,z))^2(1+i\upsilon(r,z))$ — комплекснозначний коефіцієнт заломлення, $\left\{f\right\}^{\pm}=f(r,\xi\pm 0)=f(r,\xi^{\pm})$, $\left[f(r,z)\right]\big|_{z=\xi}=f(r,\xi+0)-f(r,\xi-0)$, $\alpha>0$ — коефіцієнт, який визначається параметрами тонкого включення і враховує вплив тонкого прошарку шляхом заміни її лінією поділу γ, $\upsilon(r,z)\ge 0$ — коефіцієнт поглинання.

У рамках параболічного наближення акустичне поле можна подати при $k_0 r>>1$ у вигляді $P(r,z)=H_0^{(1)}(k_0 r)p(r,z)$, де $H_0^{(1)}(\cdot)$ — функція Ханкеля першого роду нульового порядку, а плавна амплітуда $p(r,z)$

описується початково-крайовою задачею для рівняння типу Шредінгера з комплекснозначним несамоспряженим оператором [3]

$$2ik_0 \frac{\partial p}{\partial r} + \rho(z)\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\rho(z)}\frac{\partial p}{\partial z}\right) + k_0^2(n^2(r,z)-1)p = 0\,, \tag{1}$$

$$\left\{\frac{1}{\rho(z)}\frac{\partial p}{\partial z}\right\}^{+} = \alpha\left[p\right]\Big|_{z=\xi}\,, \quad \left\{\frac{1}{\rho(z)}\frac{\partial p}{\partial z}\right\}^{-} = \alpha\left[p\right]\Big|_{z=\xi}\,, \tag{2}$$

$$p\Big|_{z=0} = 0\,,\ p\,\Big|_{z=L} = 0\,, \tag{3}$$

$$p\Big|_{r=r_0} = u(z)\,. \tag{4}$$

Математичну постановку оптимізаційної задачі сформулюємо як задачу мінімізації функціоналу

$$J_{\varepsilon}(u) = \int_0^L \frac{1}{\rho(z)}\beta(z)\left|p(R,z)-p_0(z)\right|^2 dz + \frac{1}{\varepsilon^2}\int_0^L \frac{1}{\rho(z)}\left|u(z)\right|^2 dz \tag{5}$$

за умови, що $p(r,z;u)$ — розв'язок крайової задачі (1)–(4). Тут $p(R,z) = p(R,z;u)$ — розв'язок задачі (1)–(4) при $r = R,\, r_0 < R < \infty$, що відповідає керуванню $u(z)$; $\beta(z) > 0$ — задана дійсна функція; $p_0(z)$ — задана комплекснозначна функція; $u(z)$ — комплекснозначне керування із деякої опуклої замкнутої множини

$$U = \left\{\, u(z) \in L_{2,1/\rho}(\Omega),\ \Omega = \left(0,\xi\right)\cup\left(\xi,L\right)\right\},$$

де $L_{2,1/\rho}(\Omega)$ — простір комплекснозначних функцій, інтегрованих з квадратом відносно ваги $1/\rho$ в області Ω. Скалярний добуток і норма в $L_{2,1/\rho}(\Omega)$ визначаються за формулами

$$\left(u,v\right) = \int_\Omega \frac{1}{\rho(z)}u(z)\bar{v}(z)dz\,,\ \left\|u\right\| = \left(u,u\right)^{1/2} = \left(\int_\Omega \frac{1}{\rho(z)}\left|u(z)\right|^2 dz\right)^{1/2},$$

де риска означає комплексне спряження.

Зазначимо, що для отримання обмеженого розв'язку у функціонал якості (5) додано стабілізуючий функціонал $\frac{1}{\varepsilon^2}\left\|u\right\|^2$ при деякому заданому $\varepsilon > 0$.

Таким чином, екстремальна задача полягає у визначенні комплекснозначного керування $u \in U$, для якого функціонал (5) досягає своєї нижньої грані.

Чисельні алгоритми для моделювання та формування акустичних полів. Для чисельного розв'язання диференціальної задачі

(1)–(4) введемо рівномірну сітку, враховуючи, що сіткова функція $y = y(r,z)$, яка апроксимує $p(r,z)$, має у вузлах $(r,\xi^{\pm})$ два значення $y^{\pm} = y(r_m,\xi \pm 0) = y(r_m,\xi^{\pm})$:

$$\overline{\omega}_{\tau h} = \overline{\omega}_{\tau} \times \overline{\omega}_{h} = \left\{(r,z),\, r \in \overline{\omega}_{\tau},\, z \in \overline{\omega}_{h}\right\} \quad ,\omega_h = \left\{z \in \overline{\omega}_h,\ z \neq 0, z \neq L\right\},$$

$$\overline{\omega}_{\tau} = \{r = r_m = r_0 + m\tau,\, m = 0,1,2,...,\},\ \omega_{\tau} = \{r = r_m \in \overline{\omega}_{\tau},\, m \geq 1\},$$

$$\overline{\omega}_h = \{z = 0, h, ..., (n_1 - 1)h, \xi^-, \xi^+, (n_1+1)h, ..., L, h = \xi / n_1 = L / N\},$$

$$\omega_h = \left\{z \in \overline{\omega}_h,\ z \neq 0, z \neq L\right\}.$$

У гільбертовому просторі H_h комплекснозначних функцій, заданих на сітці $\overline{\omega}_h$, що приймають нульове значення в граничних вузлах і задовольняють різницеві умови спряження, визначимо скалярний добуток і норму за формулами

$$(\phi,\varphi) = (\phi,\varphi)_1 + (\phi,\varphi)_2 + \frac{h}{2}\phi(\xi^-)\overline{\varphi}(\xi^-) + \frac{h}{2}\phi(\xi^+)\overline{\varphi}(\xi^+), \|\phi\| = (\phi,\phi)^{1/2},$$

$$(\phi,\varphi)_1 = \sum_{k=1}^{n_1-1} h\phi_k \overline{\varphi}_k,\ (\phi,\varphi)_2 = \sum_{k=n_1+1}^{N-1} h\phi_k \overline{\varphi}_k.$$

Використовуючи інтегро-інтерполяційний метод та загальноприйняті позначення теорії різницевих схем [4, 5], задачі (1)–(4) поставимо у відповідність двошарову неявну різницеву схему в операторній формі

$$4ik_0\, By_r + A(\widehat{y} + y) + C(\widehat{y} + y) = 0,\ r \in \overline{\omega}_{\tau}, \tag{6}$$

$$y^0 \text{ задано,} \tag{7}$$

де y^0, $y \in H_h$, $y^0 = \left\{u(z), z \in \omega_h\right\}$, $y = y(r) = \left\{y(r,z), z \in \omega_h\right\}$, ..,

де E — тотожній оператор, $a(z), d(r,z)$ — коефіцієнти, а лінійний комплекснозначний оператор A діє у просторі H_h і визначається співвідношеннями

$$Ay = \begin{cases} (ay_{\bar{z}})_z,\, z \in \omega_h, z \neq \xi^{\pm}, \\ \dfrac{2}{h}\left[\alpha(y^+ - y^-) - a(z)y_{\bar{z}}\right], z = \xi^-, \\ \dfrac{2}{h}\left[-\alpha(y^+ - y^-) + a(z)y_z\right], z = \xi^+. \end{cases}$$

Поступаючи аналогічно [6], можна встановити єдиність та рівномірну стійкість різницевої схеми (6), (7) за початковими даними у нормі енергетичного простору комплекснозначних функцій H_B. Зокрема справедлива наступна теорема.

Теорема 1. Різницева схема (6), (7) рівномірно стійка за початковими даними у нормі H_B, і для її розв'язку має місце апріорна оцінка

$$\left\| y^m \right\|_B \le \left\| y^0 \right\|_B, \; m = 0,1,2,\dots .$$

З метою використання градієнтних методів оптимізації потрібно дослідити диференціальні властивості критерія якості (5). Покажемо, що функціонал (5) диференційовний у довільній точці $u(z) \in U$ в комплексному просторі зі скалярним добутком

$$< u, v > \; = \; \mathrm{Re}(u, v) \; . \tag{8}$$

Для цього оцінимо головну лінійну частину приросту функціонала $\Delta J_\varepsilon(u) = J_\varepsilon(u+h) - J_\varepsilon(u)$ в залежності від приросту керування h. Враховуючи комплекснозначність керування $u \in U$ та використовуючи спряжену до (1)–(4) задачу, для випадку амплітудно-фазового керування можна встановити наступну теорему [7].

Теорема 2. Функціонал (5) диференційовний за Фреше у просторі $L_2^2(\Omega, 1/\rho)$ дійсних пар $\left\{ \mathrm{Re}\, u, \mathrm{Im}\, u \right\}$. Градієнт функціонала визначається виразом

$$J'_\varepsilon \, (u) = 2 \left\{ \psi_1(r_0, z; u) + \frac{1}{\varepsilon^2} u_1, \psi_2(r_0, z; u) + \frac{1}{\varepsilon^2} u_2 \right\},$$

де $\psi = \psi_1 + i\psi_2$ — розв'язок спряженої задачі, $u = u_1(z) + iu_2(z)$.

Розв'язок задачі оптимального керування (1)–(5) можна отримати, використовуючи градієнтні методи [4], а також запропоновану для чисельного розв'язання прямої задачі (1)–(4) різницеву схему (6), (7). Зазначимо, що ця схема може бути використана і для чисельного розв'язання спряженої задачі.

Висновки. У статті запропоновано підхід для чисельного моделювання та формування акустичних полів у неоднорідних хвилеводах з умовами неідеального контакту на основі параболічного хвильового рівняння типу Шредінгера. Отримані результати можуть бути використані при розробці засобів математичного моделювання та формування акустичних полів для широкого кола задач амплітудно-фазового керування.

Список використаних джерел:

1. Тапперт Ф. Д. Метод параболического уравнения. *Распространение волн в подводной акустике*. М.: Мир, 1980. С. 180–226.
2. Завадский В. Ю. Моделирование волновых процессов. М.: Наука, 1991. 368 с.
3. Гладкий А. В., Сергиенко И. В., Скопецкий В. В. Численно-аналитические методы исследования волновых процессов. К.: Наук. думка, 2001. 452 с.
4. Самарский А. А., Вабищевич П. Н. Вычислительная теплопередача. М.: Едиториал УРСС, 2003. 784 с.

5. Самарский А. А., Вабищевич П. Н. Численные методы решения обратных задач математической физики. М.: Едиториал УРСС, 2004. 480 с.
6. Гладкий А. В. Исследование и оптимизация волновых процессов в неоднородных средах с импедансной границей. *Кибернетика и системный анализ*. 2013. № 2. С. 94–105.
7. Гладкий А. В., Гладкая Ю. А. Об одной задаче управления в средах с условиями неидеального сопряжения. *Компьютерная математика*. 2016. № 1. С. 3–9.

The problems of numerical modeling and formation of acoustic fields on the basis of parabolic wave equation in an inhomogeneous waveguide with subtle inclusions is considered. Criterion of optimality is formulated. Differential properties of the proposed quality functional are investigated. A numerical method for modelling and optimization of acoustic fields is proposed.

Key words: *acoustic field, Schrödinger-type equation, extremal problem, difference scheme, stability.*

Одержано 20.02.2017

УДК 004.728:004.728.3,004.056.055

І. Д. Горбенко, д-р. техн. наук, професор,
О. А. Замула, д-р. техн. наук

Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна, м. Харків

МОДЕЛІ ТА МЕТОДИ СИНТЕЗУ КРИПТОГРАФІЧНИХ СИГНАЛІВ ТА ЇХ ОПТИМІЗАЦІЯ ЗА КРИТЕРІЄМ ЧАСОВОЇ СКЛАДНОСТІ

Сформульована в загальному вигляді і вирішена задача синтезу та аналізу криптографічних дискретних сигналів методом «гілок і меж», зроблені пропозиції з оптимізації.

Ключові слова: *складений сигнал, структурна та інформаційна скритності, імітостійкість.*

Вступ. Множинний доступ з кодовим поділом абонентів в багатокористувацьких телекомунікаційних системах (ТКС) здійснюється за допомогою використання при розширенні спектру специфічних дискретних послідовностей. При цьому властивості ТКС залежать від кореляційних, структурних, ансамблевих та енергетичних властивостей дискретних сигналів [1–3].

Метою цієї статі є викладення основних теоретичних та практичних положень та проблемних питань побудови дискретних послідовностей, що названі криптографічними дискретними сигналами (КДС), які повинні мати задані кореляційні, структурні та ансамблеві властивості, будуватися за допомогою ключових даних.