УДК 519.8

Ю. П. Лаптин, д-р физ.-мат. наук

Институт кибернетики имени В. М. Глушкова НАН Украины, г. Киев

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ КОНИЧЕСКОЙ РЕГУЛЯРИЗАЦИИ В ЗАДАЧАХ КВАДРАТИЧНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

Описывается новый подход к решению плохо обусловленных задач вычисления оценки оптимального значения невыпуклых задач квадратичной оптимизации.

Ключевые слова: *квадратичная оптимизация, Лагранжевая релаксация, оценочные задачи.*

Введение. К невыпуклым задачам квадратичной оптимизации (максимизации квадратичной формы при квадратичных ограничениях) могут быть сведены самые разные многоэкстремальные задачи. Для вычисления оценок оптимальных значений таких задач применяются Лагранжевые релаксации (см., например, [1, 2]) и SDP-релаксации (релаксации к задачам полуопределенного программирования) [3], которые в определенном смысле эквивалентны. При использовании Лагранжевых релаксаций формируются оценочные параметрические матричные задачи в пространстве двойственных переменных. Функции оценочных задач непрерывно дифференцируемы и принимают конечные значения в областях отрицательной определенности матриц функций Лагранжа исходных квадратичных задач. На границе области отрицательной определенности эти функции могут быть разрывны (в области положительной определенности принимают значения $+\infty$), а вблизи границы матрицы плохо обусловлены (причем количество близких к нулю собственных чисел может приближаться к размерности пространства), что приводит к необходимости учета этих особенностей при разработке вычислительных алгоритмов решения оценочных задач.

В работе приводятся новые подходы преодоления указанных проблем, основанные на использовании конических регуляризаций выпуклых задач оптимизации [4].

1. Квадратичные оптимизационные задачи и оценки их оптимальных значений. Постановка задачи

$$K^* = \sup K_0(x),\ x \in R^n \tag{1}$$

при ограничениях

$$K_i(x) \le 0,\ i = 1,\dots,m_1;\ K_j(x) = 0,\ j = m_1+1,\dots,N,\ m_1 < N, \tag{2}$$

где $K_i(x) = \langle A_i x, x\rangle + \langle l_i, x\rangle + c_i$, A_i — симметричные матрицы, l_i — векторы соответствующих размерностей, $c_i \in R$, $i \in \{0,1,\dots,N\}$.

Задача (1)–(2) — многоэкстремальная в общем случае, для вычисления оценки оптимального значения в [1] предложено использовать Лагранжеву релаксацию этой задачи. Обозначим

$$U^- = \{u = (u_1, ..., u_N) : u_i \le 0,\ i = 1, ..., m_1\} .$$

$$\psi(u) = \sup_{x \in R^n} L(x, u) , \tag{3}$$

где $L(x,u) = K_0(x) + \sum_{i=1}^{N} u_i K_i(x) = \langle A(u)x, x\rangle + \langle l(u), x\rangle + c(u)$,

$$A(u) = A_0 + \sum_{i=1}^{N} u_i A_i \ ,\ l(u) = l_0 + \sum_{i=1}^{N} u_i l_i \ ,\ c(u) = c_0 + \sum_{i=1}^{N} u_i c_i \ . \tag{4}$$

Пусть T — множество допустимых решений задачи (1)–(2), $u \in U^-$, тогда

$$\psi(u) = \sup_{x \in R^n} L(x,u) \ge \sup_{x \in T} L(x,u) \ge \sup_{x \in T} K_0(x) = K^* .$$

Положим D $(\bar{D})$ — подмножества R^N, состоящие из таких $u \in U^-$, что $A(u)$ — отрицательно определенная (соответственно — неположительно определенная) матрица. Если $u \notin \bar{D}$, то $\psi(u) = +\infty$.

Справедливо соотношение [2]

$$\psi^* = \inf_{u \in U^-} \psi(u) = \inf_{u \in \bar{D}} \psi(u) . \tag{5}$$

Пусть $u \in D$, $x(u)$ — решение задачи (3). Вектор $x(u)$ — решение системы уравнений [1]

$$2A(u)x + l(u) = 0 . \tag{6}$$

Во внутренних точках множества $\bar{D}$ функция $\psi(u)$ непрерывно дифференцируема и принимает конечные значения, на границе множества $\bar{D}$ функция $\psi(u)$ может принимать как конечные значения, так и значения $+\infty$. Особенности поведения функции $\psi(u)$ вблизи границы множества $\bar{D}$ приводит к существенным проблемам при практическом решении задачи (5).

2. Коническая регуляризация задач оптимизации. В данном пункте рассматривается подход, в котором для задачи выпуклого программирования с ограничениями формируется эквивалентная задача безусловной оптимизации, целевая функция которой принимает конечные значения при любых значениях переменных. Целевая функция исходной задачи может быть не определена на границе и вне допустимой области. Предлагаемый подход обобщает результаты, изложенные в [5], и позволяет преодолевать проблемы, возникающие при решении задачи (5).

Рассмотрим задачу выпуклого программирования: найти

$$\psi^* = \inf\left\{\psi(u) : h(u) \le 0,\ u \in R^n\right\}, \tag{7}$$

где $\psi, h : R^n \to R \cup \{+\infty\}$ — выпуклые замкнутые функции.

Обозначим $C = \left\{u \in R^n :\ h(u) \le 0\right\}$.

Предположение 1. $\operatorname{int} C \subseteq \operatorname{dom}\ \psi$, если u принадлежит границе множества C, то $h(u) = 0$.

Предположение 2. Задана точка $u^0 \in C$ такая, что $h(u^0) < 0$.

На границе множества C функция ψ может быть не определена (значение функции ψ может быть равно $+\infty$).

Из замкнутости функции ψ следует, что если $\bar{u}$ принадлежит границе множества C и для любой последовательности $u^k \in \operatorname{int} C,\ k = 1,\dots$, такой, что $u^k \to \bar{u}$ при $k \to +\infty$, выполняется $\lim\limits_{k\to\infty} \psi(u^k) < +\infty$, тогда $\bar{u} \in \operatorname{dom}\ \psi$.

Полученные в [5] результаты непосредственно обобщаются на рассматриваемый случай. Пусть задано некоторое число $E < \psi(u^0)$. Обозначим F надграфик функции ψ на множестве C $F = \left\{(\lambda, u) \in R \times C : \lambda \ge \psi(u)\right\}$.

Положим $z = (\lambda, u),\ z \in R \times R^n$. Рассмотрим коническую оболочку $\mathrm{K}(E)$ надграфика F с вершиной в точке $z_E^0 = (E, u^0)$

$$\mathrm{K}(E) = \left\{v : v \in R \times R^n,\ v = z_E^0 + \alpha(z - z_E^0), \alpha \ge 0, z \in F\right\}. \tag{8}$$

Обозначим $\bar{\mathrm{K}}(E)$ замыкание множества $\mathrm{K}(E)$. Множество $\bar{\mathrm{K}}(E)$ может рассматриваться как надграфик некоторой выпуклой функции. Эту функцию обозначим $\gamma_E(u)$ и будем называть конической аппроксимацией функции ψ на множестве C. Функция $\gamma_E(u)$ определена на всем пространстве R^n и принимает конечные значения при любых u. Пример конической аппроксимации функции показан на рисунке.

Утверждение 1. Пусть множество C ограничено. Тогда для произвольной точки $u \in R^n$, $u \ne u^0$, на луче, выходящем из точки u^0 и проходящем через u, найдется точка $\bar{u}$, $\bar{u} \in C$ (возможно не одна), такая, что $\psi(\bar{u}) = \gamma_E(\bar{u})$.

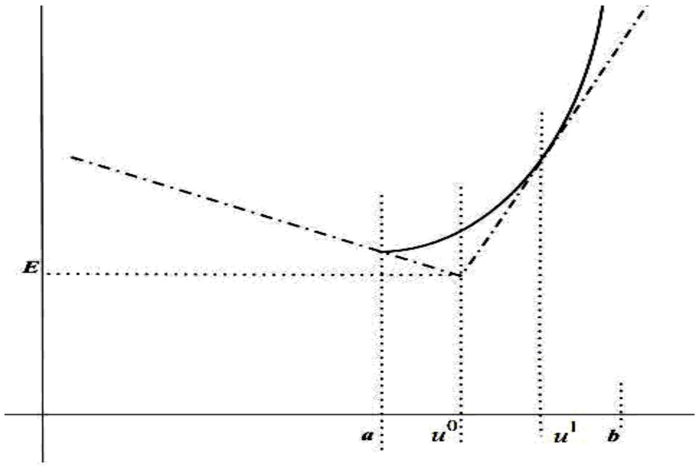

Рисунок. *Сплошной линией показана функция $\psi(u)$, штрихпунктирной — $\gamma_E(u)$, в точках a, u^1 значения этих функций совпадают, множество C — отрезок $[a, b]$*

Обозначим $\mu_E(u)$ такую точку, ближайшую к u^0. Положим

$$\eta_E(u) = \begin{cases} \left\|\mu_E(u) - u^0\right\|, & \text{если точка } \mu_E(u) \text{ существует,} \\ +\infty, & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

$$\varphi_E(u) = \begin{cases} \psi(u), & \text{если } \left\|u - u^0\right\| \le \eta_E(u), \\ \gamma_E(u), & \text{если } \left\|u - u^0\right\| > \eta_E(u). \end{cases} \tag{9}$$

Лемма 1. Пусть для точки $u \in R^n$, $u \neq u^0$, существует точка $\mu_E(u)$, тогда

$$\gamma_E(u) = E + (\psi(\mu_E(u)) - E)\frac{\left\|u - u^0\right\|}{\left\|\mu_E(u) - u^0\right\|}. \tag{10}$$

Рассмотрим задачу: найти

$$\varphi_E^* = \inf\left\{\varphi_E(u) : u \in R^n\right\}. \tag{11}$$

Теорема 1. Пусть выполняются предположения 1, 2 и $E < \psi(x^0)$. Тогда $\varphi_E : R^n \to R$ — выпуклая функция. Если $E \le \psi^*$ то $\varphi_E^* = \psi^*$.

Задачу (11) будем называть конической регуляризацией исходной задачи (7).

Обозначим $\psi'(u,p)$ производную функции ψ в точке $u \in C$ по направлению p. Пусть зафиксирована некоторая точка u^1, положим $p = \left(u^1 - u^0\right) \Big/ \left\| u^1 - u^0 \right\|$, $t^* = \left\| \mu_E(u^1) - u^0 \right\|$, если точка $\mu_E(u^1)$ не существует, полагаем $t^* = +\infty$.

Лемма 2.

$$t^* = \sup\left\{ t : \frac{\psi(u^0 + tp) - E}{t} > -\psi'(u^0 + tp, -p), t \ge 0, u^0 + tp \in \operatorname{int} C \right\}. \quad (12)$$

Теорема 2. Пусть точка u^1 такая, что $\bar{u} = \mu_E(u^1)$ — внутренняя точка множества C. Тогда в точке $\bar{u}$ существует субградиент $\bar{g}$ функции ψ, для которого выполняется

$$\psi(\bar{u}) - E = \left\langle \bar{g}, \bar{u} - u^0 \right\rangle, \quad (13)$$

и вектор $\bar{g}$ есть субградиент функции γ_E в точке u^1 (в точке $\bar{u}$).

Теорема 3. Пусть выполняются предположения 1, 2, точка u^1, такая, что $\bar{u} = \mu_E(u^1)$ принадлежит границе множества C, тогда

1) $\bar{u} \in \operatorname{dom} \psi$,

2) $\left\langle g_h(\bar{u}), u^0 - \bar{u} \right\rangle \ne 0$ и вектор

$$g = g_\psi(\bar{u}) + \frac{E - \psi(\bar{u}) - \left\langle g_\psi(\bar{u}), u^0 - \bar{u} \right\rangle}{\left\langle g_h(\bar{u}), u^0 - \bar{u} \right\rangle} g_h(\bar{u}) \quad (14)$$

есть субградиент функции $\gamma_E(u)$ в точке u^1 (в точке $\bar{u}$), где $g_\psi(\bar{u})$, $g_h(\bar{u})$ — субградиенты функций ψ и h в точке $\bar{u}$.

При использовании предлагаемого подхода значение ψ^* обычно неизвестно. Учитывая это, величина E уточняется по ходу решения задачи (11).

Необходимо отметить, что для вычисления значения функции φ_E в произвольной точке u должна решаться задача одномерного поиска (12), что в случае общей задачи выпуклого программирования существенно увеличивает трудоемкость по сравнению с вычислением значения функции ψ в допустимой точке.

Однако для задачи, которая формируется при использовании Лагранжевой релаксации для вычисления оценки оптимального значения квадратичной задачи (1)–(2), в работе [4] был предложен подход, позволяющий решать задачу одномерного поиска (12) за время, соизмеримое с вычислением значения функции ψ в допустимой точке.

Выводы. В работе для вычисления оценки оптимального значения задачи квадратичной оптимизации предложено использовать коническую регуляризацию оценочной задачи. Такой подход позволяет построить эквивалентную задачу безусловной оптимизации, целевая функция которой определена на всем пространстве переменных задачи и удовлетворяет условию Липшица. Показано, что особенностью рассмотренного класса задач является возможность построения эффективных алгоритмов поиска по направлению. Такие алгоритмы являются существенными для использования конической регуляризации. Трудоемкость вычисления функций и субградиентов регуляризованной задачи оказывается соизмеримой с трудоемкостью вычисления функций исходной оценочной задачи. Полученные результаты будут полезны при разработке эффективных методов решения оценочных задач квадратичной оптимизации. Автор выражает глубокую благодарность Березовскому О.А. за ценные замечания и советы по данной работе.

Список использованной литературы:

1. Шор Н. З., Стеценко С. И. Квадратичные экстремальные задачи и недифференцируемая оптимизация. Киев: Наук. думка, 1989. 204 с.
2. Березовский О. А., Стецюк П. И. Об одном способе нахождения двойственных квадратичных оценок Шора. *Кибернетика и системный анализ.* 2008. № 2. С. 89–99.
3. Boyd S., Vandenberghe L. Semidefinite programming relaxations of non-convex problems in control and combinatorial optimization. *Communications, Computation, Control, and Signal Processing.* Springer US, 1997. С. 279–287.
4. Лаптин Ю. П. Коническая регуляризация в задачах квадратичной оптимизации. *Компьютерная математика.* 2016. № 2. С. 129–141.
5. Лаптин Ю. П., Бардадым Т. А. Некоторые подходы к регуляризации нелинейных задач оптимизации. *Проблемы управления и информатики.* 2011. № 3. С. 57–68.

It describes a new approach to solving the ill conditioned computational task for estimating the optimal value of non-convex quadratic optimization problems.

Key words: *quadratic optimization, Lagrange relaxation, estimating problems.*

Получено 15.02.2017