УДК 517.946

В. В. Маринець*, д-р фіз.-мат. наук, професор,
О. Ю. Питьовка,** канд. фіз.-мат. наук, доцент
*ДВНЗ Ужгородський національний університет, м. Ужгород,
**Мукачівський державний університет, м. Мукачево

ПРО ОДИН ПІДХІД ДОСЛІДЖЕННЯ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ДЛЯ НЕЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ ГІПЕРБОЛІЧНОГО ТИПУ В ОБЛАСТІ ЗІ СКЛАДНОЮ СТРУКТУРОЮ КРАЮ

За допомогою побудованої модифікації двостороннього методу досліджується крайова задача Дарбу – Гурса – Дарбу (ДГД) для нелінійного хвильового рівняння в області зі складною структурою краю.

Ключові слова: *двосторонній метод, задача ДГД, область зі складною структурою краю, функції порівняння.*

Вступ. Мета даної роботи — побудова модифікації двостороннього методу дослідження крайової задачі ДГД для нелінійного хвильового рівняння в області зі складною структурою краю, що є продовженням досліджень, приведених в роботах [1, 2].

Нехай в просторі R^2 задана область [3] $D=\{(x,y)\,|\,x\in(x_0,x_1],$ $y\in(g_1(x),g_2(x))\}$ де $x_0<x_1$, $y=g_i(x)\Leftrightarrow x=k_i(y)$, $i=1,2,$ — «вільні» криві, причому $g_i'(x)>0,$ $g_1(x_{i-1})=y_{i-1},$ $g_2(x_{i-1})=y_{i+1},$ $y_0<y_1<y_2<y_3.$

Дослідимо крайову задачу: в просторі функцій $C^{(1.1)}(D)$ знайти розв'язок крайової задачі

$$L_2u(x,y)=f(x,y,u(x,y)):=f[u(x,y)], \tag{1}$$

де L_2 — диференціальний оператор, породжений диференціальним виразом $l_{(1.1)}u(x,y):=u_{xy}(x,y)+a_1(x,y)u_x(x,y)+a_2(x,y)u_y(x,y)$

та крайовими умовами

$$u(x,g_i(x))=\varphi_i(x),\ \ \varphi_i(x)\in C^1([x_0,x_1]), \tag{2}$$

$$u(x_0,y)=\psi(y),\ \ \psi(y)\in C^1([y_0,y_2]), \tag{3}$$

$$\psi(y_0)=\varphi_1(x_0),\ \ \psi(y_2)=\varphi_2(x_0). \tag{4}$$

Розбиваємо область D характеристиками $y=y_i$, $i=1,2$ на три підобласті D_s, $s=1,2,3$:

$$D_1=\{(x,y)\,|\,x\in(x_0,x_1],\ y\in(g_1(x),y_1]\},$$

$$D_2=\{(x,y)\,|\,x\in[x_0,x_1],\ y\in(y_1,y_2]\},$$

$$D_3 = \{(x,y) \mid x \in [x_0, x_1],\ y \in (y_2, g_2(x))\}.$$

Тоді розв'язок крайової задачі (1) $u(x,y) = u_s(x,y)$, $(x,y) \in \overline{D}_s$, $s = 1,2,3$, де $u_1(x,y)$ — розв'язок задачі Дарбу $l_{(1.1)}u_1(x,y) = f[u_1(x,y)]$, $u_1(x, g_1(x)) = \varphi_1(x)$, $u_1(x_0, y) = \psi(y)$, $y \in [y_0, y_1]$, $u_2(x,y)$ — розв'язок задачі Гурса $l_{(1.1)}u_2(x,y) = f[u_2(x,y)]$, $u_2(x_0, y) = \psi(y)$, $y \in [y_1, y_2]$, $u_2(x, y_1) = u_1(x, y_1)$, а $u_3(x,y)$ — розв'язок задачі Дарбу $l_{(1.1)}u_3(x,y) = f[u_3(x,y)]$, $u_3(x, g_2(x)) = \varphi_2(x)$, $u_3(x, y_2) = u_2(x, y_2)$, $x \in [x_0, x_1]$.

Надалі вважатимемо, що

$$f[u(x,y)] \in C(\overline{B}),\ f : \overline{B} \to R,\ \overline{B} \subset R^3,\ a_1(x,y) \in C^{(1.0)}(D),$$
$$a_2(x,y) \in C^{(0.1)}(D) \text{ і } a_{1_x}(x,y) = a_{2_y}(x,y). \tag{5}$$

Введемо позначення:

$$F[u(x,y)] := f[u(x,y)] + [a_{2_y}(x,y) + a_1(x,y)a_2(x,y)]u(x,y),$$

$$\Phi_s(x,y) := \left[\psi(y) - \psi(g_1(x)) \exp\left(\int_y^{g_1(x)} a_1(x_0, \eta) d\eta\right)\right] \times$$
$$\times \exp\left(\int_x^{x_0} a_2(\xi, y) d\xi\right) + \varphi_1(x) \exp\left(\int_y^{g_1(x)} a_1(x, \eta) d\eta\right),\ (x,y) \in \overline{D}_s,\ s = 1,2,$$

$$\Phi_3(x,y) := \varphi_2(K_2(y)) \exp\left(\int_x^{K_2(y)} a_2(\xi, y) d\xi\right) + \left[\psi(g_1(K_2(y))) \times \right.$$
$$\left. \times \exp\left(\int_{g_1(x)}^{g_1(K_2(y))} a_1(x_0, \eta) d\eta\right) - \psi(g_1(x))\right] \exp\left(\int_y^{g_1(x)} a_1(x, \eta) d\eta + \right.$$
$$\left. + \int_x^{x_0} a_2(\xi, g_1(x)) d\xi\right) + \varphi_1(x) \exp\left(\int_y^{g_1(x)} a_1(x, \eta) d\eta\right) - \varphi_1(K_2(y)) \times$$
$$\times \exp\left(\int_y^{g_1(K_2(y))} a_1(x, \eta) d\eta + \int_x^{K_2(y)} a_2(\xi, g_1(K_2(y))) d\xi\right),\ (x,y) \in \overline{D}_3,$$

$$T_1 F[u_1(x,y)] := \int_{x_0}^{x} \int_{g_1(x)}^{y} F[u_1(\xi, \eta)] K(x, y; \xi, \eta) d\eta\, d\xi, \quad (x,y) \in \overline{D}_1,$$

$$K(x,y;\xi,\eta):=\exp\left(\int_y^{\eta} a_1(\xi,\tau)d\tau+\int_x^{\xi} a_2(\tau,y)d\tau\right),\ (x,y)\in D\ ,$$

$$T_2F[u_2(x,y)]:=\int_{x_0}^{x}\int_{y_1}^{y} F[u_2(\xi,\eta)]K(x,y;\xi,\eta)d\eta\, d\xi\ ,$$

$$T_{1,2}F[u_1(x,y)]:=\int_{x_0}^{x}\int_{g_1(x)}^{y_1} F[u_1(\xi,\eta)]K(x,y;\xi,\eta)d\eta\, d\xi,\ (x,y)\in \overline{D}_2\,,$$

$$T_3F[u_3(\xi,\eta)]:=\int_{y_2}^{y}\int_{K_2(y)}^{x} F[u_3(\xi,\eta)]K(x,y;\xi,\eta)d\eta\, d\xi\ ,$$

$$T_{1,3}F[u_2(\xi,\eta)]:=\int_{K_2(y)}^{x}\frac{\partial}{\partial\xi}\left[\int_{x_0}^{\xi}\int_{g_1(\xi)}^{y_1} F[u_1(\tau,\eta)]K(x,y;\tau,\eta)d\eta\, d\tau\right]d\xi+$$

$$\int_{K_2(y)}^{x}\int_{y_1}^{y_2} F[u_2(\xi,\eta)]K(x,y;\xi,\eta)d\eta\, d\xi,\ (x,y)\in \overline{D}_3\,.$$

Лема 1. Якщо виконуються умови (5), тоді крайова задача (1) еквівалентна системі інтегральних рівнянь

$$u_s(x,y)=\Phi_s(x,y)+\varepsilon_s T_{1,s}F[u_{s-1}(\xi,\eta)]+T_sF[u_s(\xi,\eta)],$$

$$(x,y)\in\overline{D}_s,\ \ s=1,2,3,\ \text{ де }\ \varepsilon_s=\begin{cases}0,\ s=1,\\ 1,\ s=2,3.\end{cases} \tag{6}$$

Згідно постановки задачі $u_{1_x}(x,y_1)=u_{2_x}(x,y_1),\ \ u_{3_x}(x,y_2)=u_{2_x}(x,y_2)$ при $x\in[x_0,x_1]$, а $u_{1_y}(x,y_1)=u_{2_y}(x,y_1)$,

$$u_{2_y}(x,y_2)-u_3(x,y_2)=\rho\exp\left(\int_x^{x_0} a_2(\xi,y_2)d\xi\right), \tag{7}$$

де

$$\rho:=\psi'(y_2)-K_2'(y_2)\Big[\varphi_2'(x_0)+a_2(x_0,y_2)\varphi_2(x_0)-\int_{y_0}^{y_2}F(x_0,\eta,\psi(\eta))\times$$

$$\times\exp\left(\int_{y_2}^{\eta} a_1(x_0,\tau)d\tau\right)d\eta+(g_1'(x_0)\psi'(y_0)-\varphi_1'(x_0)-$$

$$-a_2(x_0,y_0)\varphi_1(x_0))\exp\left(\int_{y_2}^{y_0} a_1(x_0,\eta)d\eta\right)\Bigg].$$

Лема 2. Нехай $f[u(x,y)] \in C(\overline{B})$, виконуються умови (5) і крайова задача (1) має розв'язок. Тоді умова $\rho = 0$ є необхідною і достатньою, щоб розв'язок задачі (1) був регулярним. У супротивному випадку виконується рівність (7) і розв'язок буде іррегулярним.

Означення. Будемо вважати, що $F[u(x,y)] \in C_1(\overline{B})$, якщо [1]:

1. $F[u(x,y)] \in C(\overline{B})$.
2. В просторі функцій $C_1(\overline{B})$, $\overline{B}_1 \subset R^4$, $\Pi p_{xOy} \overline{B}_1 = \overline{D}$ існує така функція $H\left(x,y,u(x,y);v(x,y)\right) := H[u(x,y);v(x,y)]$, що
   а) $H[u(x,y);u(x,y)] \equiv F[u(x,y)]$;
   б) для довільної з простору $C(\overline{D})$ пари функцій $u(x,y), v(x,y) \in \overline{B}_1$, які задовольняють умови $u(x,y) \geq v(x,y)$, $(x,y) \in \overline{D}$, в області $\overline{B}_1$ виконуються нерівності
   $$H[u(x,y);v(x,y)] \geq H[v(x,y);u(x,y)],\ (x,y) \in \overline{D}; \tag{8}$$
3. Функція $H[u(x,y);v(x,y)]$ в області $\overline{B}_1$ задовольняє умову Ліпшіца, тобто для всяких з простору $C(\overline{D})$ функцій $u_i(x,y)$, $v_i(x,y) \in \overline{B}_1$, $i = 1,2$, виконується умова $\left|H[u_1(x,y);u_2(x,y)] - -H[v_1(x,y);v_2(x,y)]\right| \leq L\left(\left|w_1(x,y)\right| + \left|w_2(x,y)\right|\right)$, $(x,y) \in \overline{D}$, де L — стала Ліпшіца, а $w_i(x,y) := u_i(x,y) - v_i(x,y)$.

Відзначимо, що якщо функція $f[u(x,y)] \in C(\overline{B})$ і має в області $\overline{B}$ обмежену частинну похідну першого порядку за $u(x,y)$, то $F[u(x,y)] \in C_1(\overline{B})$. Зворотне твердження не справедливе.

Побудуємо швидкозбіжну модифікацію двостороннього методу наближеного розв'язання системи інтегральних рівнянь (6).

Нехай $z_{s,p}(x,y), v_{s,p}(x,y) \in C(\overline{D}_s)$, $s = 1,2,3$, $p \in N_0$, $N_0 = \{0,1,2,...\}$, належать області $\overline{B}_1$. Позначимо:

$$w_{s,p}(x,y) := z_{s,p}(x,y) - v_{s,p}(x,y),\ (x,y) \in \overline{D}_s,\ s = 1,2,3,\ p \in N_0,$$

$$f_s^p(x,y) := H[z_{s,p}(x,y); v_{s,p}(x,y)],$$

$$f_{s,p}(x,y) := H[v_{s,p}(x,y); z_{s,p}(x,y)],$$

$$T_{1,3}^{(1)} f_1^p(\xi,\eta) := \int_{x_0}^{x} \int_{g_1(x)}^{y_1} K(x,y;\xi,\eta) f_1^p(\xi,\eta) d\eta\, d\xi,$$

$$T_{1,3}^{(2)} f_{1,p}(\xi,\eta) := \int_{x_0}^{K_2(y)} \int_{g_1(K_2(y))}^{y_1} K(x,y;\xi,\eta) f_{1,p}(\xi,\eta) d\eta\, d\xi,$$

$$T_{1,3}^{(3)} f_2^p(\xi,\eta) := \int_{K_2(y)}^{x} \int_{y_1}^{y_2} K(x,y;\xi,\eta) f_2^p(\xi,\eta) d\eta\, d\xi,\ (x,y) \in \overline{D}_3$$

$$T_{1,3} f_2^p(\xi,\eta) := T_{1,3}^{(1)} f_1^p(\xi,\eta) - T_{1,3}^{(2)} f_{1,p}(\xi,\eta) + T_{1,3}^{(3)} f_2^p(\xi,\eta),$$

$$T_{1,3} f_{2,p}(\xi,\eta) := T_{1,3}^{(1)} f_{1,p}(\xi,\eta) - T_{1,3}^{(2)} f_1^p(\xi,\eta) + T_{1,3}^{(3)} f_{2,p}(\xi,\eta),$$

$$\alpha_{s,p}^*(x,y) := z_{s,p}(x,y) - \Phi_s(x,y) - \varepsilon_s T_{1,s} f_{s-1}^p(\xi,\eta) - T_s f_s^p(\xi,\eta)$$

$$\beta_{s,p}^*(x,y) := v_{s,p}(x,y) - \Phi_s(x,y) - \varepsilon_s T_{1,s} f_{s-1,p}(\xi,\eta) - T_s f_{s,p}(\xi,\eta),$$

$$\overline{z}_{s,p}(x,y) := z_{s,p}(x,y) - d_{s,p}(x,y) w_{s,p}(x,y),$$

$$\overline{v}_{s,p}(x,y) := v_{s,p}(x,y) + q_{s,p}(x,y) w_{s,p}(x,y),\ (x,y) \in \overline{D}_s,\ s = 1,2,3,$$

$$\overline{F}_s^p(x,y) := H[\overline{z}_{s,p}(x,y); \overline{v}_{s,p}(x,y)],$$
$$\overline{F}_{s,p}(x,y) := H[\overline{v}_{s,p}(x,y); \overline{z}_{s,p}(x,y)],$$
$$d_{s,p}(x,y),\ q_{s,p}(x,y) \in C(\overline{D}_s) \tag{9}$$

— довільні функції, які задовольняють умови

$$0 \le d_{s,p}(x,y) \le 0{,}5,\ \ 0 \le q_{s,p}(x,y) \le 0{,}5,\ p \in N_0, s = 1,2,3. \tag{10}$$

Побудуємо послідовності функцій $\{z_{s,p}(x,y)\}$ та $\{v_{s,p}(x,y)\}$ [4]

$$\begin{aligned} z_{s,p+1}(x,y) &= \Phi_s(x,y) + \varepsilon_s T_{1,s} f_{s-1}^{p+1}(\xi,\eta) + T_s F_s^p(\xi,\eta), \\ v_{s,p+1}(x,y) &= \Phi_s(x,y) + \varepsilon_s T_{1,s} f_{s-1,p+1}(\xi,\eta) + T_s F_{s,p}(\xi,\eta), \end{aligned} \tag{11}$$

$(x,y) \in \overline{D}_s, s = 1,2,3, p \in N_0$, де за нульове наближення $z_{s,0}(x,y), v_{s,0}(x,y) \in \overline{B}_1$ вибираємо довільні з простору $C(\overline{D}_s)$ функції, які задовольняють відповідно умови (2)–(4) та нерівності

$$w_{s,0}(x,y) \ge 0,\ \alpha_{s,0}^*(x,y) \ge 0,\ \beta_{s,0}^*(x,y) \le 0, (x,y) \in \overline{D}_s,\ s = 1,2,3. \tag{12}$$

Надалі, описані вище функції $z_{s,0}(x,y), v_{s,0}(x,y)$ будемо називати функціями порівняння задачі (1). Легко показати, що якщо на кожному кроці ітераційного процесу (11) функції $d_{s,p}(x,y)$, $q_{s,p}(x,y)$ вибирати таким чином, щоб виконувалися умови

$$\begin{aligned} z_{s,p}(x,y) - z_{s,p+1}(x,y) - d_{s,p}(x,y) w_{s,p}(x,y) \ge 0, (x,y) \in \overline{D}_s, \\ v_{s,p}(x,y) - v_{s,p+1}(x,y) + q_{s,p}(x,y) w_{s,p}(x,y) \le 0,\ s = 1,2,3,\ p \in N_0, \end{aligned} \tag{13}$$

то в області $\overline{B}_1$ матимуть місце нерівності

$$v_{s,p}(x,y) \le v_{s,p+1}(x,y) \le z_{s,p+1}(x,y) \le z_{s,p}(x,y),$$
$$\alpha_{s,p}(x,y) \ge 0,\ \beta_{s,p}(x,y) \le 0, (x,y) \in \overline{D}_s,\ s = 1,2,3,\ \ p \in N_0, \tag{14}$$

Лема 3. Якщо $F[u(x,y)] \in C_1(\overline{B})$ і в області $\overline{B}_1$ існують функції порівняння $z_{s,0}(x,y), v_{s,0}(x,y)$, $(x,y) \in \overline{D}_s$, $s = 1,2,3$ задачі (1), тоді множина функцій $d_{s,p}(x,y), q_{s,p}(x,y) \in C(\overline{D}_s)$, які задовольняють умови (13), не порожня.

Позначимо

$$d = \max_s \sup_{\overline{D}_s} \left| w_{s,0}(x,y) \right|,\ \ \max_{s,p} \sup_{\overline{D}_s} \left(1 - d_{s,p}(x,y) - q_{s,p}(x,y) \right) = l,$$

$$\sup_{\overline{D}} K(x,y;\xi,\eta) \le 0,5K,\ \ \max\{1, \sup_{\overline{D}} \left(x - x_0 + y - y_0 \right)\} = \gamma.$$

Тоді з (11) методом математичної індукції маємо

$$\max_s \sup_{\overline{D}_s} w_{s,p}(x,y) \le \frac{1}{p!} [Ll\gamma K(y - y_0 + x - x_0)]^p \cdot d. \tag{15}$$

Теорема. Нехай $F[u(x,y)] \in C_1(\overline{B})$, $a_1(x,y) \in C^{(1.0)}(D)$, $a_2(x,y) \in$ $\in C^{(0.1)}(D)$ і при $(x,y) \in D$ виконуються умови (5), а в області $\overline{B}_1$ існують функції порівняння задачі (1). Тоді послідовності функцій $\{z_{s,p}(x,y)\}$ та $\{v_{s,p}(x,y)\}$, побудовані згідно закону (10), (11), (13): а) збігаються рівномірно в області $\overline{D}_s$, $s = 1,2,3$ до єдиного розв'язку відповідного інтегрального рівняння із (6); б) мають місце оцінки (15); в) в області $\overline{B}_1$ виконуються нерівності

$$v_{s,p}(x,y) \le v_{s,p+1}(x,y) \le u_s(x,y) \le z_{s,p+1}(x,y) \le z_{s,p}(x,y), \tag{16}$$

$(x,y) \in \overline{D}_s, p \in N_0$, $s = 1,2,3$ де $u_s(x,y)$ — єдиний розв'язок відповідного рівняння із (6); г) збіжність ітераційного методу (10), (11), (13) не повільніша збіжності методу, приведеного в роботі [1].

Наслідок. Нехай $\varphi_i(x) = 0$, $i = 1,2$, $x \in [x_0, x_1]$, $\psi(y) = 0$, $y \in [y_0, y_2]$, $F[u(x,y)] \in C_1(\overline{B})$, причому $F[u(x,y)] \equiv H[u(x,y);0]$.

Тоді, якщо $F[0] \ge (\le) 0$ в області $\overline{B}_1$, то розв'язок крайової задачі (1) при $(x,y) \in \overline{D}$ задовольняє нерівність $u(x,y) \ge (\le) 0$.

Висновки. Побудовано швидкозбіжну модифікацію двостороннього методу наближеного розв'язання крайової задачі ДГД для нелінійного хвильового рівняння в області зі складною структурою краю. Встановлено умови існування і єдиності розв'язку задачі (1), його регулярності та знакосталості.

Список використаних джерел:

1. Marynets V. V., Marynets K. V. On Goursat Darboux boundary-value problem for systems of non-linear differential equations of hyperbolic type. *Miskolc Mathematical Notes*. 2013. Vol. 14, N. 3. C. 1009–1020.
2. Маринець В. В., Маринець К. В. Дослідження крайової задачі Гурса-Дарбу для нелінійного рівняння гіперболічного типу. *Механіка і фізика руйнування будівельних матеріалів та конструкцій*. 2014. Вип. 10. С. 56–68.
3. Collatz L. Funktionalanalysis und numerische matematik. Berlin Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag, 1964. 446 p.
4. Красносельский М. А., Вайникко Г. М., Забрейко П. П., Рутицкий Я. Б., Стеценко В. Я. Приближенное решение операторных уравнений. М.: Наука, 1969. 456 с.

With the help of the constructed modification of the two-sided method we investigate the Darboux-Goursat-Darboux boundary-value problem for non-linear wave differential equation of the hyperbolic type over the domain with a complex structure.

Key words: *two-sided method, Darboux-Goursat-Darboux boundary-value problem, the domain with complex structure, comparation functions.*

Одержано 24.02.2017

УДК 519.854

В. О. Михайлюк, д-р фіз.-мат. наук

Східноєвропейський національний університет імені Лесі Українки, м. Луцьк

АЛГЕБРАЇЧНИЙ ПІДХІД ДО РЕОПТИМІЗАЦІЇ ЗАДАЧ КОМБІНАТОРНОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ ТА СУМІЖНІ ПИТАННЯ ОЦІНКИ СКЛАДНОСТІ ОБЧИСЛЕНЬ

Використовується поняття α_Λ -наближеного поліморфізму для конструювання $\psi(\alpha_\Lambda)$ -наближеного оптимального алгоритму ($\psi(\alpha_\Lambda) = 2 - 1/\alpha_\Lambda$) для реоптимізації *CSP* задачі $MAX - \Lambda$ ($Ins - MAX - \Lambda$) з добавленням деякого обмеження. Гіпотеза алгебраїчної дихотомії характеризує *NP*-складність розглянутого підходу, а базова *SDP* релаксація для наближених поліморфізмів (*BasicSDP*) визначає ефективний алгоритм заокруглення для $MAX - \Lambda$ та $Ins - MAX - \Lambda$.

Ключові слова: *наближений поліморфізм, гіпотеза алгебраїчної дихотомії, унікальна ігрова гіпотеза (UGC), реоптимізація CSPs.*

Вступ. Узагальнені задачі про виконуваність (Constraint Satisfaction Problems, *CSPs*) описують великий клас задач комбінаторної оптимізації [1, 2]. Узагальнена задача про виконуваність (*CSP*) Λ може бути задана