

17. Мансимов К. Б. Особые управления в системах с запаздыванием / К. Б. Мансимов. — Баку : ЭЛМ, 1999. — 176 с.
18. Габасов Р. К теории необходимых условий оптимальности для дискретных систем / Р. Габасов, Ф. М. Кириллова // Автоматика и телемеханика. — 1969. — № 12. — С. 31–47.

In this paper consider the one optimal control problem described from Roesser type discrete system. Proof the necessary optimality conditions singular of the Pontryagin since control.

Key words: *Roesser type systems, Pontryagins maximum principle, singular control, increment formula.*

Отримано: 02.06.2016

УДК 517.958

В. А. Клименко, старший викладач,

Д. О. Білоус, студент

Сумський державний університет, м. Суми

МОДЕЛЮВАННЯ ТЕПЛООВОГО ПОЛЯ ПЛАСТИНИ ПІД ВПЛИВОМ РУХОМОГО ДЖЕРЕЛА ТЕПЛА

Запропонована математична модель описує тепловий стан поверхні пластини в результаті дії рухомого джерела тепла із заданою, залежною від часу, інтенсивністю випромінювання. При побудові математичної моделі такого процесу розглядалась нелінійна задача теплопровідності. Розподіл поля температур знаходиться методом розділення змінних у рівнянні параболічного типу. Модель враховує перерозподіл температурного поля при виході теплового джерела за межі поверхні пластини.

Ключові слова: *розподіл температурного поля, рухоме теплове джерело, нелінійна задача теплопровідності.*

Вступ. Швидкий розвиток сучасних новітніх технологій вимагає від науковців та дослідників приділяти значну увагу розробці і виготовленню елементів технічних систем та конструкцій з врахуванням високих вимог до підвищеної надійності та довголіття, стійкості до навантажень різного типу. Особливий інтерес виникає до теплового впливу на поверхню деталі джерел тепла [1–4]. Він, як правило, відбувається при механічній, електродуговій, іонно-променевої обробці деталі і може призвести до небажаних структурних та фазових перетворень матеріалу [5–7].

Отже, на сьогодні, існує значна кількість публікацій про дослідження температурного стану поверхонь. Так питання впливу теплоти, що виділяється при механічній обробці поверхні деталі розглядається в роботі [8]. В ній автори запропонували метод дослідження

температурного поля в поверхневому шарі заготовки при термофрикційному різанні. Показано, що характер розподілу температур має екстремальний характер з максимумом, що розташовується поблизу зони контакту леза диска із заготівлею.

Автори роботи [9] відмічають, що нерівномірність нагрівання різних ділянок деталі, а також неможливість обліку неоднорідності температурного поля деталі при розробці режимів її обробки можуть призводити до дефектам деталі, пов'язаним зі структурними перетвореннями і, як наслідок, псуванню виробів. Результатами моделювання є просторово розподілені поля температур для заданого часу.

Дослідження температурного стану об'єкта, з використанням непрямих методів граничних та приграничних елементів способом побудови чисельно-аналітичного розв'язку стаціонарної задачі теплопровідності з урахуванням умов складного теплообміну, представлено в роботі [10]. В роботі врахований вплив внутрішніх джерел теплової енергії та розподіл теплового поля у паралелепіпеді.

Поряд з тим, слід відзначити, що у досліджених математичних структурах, при моделюванні процесу термічного нагрівання деталей, не врахована зміна розподілу температур поверхні під час відсутності температурного впливу. Цікавим залишається питання моделювання температурного стану поверхні під час комплексного впливу джерела тепла з урахуванням швидкості його переміщення вздовж встановленої траєкторії руху та за відсутності теплового навантаження протягом встановленого інтервалу часу в режимі циклічної обробки.

Постановка задачі.

1. Температурне поле у пластині, викликане зосередженим рухомих джерелом тепла

Будемо вважати, що по одній із сторін бруса, що обробляється (в напрямку осі Ox) (рис. 1) рухається точкове джерело тепла, що залежить від часу інтенсивністю $q(t)$.

Положивши, що всі сторони бруса теплоізолювані, а температурне поле не залежить від координати z , сформулюємо наступну задачу:

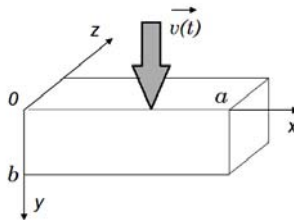


Рис. 1. Схематичне зображення пластины, що обробляється

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \frac{q(t) \delta(x - vt) \delta(y)}{c\rho}, \quad (1)$$

$$u(x, y, t_0) = u_0(x, y), \quad (2)$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} = \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=a} = \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0} = \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=b} = 0, \quad (3)$$

де α — коефіцієнт теплопровідності; c — питома теплоємність матеріалу пластини; ρ — густина матеріалу; $\delta(x - vt)$, $\delta(y)$ — дельта-функції Дірака; a — довжина пластини; b — її товщина.

В силу лінійності поставленої задачі і на основі принципу суперпозиції задача (1)–(3) може бути розбита на дві задачі. Розглянемо кожну з них детальніше.

1. Знайти функцію $v(x, y, t)$, що задовольняє рівнянню:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \alpha^2 \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right), \quad (4)$$

початковій умові

$$v(x, y, t_0) = v_0(x, y), \quad (5)$$

і крайовим умовам

$$\left. \frac{\partial v}{\partial x} \right|_{x=0} = \left. \frac{\partial v}{\partial x} \right|_{x=a} = \left. \frac{\partial v}{\partial y} \right|_{y=0} = \left. \frac{\partial v}{\partial y} \right|_{y=b} = 0. \quad (6)$$

2. Знайти функцію $w(x, y, t)$, що задовольняє рівнянню

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \alpha^2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + \frac{q(t) \delta(x - vt) \delta(y)}{c\rho}, \quad (7)$$

початковій умові

$$w(x, y, t_0) = 0, \quad (8)$$

і крайовим умовам

$$\left. \frac{\partial w}{\partial x} \right|_{x=0} = \left. \frac{\partial w}{\partial x} \right|_{x=a} = \left. \frac{\partial w}{\partial y} \right|_{y=0} = \left. \frac{\partial w}{\partial y} \right|_{y=b} = 0. \quad (9)$$

Тоді розв'язком $u(x, y, t)$ вихідної задачі є сума розв'язків двох останніх задач, тобто

$$u(x, y, t) = v(x, y, t) + w(x, y, t). \quad (10)$$

Тут же зауважимо, що задача (4)–(6) відповідає випадку і описує температурне поле, коли рухоме джерело знаходиться поза пластинною, що обробляється, а задача (7)–(9) — випадку, коли джерело діє безпосередньо на пластину.

2. Реалізація задачі

2.1. Розрахунок температурного поля за відсутністю джерела тепла в полі пластини

Розв'язок задачі (4)–(6) будемо шукати у вигляді:

$$v(x, y, t) = X(x)Y(y)T(t), \quad (11)$$

$$\frac{1}{\alpha^2} \frac{\dot{T}}{T} = \frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} = -(\gamma_n^2 + \gamma_m^2) = \text{const}. \quad (12)$$

Для отримання нетривіального розв'язку, а також розв'язку, що має фізичний зміст, константа «розділення» може бути тільки від'ємною.

Із (12) отримаємо:

$$\dot{T}_{nm}(t) + \alpha^2 (\gamma_n^2 + \gamma_m^2) T(t) = 0, \quad (13)$$

$$X''(x) + \gamma_n^2 X(x) = 0, \quad (14)$$

$$Y''(y) + \gamma_m^2 Y(y) = 0. \quad (15)$$

Відомо, що розв'язок рівняння (14) має вигляд

$$X(x) = C_1 \cos \gamma_n x + C_2 \sin \gamma_n x, \quad (16)$$

де C_1 і C_2 — довільні сталі, γ_n — власні числа.

Для відшукування сталих, а також для відшукування власних функцій і власних значень, скористаємося граничними умовами:

$$\left. \frac{dX}{dx} \right|_{x=0} = \left. \frac{dX}{dx} \right|_{x=a} = 0. \quad (17)$$

Із (16) і (17) отримаємо:

$$\begin{cases} C_2 \gamma_n = 0, \\ -\gamma_n C_1 \sin a \gamma_n + C_2 \gamma_n \cos a \gamma_n = 0. \end{cases} \quad (18)$$

так як $C_2 = 0$, то власні функції можна представити як:

$$X_n(x) = C_1 \cos\left(\frac{n\pi}{a} x\right), \quad (19)$$

а власні числа $\gamma_n = \frac{n\pi}{a}$, $n = 0, 1, 2, \dots$

Аналогічно отримаємо, що

$$Y_m(y) = C_3 \cos\left(\frac{m\pi}{b} y\right), \quad (20)$$

де власні числа $\gamma_m = \frac{m\pi}{b}$, $m = 0, 1, 2, \dots$

Розв'язок однорідного рівняння (13) має вигляд

$$T_{nm}(t) = C_{nm} e^{-\int_0^t \alpha^2 (\gamma_n^2 + \gamma_m^2) dt} = C_{nm} e^{-\alpha^2 \pi^2 \left[\left(\frac{n}{a} \right)^2 + \left(\frac{m}{b} \right)^2 \right] (t-t_0)}. \quad (21)$$

В силу лінійності поставленої задачі вираз (11) функції $v(x, y, t)$ може бути записаний наступним чином:

$$v(x, y, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} C_{nm} e^{-\alpha^2 \pi^2 \left[\left(\frac{n}{a} \right)^2 + \left(\frac{m}{b} \right)^2 \right] (t-t_0)} \cos\left(\frac{n\pi}{a} x\right) \cos\left(\frac{m\pi}{b} y\right). \quad (22)$$

Для знаходження сталих C_{nm} скористаємося початковою умовою (5).

$$\text{При } t = t_0 \text{ маємо } v_0(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} C_{nm} \cos\frac{n\pi}{a} x \cos\frac{m\pi}{b} y.$$

Помножуючи праву і ліву частину останнього виразу на $\cos\left(\frac{n\pi}{a} x\right) \cos\left(\frac{m\pi}{b} y\right)$ та інтегруючи в межах $0 \leq x \leq a$ і $0 \leq y \leq b$, отримаємо:

$$C_{nm} = \frac{\int_0^a \int_0^b v_0(x, y) \cos\left(\frac{n\pi}{a} x\right) \cos\left(\frac{m\pi}{b} y\right)}{\|\varphi_n\|^2 \|\psi_m\|^2}, \quad (23)$$

$$\text{де } \varphi_n(x) = \cos\left(\frac{n\pi}{a} x\right), \psi_m(y) = \cos\left(\frac{m\pi}{b} y\right).$$

Детальніше

$$\|\varphi_n\|^2 = \int_0^a \cos^2\left(\frac{n\pi}{a} x\right) dx = \begin{cases} \frac{a}{2}, & n \neq 0, \\ a, & n = 0. \end{cases} \quad (24)$$

$$\|\psi_m\|^2 = \int_0^b \cos^2\left(\frac{m\pi}{b} y\right) dy = \begin{cases} \frac{b}{2}, & m \neq 0, \\ b, & m = 0. \end{cases} \quad (25)$$

Таким чином, розв'язок задачі (4)–(6) має вид

$$v(x, y, t) = \frac{1}{ab} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} N_{nm} e^{-\alpha^2 \pi^2 \left[\left(\frac{n}{a} \right)^2 + \left(\frac{m}{b} \right)^2 \right] (t-t_0)} \cos\left(\frac{n\pi}{a} x\right) \times \cos\left(\frac{m\pi}{b} y\right) \int_0^a \int_0^b v_0(x, y) \cos\left(\frac{n\pi}{a} x\right) \cos\left(\frac{m\pi}{b} y\right) dy dx, \quad (26)$$

де

$$N_{nm} = \begin{cases} 1, & \text{при } m = 0, n = 0, \\ 2, & \text{при } \begin{cases} m = 0, n \neq 0, \\ m \neq 0, n = 0, \end{cases} \\ 4, & \text{при } m \neq 0, n \neq 0. \end{cases}$$

2.2. Розрахунок температурного поля при дії рухомого джерела тепла на пластину

Як вже зазначалося, поставленій задачі відповідає задача (7)–(9). Розв’язок цієї задачі будемо шукати методом розкладання за власними функціями, причому в якості їх будемо брати власні вектори системи Штурма–Ліувілля, яка зустрічалася уже при розв’язанні відповідної однорідної задачі (4)–(6).

Таким чином, шуканий розв’язок буде мати вид:

$$w(x, y, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} T_{nm}(t) \cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{m\pi}{b}y\right). \quad (27)$$

Підставляючи (27) в (7) и розкладаючи функцію джерела за тими ж власними функціями, отримаємо

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \dot{T}_{nm}(t) \cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{m\pi}{b}y\right) = \\ & = -\alpha^2 \pi^2 T_{nm}(t) \left[\left(\frac{n}{a}\right)^2 + \left(\frac{m}{b}\right)^2 \right] \cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \times \\ & \times \cos\left(\frac{m\pi}{b}y\right) + \frac{1}{c\rho} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} q_{nm}(t) \cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{m\pi}{b}y\right). \end{aligned} \quad (28)$$

Із останнього співвідношення отримаємо

$$\dot{T}_{nm}(t) + \alpha^2 \pi^2 \left[\left(\frac{n}{a}\right)^2 + \left(\frac{m}{b}\right)^2 \right] T_{nm}(t) = \frac{q_{nm}(t)}{c\rho}. \quad (29)$$

Розв’язок отриманого лінійного неоднорідного рівняння має вид:

$$T_{nm}(t) = C_{nm} e^{-\alpha^2 \pi^2 \left[\left(\frac{n}{a}\right)^2 + \left(\frac{m}{b}\right)^2 \right] (t-t_0)} + \frac{1}{c\rho} \int_{t_0}^t e^{-\alpha^2 \pi^2 \left[\left(\frac{n}{a}\right)^2 + \left(\frac{m}{b}\right)^2 \right] (t-\tau)} q_{nm}(\tau) d\tau, \quad (30)$$

де $C_{nm} = T_{nm}(t_0) = 0$.

Таким чином:

$$T_{nm}(t) = \frac{1}{c\rho} \int_{t_0}^t q_{nm}(\tau) e^{-\alpha^2 \pi^2 \left[\left(\frac{n}{a}\right)^2 + \left(\frac{m}{b}\right)^2 \right] (t-\tau)} q_{nm}(\tau) d\tau. \quad (31)$$

Остаточний розв'язок задачі (7)–(9) має вигляд:

$$w(x, y, t) = \frac{1}{abc\rho} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} N_{nm} \cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{m\pi}{b}y\right) \times \\ \times \int_{t_0}^t q_{nm}(\tau) e^{-\alpha^2 \pi^2 \left[\left(\frac{n}{a}\right)^2 + \left(\frac{m}{b}\right)^2\right] (t-\tau)} d\tau. \quad (32)$$

де $q_{nm}(\tau)$ — коефіцієнти розвинення функції джерела за власними функціями.

2.3. Узагальнене температурне поле деталі при дискретній дії рухомого джерела тепла

Як вже зазначалося, температурне поле пластини $u(x, y, t)$ в цьому випадку є сумою двох полів: $v(x, y, t)$ і $w(x, y, t)$. Запишемо цей вираз:

$$u(x, y, t) = \frac{1}{abc\rho} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} N_{nm} \cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{m\pi}{b}y\right) \times \\ \times \int_{t_0}^t q_{nm}(\tau) e^{-\alpha^2 \pi^2 \left[\left(\frac{n}{a}\right)^2 + \left(\frac{m}{b}\right)^2\right] (t-\tau)} q_{nm}(\tau) d\tau + \\ + \frac{1}{ab} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} N_{nm} e^{-\alpha^2 \pi^2 \left[\left(\frac{n}{a}\right)^2 + \left(\frac{m}{b}\right)^2\right] (t-t_0)} \times \cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{m\pi}{b}y\right) \times \\ \times \int_0^a \int_0^b v_0(x, y) \cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{m\pi}{b}y\right) dy dx. \quad (33)$$

Оскільки функція джерела у нашому випадку має вигляд $q(x, y, t) = q(t) \delta(y) \delta(x - vt)$, то

$$q_{nm}(t) = \frac{1}{\|\varphi_n\|^2 \|\psi_m\|^2} \int_0^a \int_0^b q(t) \delta(x - vt) \delta(y) \cdot \cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \times \\ \times \cos\left(\frac{m\pi}{b}y\right) dy dx. \quad (34)$$

$$u(x, y, t) = \frac{q}{abc\rho} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} N_{nm} X_n(x) Y_m(y) \cdot \int_{t_0}^t e^{-A_{nm}(t-\tau)} \cos\left(\frac{n\pi}{a}s(\tau)\right) d\tau + \\ + \frac{1}{ab} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} N_{nm} e^{-A_{nm}(t-t_0)} X_n(x) Y_m(y) \cdot \int_0^a \int_0^b v_0(x, y) X_n(x) Y_m(y) dy dx. \quad (35)$$

3. Рекурентні співвідношення для обчислення температурного поля пластини

Отриманий вираз (35) для розрахунку температурного поля пластини, не дивлячись на його простоту, призводить до значних труднощів при обчисленні інтегралів від швидкоосцилюючих функцій.

У зв'язку з цим перетворимо його до більш простого, а також врахуємо наявність прямого і зворотного ходу джерела теплового випромінювання, поклавши, що при прямому ході джерела функція переміщення має вид $S(t) = vt$, а при зворотному $S(t) = a - vt$.

а) прямий хід:

$$I_{nm}^n = \int_{t_0}^t e^{-A_{nm}(t-\tau)} \cos \frac{n\pi v\tau}{a} d\tau = \frac{e^{-A_{nm}(t-\tau)} [B_n \sin(B_n\tau) + A_{nm} \cos(B_n\tau)]}{B_n^2 + A_{nm}^2}, \quad (36)$$

$$\text{де } A_{nm} = \alpha^2 \pi^2 \left[\left(\frac{n}{a}\right)^2 + \left(\frac{m}{b}\right)^2 \right], \quad B_n = \frac{n\pi v}{a};$$

б) зворотній хід:

$$I_{nm}^0 = \int_{t_0}^t e^{-A_{nm}(t-\tau)} \cos \frac{n\pi(a-v\tau)}{a} d\tau = (-1)^n \int_{t_0}^t e^{-A_{nm}(t-\tau)} \cos \frac{n\pi v\tau}{a} d\tau = (-1)^n I_{nm}^n. \quad (37)$$

Перейдемо до перетворення подвійного інтегралу в виразі (35). Головним міркуванням, що дозволяє обчислити цей інтеграл, є припущення, що розподіл температури задається тією температурою, яка отримана у деталі в кінці активної ділянки і може бути обчислена аналітично.

Отже, якщо припустити, що час проходження активної ділянки дорівнює t_a , тоді

$$\begin{aligned} v_0(x, y) &= \frac{q(t)}{abc\rho} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} N_{nm} X_n(x) Y_m(y) \int_0^{t_a} e^{-A_{nm}(t-\tau)} \cos \frac{n\pi s(\tau)}{a} d\tau = \\ &= \frac{q(t)}{abc\rho} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} N_{nm} X_n(x) Y_m(y) e^{-A_{nm}(t-\tau)} \left[\frac{B_n \sin(B_n\tau) + A_{nm} \cos(B_n\tau)}{B_n^2 + A_{nm}^2} \right] \Bigg|_0^{t_a} = \\ &= \frac{q(t)}{abc\rho} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} N_{nm} X_n(x) Y_m(y) \left[\frac{A_{nm}(-1)^n - e^{-A_{nm}t_a}}{B_n^2 + A_{nm}^2} \right] = \\ &= \frac{q(t)}{abc\rho} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{N_{nm} A_{nm}}{B_n^2 + A_{nm}^2} X_n(x) Y_m(y) \left[(-1)^n - e^{-A_{nm}t_a} \right]. \end{aligned} \quad (38)$$

Для спрощення виразу (38) введемо позначення:

$$K_{nm}^n = (-1)^n - e^{-A_{nm}t_a}. \quad (39)$$

Тоді для руху теплового випромінювача у зворотному напрямку отримаємо:

$$K_{nm}^0 = (-1)^n K_{nm}^n = 1 - (-1)^n e^{-A_{nm}t_a}. \quad (40)$$

Підставимо отриманий вираз для $v_0(x, y)$ у подвійний інтеграл:

$$\begin{aligned} & \int_0^a \int_0^b \frac{q(t)}{abc\rho} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{N_{nm} A_{nm}}{B_n^2 + A_{nm}^2} X_n(x) Y_m(y) K_{nm}^n \right] \cdot X_j(x) Y_i(y) dx dy = \\ & = \frac{q(t)}{abc\rho} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{N_{nm} A_{nm} K_{nm}^0}{B_n^2 + A_{nm}^2} \int_0^a \int_0^b X_n(x) Y_m(y) \cdot X_j(x) Y_i(y) dx dy = (41) \\ & = \begin{cases} \frac{q(t)}{c\rho} \frac{A_{ij}^0 K_{ij}^0}{B_j^2 + A_{ij}^2}, & i = m, \quad j = n, \\ 0, & i \neq m, \quad j \neq n. \end{cases} \end{aligned}$$

Таким чином,

$$\begin{aligned} u(x, y, t) &= \frac{q(t)}{abc\rho} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} N_{nm} X_n(x) Y_m(y) I_{nm}^0 + \\ &+ \frac{q(t)}{abc\rho} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} N_{nm} e^{-A_{nm}t_a} X_n(x) Y_m(y) \times \\ &\times \frac{A_{nm} K_{nm}^0}{B_n^2 + A_{nm}^2} = \frac{q(t)}{abc\rho} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} N_{nm} X_n(x) Y_m(y) \cdot \left(I_{nm}^0 + e^{-A_{nm}t_a} I_{nm}^n \right) = \\ &= \frac{q(t)}{abc\rho} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} N_{nm} X_n Y_m I_{nm}^n \left[(-1)^n - e^{-A_{nm}t_a} \right]. \end{aligned} \quad (42)$$

Щоб прослідити закономірність розповсюдження теплового поля, для отримання рекурентного співвідношення, досліджуємо вираз для температур (42) в ті моменти часу, коли відбувається перемикання з прямого ходу на зворотний і навпаки.

а) Час зміни від $t_0 = 0$ до $t_1 = t_a$ (прямий хід):

$$u(x, y, t_1) = \frac{q(t)}{abc\rho} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} N_{nm} X_n(x) Y_m(y) I_{nm}^n, \quad (43)$$

$$\text{де } I_{nm}^n = \frac{A_{nm}}{B_n^2 + A_{nm}^2} \left[(-1)^n - e^{-A_{nm}t_a} \right]$$

б) Час зміни від $t_1 = t_a$ до $t_2 = 2t_a$ (зворотний хід):

$$\begin{aligned} u(x, y, t_2) &= \frac{q(t)}{abc\rho} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} N_{nm} X_n Y_m I_{nm}^n = \\ &= \frac{q(t)}{abc\rho} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} N_{nm} X_n Y_m \left[I_{nm}^0 + I_{nm}^0 e^{-A_{nm}t_a} \right]. \end{aligned} \quad (44)$$

в) $t \in [2t_a, 3t_a]$ (прямий хід):

$$\begin{aligned}
 u(x, y, t_3) &= \frac{q(t)}{abc\rho} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} N_{nm} X_n Y_m I_{nm}^n + \\
 &+ \frac{q(t)}{abc\rho} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} N_{nm} X_n Y_m \left[I_{nm}^0 + I_{nm}^0 e^{-A_{nm} t_a} \right] e^{-A_{nm} t_a} = \\
 &= \frac{q(t)}{abc\rho} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} N_{nm} X_n Y_m \left[I_{nm}^n + I_{nm}^0 e^{-A_{nm} t_a} + I_{nm}^0 e^{-A_{nm} 2t_a} \right].
 \end{aligned} \quad (45)$$

4. Результати дослідження та їх обговорення

На основі отриманих рекурентних співвідношень проведено моделювання теплового поля плоскої пластини під час дії рухомого джерела тепла на деталь та в режимі виходу його за межі пластини.

Розроблена комп'ютерна програма, яка дозволила провести розрахунок температури деталі в різних точках поверхні з врахуванням швидкості переміщення джерела теплової енергії. Результати розрахунків представлені графічно на рисунках 2–4. Так розрахунки виконані для наступних даних: довжина деталі $a = 10$ см, ширина $b = 1$ см., $h = 5$ см., коефіцієнт температуропровідності $\alpha = 0,037$ см²/с, коефіцієнт лінійного теплового розширення $\beta = 0,0000152$ 1/К, об'ємна теплоємність $c = 0,5860$ Дж/(см³·К), питома густина матеріалу пластини $\rho = 7,7$ г/(см³), потужність теплового джерела $q = 301,4495$ (Дж см²)/с, $T = 20^\circ\text{C}$ — температура навколишнього середовища, швидкість переміщення джерела тепла $v = 10$ см/с.

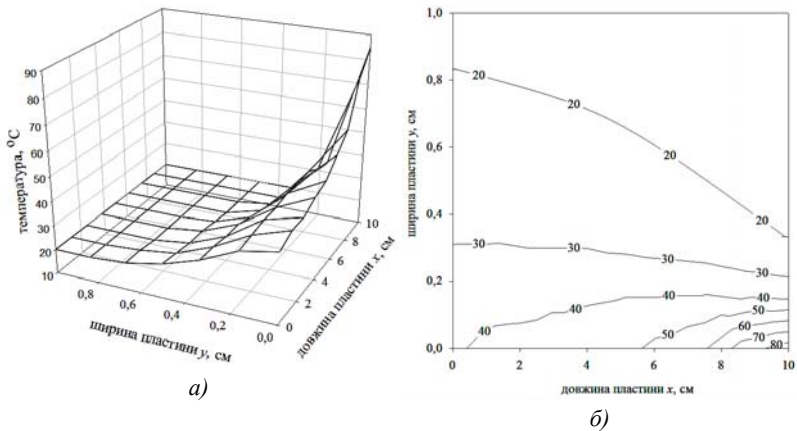


Рис. 2. Температурне поле пластини (прямий хід) $t = 1$ с

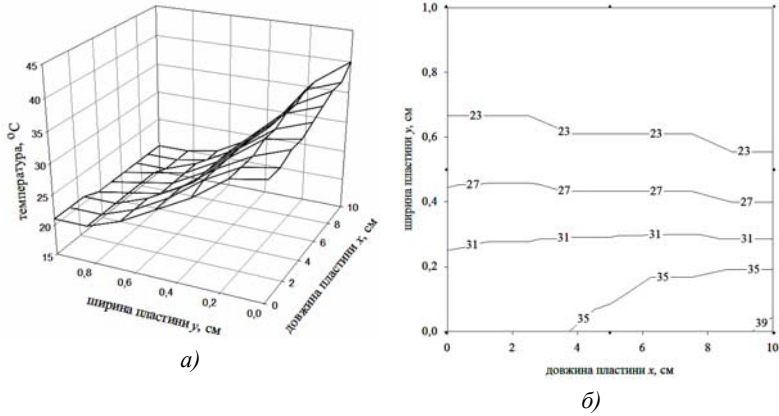


Рис. 3. Температурне поле пластини (вільний хід) $t = 2$ с

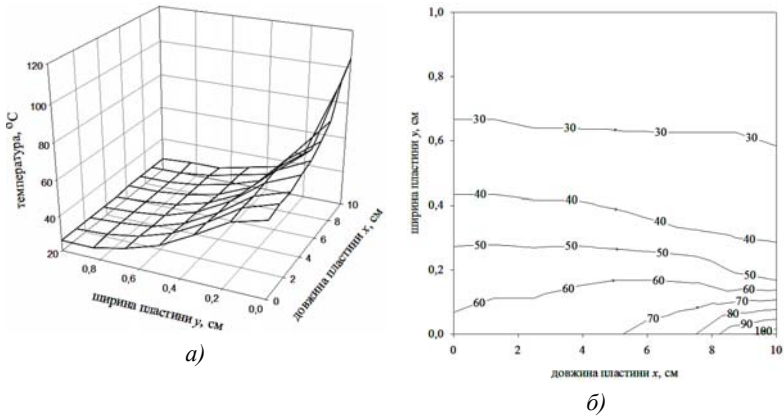


Рис. 4. Температурне поле пластини (прямий хід) $t = 5$ с

Аналіз рисунка 2а дає уявлення про розподіл температур в момент, коли точкове джерело тепла знаходиться вкінці деталі, через одну секунду від початку свого руху, тобто безпосередньо в момент теплового опромінювання всієї довжини пластини. Лінії рівня (див. рис. 2б) показують відповідне температурне поле.

Рисунок 3 дає можливість спостерігати розподіл температурного поля, коли вплив джерела відсутній (або діє режим вільного ходу). Можна бачити прогрів деталі через одну секунду від того як вийшов за межі деталі тепловий елемент.

Рисунок 4 формує уявлення про поверхню розподілу температур через п'ять секунд від початку руху теплового джерела з двома проміжними зупинками загальною тривалістю 2 секунди. Тобто відбувся

перехід точкового джерела енергії з координати положення $x_1=0$ в положення $x_2=a$, і, в зворотному напрямку, в положення $x_3=0$. Програма дозволила змоделювати температурне поле деталі при циклічній обробці поверхні протягом кількох циклів.

Подальший розвиток моделі є актуальним, на думку авторів, в напрямку врахування впливу динамічного теплового навантаження з нерівномірним переміщенням джерела по поверхні деталі за заданою траєкторією. Актуальним залишається дослідження одночасного впливу кількох теплових джерел в різних точках поверхні деталі на теплове поле пластини.

Висновки. Запропонована математична модель описує нестационарне температурне поле пластини яке сформоване в результаті впливу рухомого теплового джерела. Розроблено комп'ютерну програму для розрахунку полів температур, при обернено-поступовому русі інструмента з відповідними часовими інтервалами впливу. Модель враховує перерозподіл температурного поля в ті моменти часу, коли теплове навантаження знаходиться за межами деталі і його вплив на пластину відсутній. Практичне застосування моделі є актуальним в технологічному процесі під час якого виконується контроль температури поверхні з метою попередження можливих фазових перетворень матеріалу пластини або зміни електрофізичних та механічних характеристик об'єкту.

Список використаних джерел:

1. Лыков А. В. Теория теплопроводности / А. В. Лыков. — М. : Высш. шк., 1967. — 600 с.
2. Берман Р. Теплопроводность твердых тел / Р. Берман. — М. : Мир, 1979. — 286 с.
3. Попович В. С. Про розв'язування задач теплопровідності термочутливих тіл / В. С. Попович, І. М. Махоркін // *Мат. методи і фіз.-мех. поля.* — 1997. — Т. 40, № 1. — С. 36–44.
4. Коздоба Л. А. Методы решения нелинейных задач теплопроводности / Л. А. Коздоба. — М. : Наука, 1975. — 227 с.
5. Ляшенко Б. А. Распределение температур в пластине с однослойным покрытием при интенсивном нагреве / Б. А. Ляшенко, В. А. Терлецкий, Я. А. Долгов, Е. Б. Сорока // *Проблемы прочности.* — 1998. — № 3. — С. 128–133.
6. Беляев Н. М. Математические методы теплопроводности / Н. М. Беляев, А. А. Рядно. — К. : Вища школа, 1993. — 415 с.
7. Самарский А. А. Вычислительная теплопередача / А. А. Самарский, П. Н. Вабищевич. — М. : Едиториал УРСС, 2003. — 784 с.
8. Плахотник В. А. Определение температурного поля в поверхностном слое заготовки при термофрикционном резании / В. А. Плахотник, А. А. Конская // *Вісник Східноукраїнського національного університету ім. В. Даля.* — 2013. — №4(193). — С. 150–152.
9. Чичко А. Н. Моделирование процессов нагрева и охлаждения деталей на основе трехмерного уравнения теплопроводности в САЕ «Протерм-1» /

- А. Н. Чичко, Д. М. Кукуй, В. Ф. Соболев, С. Г. Лихоузов, О. А. Сачек // Литье и металлургия. — 2012. — № 1 (64). — С. 65–70.
10. Журавчак Л. Математичне моделювання розподілу теплового поля у паралелепіпеді з урахуванням складного теплообміну на його межі та внутрішніх джерел / Л. Журавчак, О. Крук // Вісник Національного університету «Львівська політехніка». Комп'ютерні науки та інформаційні технології. — 2013. — № 771. — С. 291–302.

The mathematical model describes the thermal state of the plate as a result of moving heat source with a given depending on the time, the intensity of radiation. Distribution in temperature is a method of separation of variables in the equation of parabolic type. The model takes into account the redistribution of temperature fields in the output heat source outside of the plate. When building a mathematical model of the process considered nonlinear problem of heat conduction.

Key words: *distribution of temperature field, moving heat source, nonlinear heat conduction problems.*

Отримано: 18.05.2017

УДК 517.982.2

В. А. Літовченко, д-р фіз.-мат. наук, професор,
Г. М. Унгурян, аспірант

Чернівецький національний університет
імені Ю. Федьковича, м. Чернівці

ПРОСТОРИ ТИПУ S ЕЛЕМЕНТІВ ОБМЕЖЕНОЇ ГЛАДКОСТІ

Шляхом розширення просторів S_α і S'_α Гельфанда І. М. і Шилова Г. Є. побудовано зліченно-нормовані простори основних і узагальнених функцій, елементи яких мають обмежений ступінь гладкості. Досліджено їх повноту, з'ясовано критерій збіжності та структуру розподілів.

Ключові слова: простори типу S , узагальнені функції.

Вступ. Простори типу S Гельфанда І. М. і Шилова Г. Є. складаються із визначених на \mathbb{R}^n нескінченно диференційовних функцій, які разом із своїми похідними підпорядковані спеціальним умовам поведінки на нескінченності [1]. Ці простори слугують природним середовищем дослідження задачі Коші як для класичних систем рівнянь із частинними похідними, так і для еволюційних псевдо-диференціальних рівнянь і систем рівнянь із аналітичними степеневими символами псевдодиференціювання. Використання цих просторів дозволило описати класи єдиності та коректності задачі Коші для параболічних систем із гладкими