А. Н. Чичко, Д. М. Кукуй, В. Ф. Соболев, С. Г. Лихоузов, О. А. Сачек // Литье и металургия. — 2012. — № 1 (64). — С. 65–70.
10. Журавчак Л. Математичне моделювання розподілу теплового поля у паралелепіпеді з урахуванням складного теплообміну на його межі та внутрішніх джерел / Л. Журавчак, О. Крук // Вісник Національного університету «Львівська політехніка». Комп'ютерні науки та інформаційні технології. — 2013. — № 771. — С. 291–302.

The mathematical model describes the thermal state of the plate as a result of moving heat source with a given depending on the time, the intensity of radiation. Distribution in temperature is a method of separation of variables in the equation of parabolic type. The model takes into account the redistribution of temperature fields in the output heat source outside of the plate. When building a mathematical model of the process considered nonlinear problem of heat conduction.

Key words: *distribution of temperature field, moving heat source, nonlinear heat conduction problems.*

Отримано: 18.05.2017

УДК 517.982.2

В. А. Літовченко, д-р фіз.-мат. наук, професор,
Г. М. Унгурян, аспірант

Чернівецький національний університет
імені Ю. Федьковича, м. Чернівці

ПРОСТОРИ ТИПУ S ЕЛЕМЕНТІВ ОБМЕЖЕНОЇ ГЛАДКОСТІ

Шляхом розширення просторів S_α і S'_α Гельфанда І. М. і Шилова Г. Є. побудовано зліченно-нормовані простори основних і узагальнених функцій, елементи яких мають обмежений ступінь гладкості. Досліджено їх повноту, з'ясовано критерій збіжності та структуру розподілів.

Ключові слова: простори типу S, узагальнені функції.

Вступ. Простори типу S Гельфанда І. М. і Шилова Г. Є. складаються із визначених на $\mathbb{R}^n$ нескінченно диференційовних функцій, які разом із своїми похідними підпорядковані спеціальним умовам поведінки на нескінченності [1]. Ці простори слугують природним середовищем дослідження задачі Коші як для класичних систем рівнянь із частинними похідними, так і для еволюційних псевдо-диференціальних рівнянь і систем рівнянь із аналітичними степеневи-ми символами псевдодиференціювання. Використання цих просторів дозволило описати класи єдиності та коректності задачі Коші для параболічних систем із гладкими коефіцієнтами [2, 3] істотно розширити клас узагальнених початкових даних, з якими ця задача має гладкі класичні розв'язки, описати максимальні класи розв'язків таких систем із характерними для їх фундаментального розв'язку властивостями, дослідити властивості локалізації та стабілізації цих розв'язків, довести теорему типу Ліувілля тощо [4–12]. Проте однією із необхідних умов для застосування цих просторів у теорії задачі Коші є нескінченна диференційовність стосовно просторової змінної коефіцієнтів системи та символів псевдодиференціювання. Тому, для одержання подібних результатів як для класичних, так і для еволюційних систем рівнянь із коефіцієнтами або символами псевдодиференціювання обмеженого ступеня гладкості важливим є розширення просторів типу S шляхом доповнення їх відповідними елементами скінченної гладкості.

У роботі побудовано зліченно-нормовані простори основних і узагальнених функцій, елементи яких мають обмежену гладкість. Доведено їх повноту, сформульовано критерій збіжності та з'ясовано загальний вигляд лінійних неперервних функціоналів. Також, установлено зв'язок цих просторів із відповідними просторами S_α і $S_\alpha^{/}$ Гельфанда Г. М. і Шилова Г. Є. [1].

1. Означення, допоміжні твердження. Нехай $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$ — відповідно дійсний і комплексний n — вимірні простори, $\mathbb{N}$ – множина натуральних чисел, $\mathbb{Z}_+^n$ – сукупність усіх n-вимірних мультиіндексів; $|q|_+ := q_1 + \ldots + q_n$, $q = (q_1, \ldots, q_n) \in \mathbb{Z}_+^n$, $(\cdot,\cdot)$ – скалярний добуток у $\mathbb{R}^n$,

$$\|x\| := (x,x)^{1/2}, \quad \overset{\sim}{\|x\|}^{\beta} := |x_1|^\beta + \ldots + |x_n|^\beta, \quad \beta > 0, \quad x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n,$$

$\overset{\sim}{\|x\|} := \overset{\sim}{\|x\|}^{1}$; $\mathbb{C}^m(\mathbb{R}^n)$ — клас усіх визначених на $\mathbb{R}^n$ неперервно диференційовних до m порядку включно функцій, K — довільно фіксована компактна множина із $\mathbb{R}^n$; покладемо $p(k) := \begin{cases} p, p < k, \\ k, p \geq k \end{cases}$, $\{p,k\} \subset \mathbb{N}$.

Зафіксуємо довільно $\alpha > 0$, $a > 0$ та $m \in \mathbb{N}$ і покладемо $M_p(x) := exp\left\{ a\left(1 - \frac{1}{p}\right) \overset{\sim}{\|x\|}^{1/\alpha} \right\}$, $p \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, $x \in \mathbb{R}^n$. Позначимо сукупність усіх елементів $\varphi(\cdot)$ із $\mathbb{C}^m(\mathbb{R}^n)$ через $S_{\alpha,a:m}(\mathbb{R}^n) \equiv S_{\alpha,a:m}$, для яких вирази $M_p(x)\partial^q \varphi(x)$, $|q|_+ \leq m$, $p \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, обмежені на $\mathbb{R}^n$. У $S_{\alpha,a:m}$ уведемо зліченну систему норм за правилом

$$\|\varphi\|_{p:m} := \sup_{\substack{x \\ |q|_+ \le p(m)}} \left\{ M_p(x) \left| \partial^q \varphi(x) \right| \right\}. \qquad (1)$$

Оскільки $M_p(x) \le M_{p+1}(x),\ x \in \mathbb{R}^n,\ \ p > 1,$ то маємо, що при $p < m$:

$$\|\varphi\|_{p:m} = \sup_{\substack{x \\ |q|_+ \le p}} \left\{ M_p(x) \left| \partial^q \varphi(x) \right| \right\} \le$$

$$\le \sup_{\substack{x \\ |q|_+ \le p}} \left\{ M_{p+1}(x) \left| \partial^q \varphi(x) \right| \right\} \le \sup_{\substack{x \\ |q|_+ \le p+1}} \left\{ M_{p+1}(x) \left| \partial^q \varphi(x) \right| \right\} = \|\varphi\|_{p+1:m};$$

при $p = m$:

$$\|\varphi\|_{m:m} = \sup_{\substack{x \\ |q|_+ \le m}} \left\{ M_m(x) \left| \partial^q \varphi(x) \right| \right\} \le \sup_{\substack{x \\ |q|_+ \le m}} \left\{ M_{p+1}(x) \left| \partial^q \varphi(x) \right| \right\} = \|\varphi\|_{m+1:m};$$

при $p > m$:

$$\|\varphi\|_{p:m} = \sup_{\substack{x \\ |q|_+ \le m}} \left\{ M_p(x) \left| \partial^q \varphi(x) \right| \right\} \le \sup_{\substack{x \\ |q|_+ \le m}} \left\{ M_{p+1}(x) \left| \partial^q \varphi(x) \right| \right\} = \|\varphi\|_{p+1:m}.$$

Отже, система норм у просторі $S_{\alpha,a:m}$ є неспадною:

$$\|\varphi\|_{p:m} \le \|\varphi\|_{p+1:m} \quad (\forall p \in \mathbb{N} \setminus \{1\}).$$

Далі, позначимо через $\overline{\Phi}_{p:m}$ сукупність усіх функцій $\varphi(\cdot)$, які мають неперервні похідні до порядку $p(m)$ включно, для яких вирази $M_p(x)\partial^q \varphi(x),\ \ |q|_+ \le p(m),$ є обмеженими на $\mathbb{R}^n$.

Очевидно, що $\overline{\Phi}_{p:m}$ є лінійним простором із нормою (1) причому $\bigcap\limits_{p=2}^{\infty} \overline{\Phi}_{p:m} = S_{\alpha,a:m}$.

Нехай $\{\varphi_\nu(\cdot), \nu \ge 1\}$ — послідовність елементів із $\overline{\Phi}_{p:m}$ така, що самі функції $\varphi_\nu(\cdot)$ і їх похідні $\partial^q \varphi_\nu(\cdot),\ \ |q|_+ \le p(m),$ на кожній скінченній області із $\mathbb{R}^n$ рівномірно збігаються до деяких граничних функцій. Якщо $\lim\limits_{\nu \to \infty} \varphi_\nu(x) = \varphi_0(x),$ то згідно із теоремою про диференціювання рівномірно збіжної послідовності, гранична функція $\varphi_0(x)$ має також похідні до порядку $p(m)$ включно, причому $\partial \varphi_0(x) = \lim\limits_{\nu \to \infty} \partial^q \varphi_\nu(x),\ \ |q|_+ \le p(m).$

Нехай тепер $\overline{\Phi}_{p:m} \supset \{\varphi_\nu(\cdot), \nu \ge 1\}$ — фундаментальна послідовність за нормою (1). Тоді, згідно із відомим критерієм Коші, ця послідовність збігається рівномірно на кожній обмеженій області із $\mathbb{R}^n$ разом із своїми похідними до порядку $p(m)$ включно. Покажемо, що гранична функція $\varphi_0(\cdot)$ цієї послідовності належить до $\overline{\Phi}_{p:m}$, причому $\|\varphi_\nu - \varphi_0\|_{p:m} \xrightarrow[\nu\to\infty]{} 0$. Для цього сформулюємо допоміжні твердження.

Лема 1. Границя $\varphi_0(\cdot)$ послідовності $\{\varphi_\nu(\cdot), \nu \geq 1\} \subset \overline{\Phi}_{p:m}$, яка збігається при $\nu \to \infty$ рівномірно на кожній обмеженій області із $\mathbb{R}^n$ разом із своїми похідними до порядку $p(m)$ включно і є обмеженою за нормою (1) сталою c, належить простору $\overline{\Phi}_{p:m}$ і $\|\varphi_0\|_{p:m} \leq c$.

Доведення. Як уже зазначалося, така функція $\varphi_0(\cdot)$ має всі похідні на $\mathbb{R}^n$ до порядку $p(m)$ включно. Зафіксуємо довільно точку $x_0 \in \mathbb{R}^n$; оскільки функція $M_p(\cdot)$ — неперервна на $\mathbb{R}^n$, то для кожного $\varepsilon > 0$ знайдеться $\mho_\varepsilon(x_0)$ — ε-окіл точки x_0 такий, що

$$\left|M_p\left(x_0\right) - M_p\left(x\right)\right| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad x \in \mho_\varepsilon(x_0).$$

І, оскільки

$$\partial^q \varphi_\nu\left(x\right) \xrightarrow[\nu\to+\infty]{x\in\mho_\varepsilon(x_0)} \partial^q \varphi_0\left(x\right), \quad \left|q\right|_+ \leq p(m),$$

(тут йдеться про рівномірну збіжність стосовно змінної x у замиканні ε-околу $\mho_\varepsilon\left(x_0\right)$ точки x_0), то знайдеться такий номер ν_0, що для всіх $\nu \geq \nu_0$ і $x \in \mho_\varepsilon(x_0)$

$$M_p\left(x\right)\left|\partial^q \varphi_0\left(x\right)\right| \leq M_p\left(x\right)\left|\partial^q \varphi_\nu\left(x\right)\right| + \varepsilon \leq$$
$$\leq \sup_{\substack{x \\ |q|_+ \leq p(m)}} \left\{M_p\left(x\right)\left|\partial^q \varphi_\nu\left(x\right)\right|\right\} + \varepsilon \leq c + \varepsilon.$$

Урахувавши тепер довільність точки x_0 та $\varepsilon > 0$, маємо $\|\varphi_0\|_{p:m} \leq c$.

Лема доведена.

Лема 2. Кожна фундаментальна за нормою (1) послідовність $\{\varphi_\nu(\cdot), \nu \geq 1\} \subset \overline{\Phi}_{p:m}$, яка збігається до нуля поточково на $\mathbb{R}^n$, збігається до функції $\varphi_0(x) \equiv 0$ і за нормою $\|\cdot\|_{p:m}$.

Доведення. Оскільки $\{\varphi_\nu(\cdot), \nu \geq 1\}$ — фундаментальна, то згідно із раніше зазначеним, існує функція $\varphi_0(\cdot) \in \mathbb{C}^{p(m)}(\mathbb{R}^n)$ така, що

$$\partial^q \varphi_\nu(x) \xrightarrow[\nu\to+\infty]{x\in \mathrm{K}\subset\mathbb{R}^n} \partial^q \varphi_0(x), \quad \left|q\right|_+ \leq p(m).$$

Однак послідовність $\varphi_\nu(\cdot)$ збігається до нуля поточково на $\mathbb{R}^n$, тому $\varphi_0(x) \equiv 0$.

Для заданого $\varepsilon > 0$ зафіксуємо $\nu_0(\varepsilon)$ так, щоб $\left\|\varphi_\nu - \varphi_\mu\right\|_{p:m} \le \varepsilon$ при $\nu \ge \nu_0(\varepsilon)$ і $\mu \ge \nu_0(\varepsilon)$. Послідовність $\psi_\nu(\cdot) := \varphi_\nu(\cdot) - \varphi_\mu(\cdot)$ при $\mu \to \infty$ збігається до функції $\varphi_\nu(\cdot)$ рівномірно на кожній обмеженій області із $\mathbb{R}^n$ разом з усіма своїми похідними до порядку $p(m)$ включно, тому згідно із лемою 1, $\left\|\varphi_\nu\right\|_{p:m} \le \varepsilon$ для всіх $\nu \ge \nu_0(\varepsilon)$. Лема доведена.

Теорема 1. Простір $\overline{\Phi}_{p:m}$ повний відносно норми $\|\cdot\|_{p:m}$.

Доведення. Нехай $\{\varphi_\nu(\cdot), \nu \ge 1\} \subset \overline{\Phi}_{p:m}$ — фундаментальна послідовність за $\|\cdot\|_{p:m}$. Ця послідовність, як уже зазначалося, збігається при $\nu \to \infty$ рівномірно разом із усіма своїми похідними до порядку $p(m)$ включно на кожній обмеженій області із $\mathbb{R}^n$ до деякої функції $\varphi_0(\cdot)$. Оскільки норми $\left\|\varphi_\nu\right\|_{p:m}$ обмежені, то згідно із лемою 1, $\varphi_0(\cdot) \in \overline{\Phi}_{p:m}$. Різниця $\{\varphi_\nu - \varphi_0, \nu \ge 1\}$ — фундаментальна і збігається поточково на $\mathbb{R}^n$ до нуля, тому згідно із лемою 2, $\left\|\varphi_\nu - \varphi_0\right\|_{p:m} \xrightarrow[\nu \to \infty]{} 0.$ **Теорема доведена.**

Оскільки поповнення метричного простору, ізоморфного частині $M^/$ повного простору M, ізометричне замиканню $M^/$ у M [13], то безпосередньо із теореми 1, одержуємо такий наслідок.

Наслідок 1. Поповнення $\Phi_{p:m}$ простору $S_{\alpha,a:m}$ за нормою $\|\cdot\|_{p:m}$ є підпростором простору $\overline{\Phi}_{p:m}$.

Отже, виконується рівність: $S_{\alpha,a:m} = \bigcap\limits_{p=2}^{\infty} \Phi_{p:m}$.

Правильне наступне допоміжне твердження.

Лема 3. У просторі $S_{\alpha,a:m}$ норми

$$\|\varphi\|_{p_1:m} = \sup_{\substack{x \\ |q|_+ \le p_1(m)}} \left\{ M_{p_1}(x) \left| \partial^q \varphi(x) \right| \right\},$$

$$\|\varphi\|_{p_2:m} = \sup_{\substack{x \\ |q|_+ \le p_2(m)}} \left\{ M_{p_2}(x) \left| \partial^q \varphi(x) \right| \right\}$$

— взаємно узгоджені.

Доведення. Нехай послідовність $\{\varphi_\nu(\cdot), \nu \ge 1\} \subset S_{\alpha,a:m}$ — фундаментальна за кожною із норм $\|\cdot\|_{p_1:m}$, $\|\cdot\|_{p_2:m}$ і за однією із них, нехай за

$\|\cdot\|_{p_1:m}$, прямує до нуля: $\|\varphi_\nu\|_{p_1:m} = \sup\limits_{\substack{x \\ |q|_+ \le p_1(m)}} \left\{ M_{p_1}(x) \left| \partial^q \varphi_\nu(x) \right| \right\} \xrightarrow[\nu\to\infty]{} 0.$

Звідси, зокрема, випливає, що $\varphi_\nu(\cdot)$ поточково на $\mathbb{R}^n$ збігається до нуля. Тоді, згідно із лемою 2, стосовно норми $\|\cdot\|_{p_2:m}$ одержуємо, що $\|\varphi_\nu\|_{p_2:m} \xrightarrow[\nu\to\infty]{} 0$. Лему доведено.

Таким чином, згідно із загальною теоремою про повноту зліченно-нормованих просторів [1], встановлено наступне твердження.

Теорема 2. Простір $S_{\alpha,a:m}$ є повним зліченно-нормованим.

На завершення цього пункту дамо таке означення.

Означення. Послідовність функцій $\{\varphi_\nu(\cdot), \nu \ge 1\}$ визначених на $\mathbb{R}^n$ є m-збіжною до функції $\varphi_0(\cdot)$, якщо $\{\varphi_\nu(\cdot), \nu \ge 0\} \subset \mathbb{C}^m(\mathbb{R}^n)$, і

$$\partial^q \varphi_\nu(x) \xrightarrow[\nu\to+\infty]{x\in\mathrm{K}} \partial^q \varphi_0(x) \;\; (\forall \mathrm{K} \subset \mathbb{R}^n, \; |q|_+ \le p(m)).$$

2. Критерій збіжності у просторі $S_{\alpha,a:m}$. Очевидно, що для кожного $p \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ виконується граничне співвідношення

$$\lim_{\widetilde{\|x\|}\to+\infty} \frac{M_p(x)}{M_{p+1}(x)} = 0$$

тобто

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 \;\; \forall x \in \mathbb{R}^n, \; \widetilde{\|x\|} > \delta : \; M_p(x) < \varepsilon M_{p+1}(x). \tag{2}$$

З умови (2), зокрема, випливає, що усі вирази $M_p(x) \partial^q \varphi(x)$, $|q|_+ \le p(m)$, не тільки обмежені на $\mathbb{R}^n$, але і прямують до нуля при $\widetilde{\|x\|} \to \infty$.

Дійсно, бо інакше знайдеться для деяких індексів q і p, $|q|_+ \le p(m)$, $\{x_\nu, \nu \ge 1\} \subset \mathbb{R}^n$ — нескінченно велика послідовність елементів, для якої $M_p(x_\nu) \left| \partial^q \varphi(x_\nu) \right| \ge c > 0$. Тоді згідно з умовою (2), для нескінченно малої послідовності $\{\varepsilon_j > 0, j \ge 1\}$ існує така підпослідовність $\{x_{\nu_j}, j \ge 1\} \subset \{x_\nu, \nu \ge 1\}$, що

$$M_p(x_{\nu_j}) < \varepsilon_j M_{p+1}(x_{\nu_j}).$$

Звідси приходимо до співвідношення

$$M_{p+1}(x_{\nu_j}) \left| \partial^q \varphi(x_{\nu_j}) \right| \ge \frac{c}{\varepsilon_j} \xrightarrow[j\to+\infty]{} +\infty,$$

яке суперечить належності $\varphi(\cdot)$ до простору $S_{\alpha,a:m}$.

Правильне таке допоміжне твердження.

Лема 4. Послідовність $\{\varphi_\nu(\cdot), \nu \ge 1\} \subset S_{\alpha,a:m}$, яка є обмеженою за кожною із норм $\|\cdot\|_{p:m}$ і m – збіжною до нуля, збігається за цими нормами.

Доведення. Оскільки послідовність $\{\varphi_\nu(\cdot), \nu \ge 1\}$ обмежена за кожною із норм $\|\cdot\|_{p:m}$, то

$$\forall p \in \mathbb{N} \setminus \{1\} \;\; \exists c > 0 \;\; \forall \nu \ge 1 : \;\; \left\|\varphi_\nu\left(x\right)\right\|_{p+1:m} \le c.$$

Зважаючи на умову (2), для заданого $\varepsilon > 0$ виберемо $\delta > 0$ так, щоб для всіх $x \in \mathbb{R}^n$ таких, що $\|x\| > \delta$ виконувалась нерівність

$$M_p(x) \le \frac{\varepsilon}{c} M_{p+1}(x).$$

Тоді для зазначених x і довільного $q \in \mathbb{Z}_+^n$, $|q|_+ \le p(m)$,

$$M_p(x)\left|\partial^q \varphi_\nu(x)\right| \le \frac{\varepsilon}{c} M_{p+1}(x)\left|\partial^q \varphi_\nu(x)\right| \le \frac{\varepsilon}{c}\left\|\varphi_\nu\right\|_{p+1:m} \le \varepsilon.$$

Решта x із $\mathbb{R}^n$ утворюють компактну множину, тому для них, зважаючи на m — збіжність до нуля послідовності $\varphi_\nu(\cdot)$, можна вказати таке $\nu_0 \in \mathbb{N}$, що при $\nu \ge \nu_0$ і всіх $q \in \mathbb{Z}_+^n$, $|q|_+ \le p(m)$, $M_p(x)\left|\partial^q \varphi_\nu(x)\right| \le \varepsilon$.

Таким чином,

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \nu_0 \in \mathbb{N} \;\; \forall \nu \ge \nu_0 : \;\; \left\|\varphi_\nu\right\|_{p:m} = \sup_{\substack{x \\ |q|_+ \le p(m)}} \left\{M_p(x)\left|\partial^q \varphi_\nu(x)\right|\right\} \le \varepsilon.$$

Лема доведена.

Наслідок 2. Якщо послідовність $\{\varphi_\nu(\cdot), \nu \ge 1\} \subset S_{\alpha,a:m}$ обмежена за кожною із норм $\|\cdot\|_{p:m}$ і при $\nu \to +\infty$ є m — збіжною до деякої функції $\varphi_0(\cdot)$, то $\varphi_0(\cdot) \in S_{\alpha,a:m}$ і $\varphi_0(\cdot)$ є границею послідовності $\varphi_\nu(\cdot)$ за топологією простору $S_{\alpha,a:m}$.

Доведення. Згідно з лемою 1 функція $\varphi_0(\cdot)$ належить до кожного простору $\overline{\Phi}_{p:m}$, а отже і до простору $S_{\alpha,a:m} = \bigcap_{p=1}^{\infty} \overline{\Phi}_{p:m}$. Різниця $\{\varphi_0 - \varphi_\nu, \nu \ge 1\}$ обмежена за кожною із норм $\|\cdot\|_{p:m}$ і є m – збіжною до нуля, тому згідно із лемою 4, одержуємо, що $\|\varphi_\nu - \varphi_0\|_{p:m} \xrightarrow[\nu\to\infty]{} 0$ для кожного $p \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Наслідок доведено.

Правильне зворотнє твердження: якщо послідовність $\{\varphi_\nu(\cdot), \nu \ge 1\} \subset S_{\alpha,a:m}$ збігається за топологією простору $S_{\alpha,a:m}$ до елемента $\varphi_0(\cdot)$ цього простору, то тоді ця послідовність обмежена за кожною із норм $\|\cdot\|_{p:m}$ і є m-збіжною до $\varphi_0(\cdot)$.

Дійсно, із збіжності послідовності $\varphi_\nu(\cdot)$ за топологією $S_{\alpha,a:m}$ до $\varphi_0(\cdot)$ випливає обмеженість різниці $\{\varphi_\nu - \varphi_0, \nu \ge 1\}$ за кожною із норм $\|\cdot\|_{p:m}$. Тоді урахувавши належність $\varphi_0(\cdot)$ до $S_{\alpha,a:m}$, для кожного $p \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ знаходимо, що

$$\|\varphi_\nu\|_{p:m} = \|\varphi_\nu - \varphi_0 + \varphi_\nu\|_{p:m} \le \|\varphi_\nu - \varphi_0\|_{p:m} + \|\varphi_0\|_{p:m} \le c_p \quad (\forall\, \nu \ge 1).$$

Тобто одержуємо обмеженість $\{\varphi_\nu(\cdot), \nu \ge 1\}$ за кожною із $\|\cdot\|_{p:m}$.

Те, що послідовність $\{\varphi_\nu(\cdot), \nu \ge 1\}$ є m-збіжною до елемента $\varphi_0(\cdot)$ випливає безпосередньо із співвідношення

$$\|\varphi_\nu - \varphi_0\|_{p:m} = \sup_{x,\ |q|_+ \le p(m)} \left\{ M_p(x) \left| \partial^q (\varphi_\nu(x) - \varphi_0(x)) \right| \right\} \xrightarrow[\nu\to+\infty]{} 0, \quad p \ge 2.$$

Таким чином, доведено наступне твердження.

Теорема 3 (критерій збіжності). Для того, щоб послідовність $\{\varphi_\nu(\cdot), \nu \ge 1\} \subset S_{\alpha,a:m}$ була збіжною у просторі $S_{\alpha,a:m}$ до елемента $\varphi_0(\cdot)$ цього простору, необхідно і достатньо, щоб вона була:

1) обмежена у просторі $S_{\alpha,a:m}$;

2) m-збіжною до елемента $\varphi_0(\cdot)$.

3. Співвідношення між просторами $S_{\alpha,a:m}$ і $S_{\alpha,a:m+1}$. Нехай $\varphi(\cdot) \in S_{\alpha,a:m+1}$, тоді

$$\|\varphi\|_{p:m+1} = \sup_{x,\ |q|_+ \le p(m+1)} \left\{ M_p(x) \left| \partial^q \varphi(x) \right| \right\} \ge \sup_{x,\ |q|_+ \le p(m)} \left\{ M_p(x) \left| \partial^q \varphi_\nu(x) \right| \right\} = \|\varphi\|_{p:m}. \quad (3)$$

Отже, правильне таке вкладення:

$$\overline{\Phi}_{p:m+1} \subset \overline{\Phi}_{p:m} \quad (\forall p \in \mathbb{N} \setminus \{1\}). \quad (4)$$

Лема 5. Із кожної обмеженої у просторі $\overline{\Phi}_{p:m+1}$ послідовності його елементів можна виділити $p(m)$ — збіжну на $\mathbb{R}^n$ підпослідовність.

Доведення. Розглянемо довільну обмежену послідовність $\{\varphi_\nu(\cdot), \nu \ge 1\}$ із $\overline{\Phi}_{p:m+1}$. Оскільки система норм $\|\cdot\|_{p:m}$, $p \ge 2$, неспадна, то із обмеженості $\{\varphi_\nu(\cdot), \nu \ge 1\}$ за нормою $\|\cdot\|_{p:m+1}$ випливає її обмеженість за кожною із норм $\|\cdot\|_{l:m+1}$, $l \le p$. Згідно із обмеженістю $\|\varphi_\nu\|_{1:m+1}$, сама послідовність $\{\varphi_\nu(\cdot), \nu \ge 1\}$, а також, $\{\partial\varphi_\nu(\cdot), \nu \ge 1\}$ є рівномірно обмеженими на кожному компакті K із $\mathbb{R}^n$. Тоді $\{\varphi_\nu(\cdot), \nu \ge 1\}$ — рівностепенно неперервна на кожному $\mathrm{K} \subset \mathbb{R}^n$. Зафіксувавши довільно компакт $\mathrm{K}_0 \subset \mathbb{R}^n$ і скориставшись теоремою Арцела, дістанемо підпослідовність $\{\varphi_{0\nu_0}(\cdot), \nu_0 \ge 1\} \subset \{\varphi_\nu(\cdot), \nu \ge 1\}$ таку, що

$$\varphi_{0\nu_0}(x) \xrightarrow[\nu_0 \to +\infty]{x \in \mathrm{K}_0} \varphi_0(x)$$

(тут $\varphi_0(\cdot)$ – деяка неперервна функція на K_0).

Зазначимо, що $\{\varphi_{0\nu_0}(\cdot), \nu_0 \ge 1\}$ на кожній компактній множині $\mathrm{K}_{01} \supset \mathrm{K}_0$ також є рівномірно обмеженою і рівностепенно неперервною, тому, на підставі тієї ж теореми Арцела з неї можна виокремити підпослідовність $\{\varphi_{0\nu_1}(\cdot), \nu_1 \ge 1\} \subset \{\varphi_{0\nu_0}(\cdot), \nu_0 \ge 1\}$, рівномірно збіжну на K_{01} до деякої неперервної на цьому компакті функції $\varphi_{01}(\cdot)$. Оскільки $\varphi_0(x) = \varphi_{01}(x)$, $x \in \mathrm{K}_0$, і $\varphi_{01}(x)$ — неперервна на K_{01}, то φ_{01} — неперервне продовження функції $\varphi_0(\cdot)$ на компакт K_{01}. У зв'язку з цим, функцію $\varphi_{01}(x)$, $x \in \mathrm{K}_{01}$, надалі позначатимемо через $\varphi_0(\cdot)$.

Продовжуючи цей процес за індукцією, прийдемо до існування підпослідовності $\{\varphi_{0\nu}(\cdot), \nu \ge 1\} \subset \{\varphi_\nu(\cdot), \nu \ge 1\}$ та неперервної функції $\varphi_0(\cdot)$ на $\mathbb{R}^n$ таких, що

$$\varphi_{0\nu}(x) \xrightarrow[\nu \to \infty]{x \in \mathrm{K}} \varphi_0(x) \quad (\forall \mathrm{K} \subset \mathbb{R}^n).$$

Далі, із обмеженості $\|\varphi_\nu\|_{r:m+1}$ випливає, що послідовності $\{\partial\varphi_{0\nu}(\cdot), \nu \ge 1\}$ і $\{\partial^2\varphi_{0\nu}(\cdot), \nu \ge 1\}$ є рівномірно обмеженими на кожному компакті $\mathrm{K} \subset \mathbb{R}^n$, тоді, на довільно фіксованому компакті K_1 для $\{\partial\varphi_{0\nu}(\cdot), \nu \ge 1\}$ виконуються всі умови теореми Арцела, тому розмірковуючи із послідовністю $\{\partial\varphi_{0\nu}(\cdot), \nu \ge 1\}$, як у випадку $\{\varphi_\nu(\cdot), \nu \ge 1\}$, маємо існування підпослідовності $\{\partial\varphi_{1\nu}(\cdot), \nu \ge 1\} \subset \{\partial\varphi_{0\nu}(\cdot), \nu \ge 1\}$ та неперервної на $\mathbb{R}^n$ функції $\varphi_1(\cdot)$ таких, що

$$\partial\varphi_{1\nu}\left(x\right)\xrightarrow[\nu\to\infty]{x\in K}\varphi_1\left(x\right)\ \left(\forall K\subset\mathbb{R}^n\right).$$

Урахувавши тепер відому теорему, про диференціювання рівномірно збіжної послідовності, приходимо до рівності

$$\varphi_1(x)=\partial\varphi_0(x),\quad x\in\mathbb{R}^n.$$

Продовжуючи аналогічні міркування, використовуючи при цьому обмеженість вихідної послідовності $\{\varphi_\nu(\cdot),\nu\ge 1\}$ за решта нормами $\|\varphi_\nu\|_{l:m+1}$, одержимо існування у $\{\varphi_\nu(\cdot),\nu\ge 1\}$, підпослідовності $\{\varphi_{\nu_*}(\cdot),\nu_*\ge 1\}$, яка є $p(m)$ — збіжною у $\mathbb{R}^n$. Лема доведена.

Оскільки кожен елемент $\varphi(\cdot)$ простору $S_{\alpha,a:m+1}$ належить також і до простору $S_{\alpha,a:m}$, то правильне вкладення

$$S_{\alpha,a:m+1}\subset S_{\alpha,a:m}. \tag{5}$$

Теорема 4. Вкладення (5) компактне.

Доведення. Необхідно показати, що з кожної обмеженої у $S_{\alpha,a:m+1}$ послідовності $\{\varphi_\nu(\cdot),\nu\ge 1\}$ можна виділити збіжну у просторі $S_{\alpha,a:m}$ підпослідовність. Зазначимо, що обмеженість у $S_{\alpha,a:m+1}$ послідовності $\{\varphi_\nu(\cdot),\nu\ge 1\}$ означає її обмеженість за кожною нормою $\|\cdot\|_{p:m+1}$, $p\ge 2$. Тоді, згідно з лемою 5, з цієї послідовності можна виділити m — збіжну на $\mathbb{R}^n$ підпослідовність $\{\varphi_{\nu_*}(\cdot),\nu_*\ge 1\}$, яка також є обмеженою за кожною нормою $\|\cdot\|_{p:m+1}$, $p\ge 2$, а отже, і за нормами $\|\cdot\|_{p:m}$, $p\ge 2$ (див. співвід. (3)). Урахувавши тепер наслідок 2, дістанемо твердження вихідної теореми. Теорема доведена.

4. Альтернативний опис простору $S_{\alpha,a:m}$. Елементи простору $S_{\alpha,a:m}$ можна охарактеризувати по-іншому. Оскільки, $\varphi(\cdot)\in S_{\alpha,a:m}$, це означає, що

$$\forall q\in\mathbb{Z}_+^n,\ |q|_+\le m\ \ \exists c_q>0\ \ \forall\delta\in(0;a)\ \ \forall x\in\mathbb{R}^n:$$

$$\left|\partial^q\varphi(x)\right|\le c_q e^{-(a-\delta)\widetilde{\|x\|}^{1/\alpha}} \tag{6}$$

Звідси, скориставшись оцінками [1]

$$e^{-\frac{\alpha}{e}|\xi|^{1/\alpha}}\le\mu_\alpha\left(\xi\right)\le ce^{-\frac{\alpha}{e}|\xi|^{1/\alpha}},\quad \xi\in\mathbb{R}, \tag{7}$$

де c — деяка додатна стала, а $\mu_\alpha\left(\xi\right):=\inf\limits_{l\in\mathbb{Z}_+}\left\{\dfrac{l^{\alpha l}}{|\xi|^l}\right\}$, знаходимо, що

$$e^{-(a-\delta)\widetilde{\|x\|}^{1/\alpha}} = \prod_{j=1}^{n} e^{-(a-\delta)\widetilde{|x_j|}^{1/\alpha}} \leq \prod_{j=1}^{n} \mu_\alpha\left(\left(\frac{e(a-\delta)}{\alpha}\right)^{\alpha} x_j\right).$$

Тоді для кожного $k \in \mathbb{Z}_+^n$ і $x \in \mathbb{R}^n$ виконується оцінка

$$|x|^k\, e^{-(a-\delta)\widetilde{\|x\|}^{1/\alpha}} \leq \left(\frac{\alpha}{e(a-\delta)}\right)^{\alpha|k|_+} k^{\alpha k}. \tag{8}$$

Нехай тепер $A = \left(\frac{\alpha}{ea}\right)^{\alpha}$, а $\tilde{\delta} > 0$ таке, що

$$\left(\frac{\alpha}{e(a-\delta)}\right)^{\alpha} = A + \tilde{\delta},$$

тобто $\tilde{\delta} = A\left(\left(\frac{a}{a-\delta}\right)^{\alpha} - 1\right)$. Очевидно, що при $0 < \delta < a$ множиною значень величини $\tilde{\delta}$ є інтервал $(0, +\infty)$. Урахувавши це та оцінку (8), із (6) одержуємо, що, якщо $\varphi(\cdot) \in S_{\alpha,a:m}$, то

$$\forall q \in \mathbb{Z}_+^n,\ |q|_+ \leq m\ \ \exists c_q > 0\ \ \forall \tilde{\delta} > 0\ \ \forall k \in \mathbb{Z}_+^n\ \ \forall x \in \mathbb{R}^n :$$

$$\left|x^k \partial^q \varphi(x)\right| \leq c_q \left(A + \tilde{\delta}\right)^{|k|_+} k^{\alpha k}. \tag{9}$$

Покажемо тепер, що кожна функція $\varphi(\cdot) \in \mathbb{C}^m(\mathbb{R}^n)$, яка задовольняє умову (9), є елементом простору $S_{\alpha,a:m}$. Із (7) та (9) випливає, що $\left|\partial^q \varphi(x)\right| \leq c_q \prod_{j=1}^{n} \mu_\alpha\left(\frac{x_j}{A+\tilde{\delta}}\right) \leq c c_q exp\left\{-\left(\frac{\alpha}{e(A+\tilde{\delta})^{1/\alpha}}\widetilde{\|x\|}^{1/\alpha}\right)\right\}$. Урахувавши з цього, що при $\delta = a\left(1 - \left(\frac{A}{A+\tilde{\delta}}\right)^{1/\alpha}\right)$ виконується рівність $\frac{\alpha}{e(A+\tilde{\delta})^{1/\alpha}} = a - \delta$, і якщо $\tilde{\delta} \in (0, +\infty)$, то $(0; a)$ — множина значень величини δ, приходимо до умови (6).

Отже, умови (6) і (9) еквівалентні.

Інколи зручно розглядати у просторі $S_{\alpha,a:m}$ іншу систему норм, пов'язану із умовою (9). А саме, покладемо

$$\|\varphi\|_{q,l:m} := \sup_{x,k}\left\{\frac{\left|x^k \partial^q \varphi(x)\right|}{(A + 1/l)^{|k|_+} k^{k\alpha}}\right\},\ \ q \in \mathbb{Z}_+^n,\ \ |q|_+ \leq m,\ \ l \in \mathbb{N}. \tag{10}$$

Покажемо, що ця система норм еквівалентна системі (1). Якщо в (10) спочатку знайти $\sup$ за індексом $k \in \mathbb{Z}_+^n$, то одержимо:

$$\sup_k \left\{ \frac{|x|^k}{(A+1/l)^{|k|_+} k^{k\alpha}} \right\} = \prod_{j=1}^n \left(\inf_{k_j} \left\{ \frac{(A+1/l)^{k_j} k_j^{k_j\alpha}}{|x_j|^{k_j}} \right\} \right)^{-1} = \frac{1}{\prod_{j=1}^n \mu_\alpha \left(\frac{x_j}{A+1/l} \right)}.$$

Згідно із (7), маємо

$$\prod_{j=1}^n \left(\mu_\alpha \left(\frac{x_j}{A+1/l} \right) \right)^{-1} \le e^{\frac{\alpha}{e} \left\| \widetilde{\frac{x}{A+1/l}} \right\|^{1/\alpha}} \le M_{p_*}(x),$$

де $p_* := \left[\frac{\left(\alpha^\alpha + (ae)^\alpha / l\right)^{1/\alpha}}{\left(\alpha^\alpha + (ae)^\alpha / l\right)^{1/\alpha} - \alpha} \right] + 2$, а $[\cdot]$ — ціла частина числа. Отже, для кожних фіксованих $q \in \mathbb{Z}_+^n$, $|q|_+ \le m$, і $l \in \mathbb{N}$, існує $p_* \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ таке, що

$$\|\varphi\|_{q,l:m} \le \sup_x \left\{ M_p(x) \left| \partial^q \varphi(x) \right| \right\} \le \|\varphi\|_{p_*:m}. \tag{11}$$

Тепер зафіксуємо довільно $p \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ і урахувавши рівність $A = \left(\frac{\alpha}{ea} \right)^\alpha$, а також оцінки (7), знайдемо:

$$M_p(x) = \prod_{j=1}^n e^{a\left(1-\frac{1}{p}\right)|x_j|^{1/\alpha}} \le \prod_{j=1}^n \left(\mu_\alpha \left(\frac{ea}{\alpha} (1-1/p)^\alpha x_j \right) \right)^{-1} \le$$

$$\le \sup_{k \in \mathbb{Z}_+^n} \left\{ \frac{|x^k|}{(A+1/l_*)^{|k|_+} k^{k\alpha}} \right\},$$

де l_* — найменше із тих $l \in \mathbb{N}$, з якими виконується нерівність

$$A \left(\frac{p}{p-1} \right)^\alpha \ge A + 1/l.$$

Звідси та з означення (1) норми $\|\cdot\|_{p:m}$ приходимо до існування мультиіндекса $q_* \in \mathbb{Z}_+^n$ такого, що виконується умова $|q_*|_+ \le p(m)$ і справджується оцінка

$$\|\varphi\|_{p:m} = \sup_{\substack{x \\ |q|_+ \le p(m)}} \left\{ M_p(x) \left| \partial^q \varphi(x) \right| \right\} \le \sup_{k,x} \left\{ \frac{\left| x^k \partial^{q_*} \varphi(x) \right|}{\left(A + 1/l_* \right)^{|k|_+} k^{k\alpha}} \right\} = \|\varphi\|_{q_*,l_*:m}. \quad (12)$$

Установлені оцінки (11) і (12) характеризують еквівалентність систем норм $\|\cdot\|_{p:m}$ і $\|\cdot\|_{q,l:m}$ у просторі $S_{\alpha,a:m}$.

5. Простір $S_{\alpha:m}$, **зв'язок із** S_α. При $a > b > 0$ простір $S_{\alpha,a:m}$ є частиною простору $S_{\alpha,b:m}$ і кожна послідовність $\{\varphi_\nu(\cdot), \nu \ge 1\}$, яка збігається у просторі $S_{\alpha,a:m}$, збігається також і в $S_{\alpha,b:m}$: $S_{\alpha,a:m} \subset S_{\alpha,b:m}$.

Покладемо за означенням

$$S_{\alpha:m} := \bigcup_{a>0} S_{\alpha,a:m}. \quad (13)$$

Таким чином, простір $S_{\alpha:m}$ складається з усіх елементів $\varphi(\cdot)$ класу $\mathbb{C}^m(\mathbb{R}^n)$ таких, що

$$\exists a > 0 \ \ \forall q \in \mathbb{Z}_+^n, \ |q|_+ \le m \ \ \exists c_q > 0 \ \ \forall x \in \mathbb{R}^n : \ \left| \partial^q \varphi(x) \right| \le c_q e^{-a\widetilde{\|x\|}^{1/\alpha}},$$

або, що те ж саме, що

$$\exists A > 0 \ \ \forall q \in \mathbb{Z}_+^n, \ |q|_+ \le m \ \ \exists c_q > 0 \ \ \forall k \in \mathbb{Z}_+^n \ \ \forall x \in \mathbb{R}^n :$$

$$\left| x^k \partial^q \varphi(x) \right| \le c_q A^{|k|_+} k^{k\alpha}$$

(тут константи a, A і c_q, можуть залежати від функції $\varphi(\cdot)$, причому a і A пов'язані рівністю $A = \left(\left(\dfrac{\alpha}{ea} \right)^\alpha \right)$. Збіжність послідовності елементів $\{\varphi_\nu(\cdot), \nu \ge 1\} \subset S_{\alpha:m}$ до нуля у просторі $S_{\alpha:m}$, позначатимемо $\varphi_\nu \xrightarrow[\nu\to\infty]{S_{\alpha:m}} 0$, означає, що ця послідовність належить до деякого простору $S_{\alpha,a:m}$, у якому вона збігається до нуля.

Згідно з теоремою 4 мають місце такі компактні вкладення:

$$S_{\alpha:m+1} \subset S_{\alpha:m} \quad (\forall m \in \mathbb{N}).$$

Очевидно також, що $S_{\alpha:m} \subset S_{\beta:m}$, $\alpha < \beta$, причому це вкладення є неперервним.

На завершення зазначимо, що при $m = \infty$ простір $S_{\alpha,a:\infty}$ збігається із відповідним простором $S_{\alpha,a}$ із [1], тому, згідно із (13), справджується топологічна рівність $S_{\alpha:\infty} = S_\alpha$, у якій S_α — відомий простір типу S Гельфанда І. М. і Шилова Г. Є. [1].

6. Топологічно спряжені простори. Символом $\Phi^{/}$ позначимо простір, топологічно спряжений із простором Φ основних функцій. Згідно із загальною теорією спряжених просторів із зліченно-нормованими [1], знаходимо, що

$$S^{/}_{\alpha,a:m} = \bigcup_{p=2}^{+\infty} \Phi^{/}_{p:m}, \tag{14}$$

причому $S^{/}_{\alpha,a:m}$ — повний простір стосовно слабкої збіжності. Отже, якщо $f \in S^{/}_{\alpha,a:m}$, то існує хоча б одне p таке, що $f \in \Phi^{/}_{p:m}$. Найменше із цих p називається порядком узагальненої функції f, при цьому виконується оцінка

$$\left|\langle f, \varphi \rangle\right| \le \|f\|_{p:m} \|\varphi\|_{p:m} \quad (\forall \varphi \in \Phi_{p:m})$$

(тут кутовими дужками $\langle , \rangle$ позначено дію узагальненої функції на основну, а $\|f\|_{p:m}$ — норма функціонала f у просторі $\Phi^{/}_{p:m}$).

Очевидно, що лінійний функціонал f порядку p є обмеженим на кулях $\|\varphi\|_{p+1:m} \le 1$, $\|\varphi\|_{p+2:m} \le 1, \ldots$, тому цей функціонал належить до просторів $\Phi^{/}_{p+1:m}$, $\Phi^{/}_{p+2:m}, \ldots$. Отже, справджуються наступні вкладення: $\Phi^{/}_{2:m} \subset \Phi^{/}_{3:m} \subset \ldots \subset \Phi^{/}_{\text{p}:m} \subset \ldots \subset \Phi^{/}$.

Функціонал f порядку p, як елемент нормованих просторів $\Phi^{/}_{p:m}$, $\Phi^{/}_{p+1:m}, \ldots$, має у цих просторах відповідні норми

$$\|\varphi\|_{\text{p}:m} := \sup_{\|\varphi\|_{p:m} \le 1} \left|\langle f, \varphi \rangle\right|, \ \|\varphi\|_{\text{p+1}:m} := \sup_{\|\varphi\|_{p+1:m} \le 1} \left|\langle f, \varphi \rangle\right|, \ldots .$$

Очевидно, що $\|f\|_{p:m} \ge \|f\|_{p+1:m} \ge \ldots$.

З'ясуємо загальний вигляд лінійних неперервних функціоналів над простором $S_{\alpha,a:m}$. Згідно з рівністю (14), досить знайти загальний вигляд функціонала над нормованим простором $\Phi_{p:m}$. Однак простір $\Phi_{p:m}$ є замкнутим підпростором простору $\overline{\Phi}_{p:m}$, тому застосовуючи теорему Хана-Банаха про продовження лінійного функціонала, можна продовжити кожний функціонал $f \in \Phi^{/}_{p:m}$ на простір $\overline{\Phi}_{p:m}$. Отже, досить описати функціонали над простором $\overline{\Phi}_{p:m}$.

Покладемо у відповідність кожній функції $\varphi(\cdot) \in \overline{\Phi}_{p:m}$ сукупність усіх функцій

$$\psi_q(x) := M_p(x)\partial^q \varphi(x), \ \ |q|_+ \le p(m), \ \ x \in \mathbb{R}^n.$$

Одержимо відображення простору $\overline{\Phi}_{p:m}$ у пряму суму $\psi_{p:m}$ скінченного числа просторів неперервних функцій $\psi_q(\cdot)$, $|q|_+ \le p(m)$. Очевидно, що відображення $\varphi(\cdot) \longleftrightarrow \{\psi_q(\cdot), |q|_+ \le p(m)\}$ взаємно однозначне. Визнаючи норму елемента $\{\psi_q(\cdot), |q|_+ \le p(m)\}$ як $\sup\limits_{|q|_+ \le p(m)} {}_x \{\psi_q(x)\}$, одержимо збереження норми при цьому відображенні. У зв'язку з цим, можна вважати, що $\overline{\Phi}_{p:m}$ є замкнутим підпростором простору $\psi_{p:m}$ і, скориставшись ще раз теоремою Хана-Банаха, продовжити функціонал $f \in \Phi^{/}_{p:m}$ на увесь простір $\psi_{p:m}$. Після цього, згідно з теоремою Ріса-Радона [13], одержуємо загальний вигляд цього функціонала:

$$\langle f, \varphi \rangle = \sum_{|q|_+ \le p(m)} \int_{\mathbb{R}^n} M_p(x)\partial^q \varphi(x) d\sigma_q(x), \tag{15}$$

де $\sigma_q(\cdot)$ — міра у просторі $\mathbb{R}^n$, зосереджена на $\mathbb{R}^n$.

Норма цього функціонала, як функціонала над простором $\psi_{p:m}$, дорівнює сумі варіацій функцій $\sigma_q(\cdot)$. Зазначимо, що функції $\sigma_q(\cdot)$, взагалі кажучи, не визначаються однозначно значеннями функціонала f на просторі $\Phi_{p:m}$. Але, оскільки теорема Хана-Банаха дозволяє розширити функціонал із збереженням норми, то сума варіацій цих функцій дорівнює нормі функціонала f на $\Phi_{p:m}$.

Отже, правильне твердження.

Теорема 5. Дія $\langle f, \varphi \rangle$ узагальненої функції $f \in S^{/}_{\alpha,a:m}$ на основну функцію $\varphi(\cdot)$ із $S_{\alpha,a:m}$ може бути зображена у вигляді (15) при цьому норма функціонала f (продовженого на нормований простір $\psi_{p:m}$) дорівнює повній варіації функції $\sigma_q(\cdot)$.

Зазначимо, що найменше із можливих p з рівності (15) є порядок функціонала f.

Нехай Φ — один із просторів $S_{\alpha,a:m}$ або $S_{\alpha:m}$. Означимо похідну порядку $q \in \mathbb{Z}^n_+$, $|q|_+ \le m$, узагальненої функції $f \in \Phi^{/}$ рівністю

$$\left\langle \partial^q f, \varphi(x) \right\rangle = (-1)^{|q|_+} \left\langle f, \partial^q \varphi(x) \right\rangle \quad (\forall \varphi(\cdot) \in \Phi).$$

Таким чином, гладкість елементів простору Φ основних функцій визначає гладкість елементів відповідного простору $\Phi^{/}$ узагальнених функцій.

Висновок. Побудовані простори $S_{\alpha,a:m}$ і $S_{\alpha:m}$ та їх відповідні топологічно спряжені простори, є розширенням відомих просторів $S_{\alpha,a}$, S_{α}, $S^{/}_{\alpha,a}$ і $S^{/}_{\alpha}$ Гельфанда І. М. і Шилова Г. Є. Ці простори містять елементи скінченної гладкості, які мають типову поведінку в околі нескінченно віддалених точок, що й елементи зазначених просторів типу S. Вони придатні для дослідження задачі Коші для параболічних систем рівнянь із коефіцієнтами та символами диференціювання обмеженої гладкості.

Список використаних джерел:

1. Гельфанд И. М. Пространства основных и обобщенных функций / И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов. — М. : Физматгиз, 1958. — 307 с.
2. Гельфанд И. М. Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений / И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов. — М. : Физматгиз, 1958. — 274 с.
3. Litovchenko V. A. Caushy problem for a class parabolic systems of Shilov type with variable coefficients / V. A. Litovchenko, I. M. Dovzhytska // Cent. Eur. J. Math. — 2012. — Vol. 10, №3. — P. 1084–1102.
4. Літовченко В. А. Цілковита розв’язність задачі Коші у просторах типу S для рівнянь, параболічних за Петровським / В. А. Літовченко // Укр. матем. журн. — 2002. — Т. 54, № 11. — С. 1467–1479.
5. Літовченко В. А. Коректна розв’язність задачі Коші для одного рівняння інтегрального вигляду / В. А. Літовченко // Укр. матем. журн. — 2004. — Т. 56, № 2. — С. 185–197.
6. Литовченко В. А. Задача Коши для параболических по Шилову уравнений / В. А. Литовченко // Сиб. матем. журн. — 2004. — Т. 45, № 4. — С. 809–821.
7. Івасишен С. Д. Задачі Коші для одного класу вироджених параболічних рівнянь типу Колмогорова з додатним родом / С. Д. Івасишен, В. А. Літовченко // Укр. матем. журн. — 2009. — Т. 61, № 8. — С. 1066–1087.
8. Івасишен С. Д. Задачі Коші для одного класу вироджених параболічних рівнянь типу Колмогорова з недодатним родом / С. Д. Івасишен, В. А. Літовченко // Укр. матем. журн. — 2010. — Т. 62, № 10. — С. 1330–1350.
9. Літовченко В. А. Принцип локалізації розв’язків задачі Коші для одного класу вироджених параболічних рівнянь типу Колмогорова / В. А. Літовченко, О. В. Стрибко // Укр. матем. журн. — 2010. — Т. 62, № 11. — С. 1473–1489.
10. Литовченко В. А. Вырожденные параболические системы уравнений типа Колмогорова векторного порядка / В. А. Литовченко, Е. Б. Настасий // Сиб. матем. журн. — 2012. — Т. 53, № 1. — С. 148–164.
11. Литовченко В. А. Стабилизация решений параболических типа Шилова систем с неотрицательным родом / В. А. Литовченко, И. М. Довжицкая // Сиб. матем. журн. — 2014. — Т. 55, № 2. — С. 341–349.
12. Литовченко В. А. Задача Коши для выродженых параболических систем уравнений типа Колмогорова векторного порядка с обобщенными на-

чальными данными / В. А. Литовченко, Е. Б. Васько // Дифф. уравн. — 2014. — Т. 50, № 12. — С. 1598–1606.
13. Литовченко В. А. Задача Коши для одного класса параболических псевдодифференциальных систем с негладкими символами / В. А. Литовченко // Сиб. матем. журн. — 2008. — Т. 49, № 2. — С. 375–39
14. Litovchenko V. A. Cauchy problem for $\left\{\vec{p},\vec{h}\right\}$ – parabolic equations with time-dependent coefficients / V. A. Litovchenko // Math. Notes. — 2005. — Vol. 77, № 3–4. — P. 364–379.
15. Березанский Ю. М. Функциональный анализ. Курс лекций : учеб. пособие / Ю. М. Березанский, Г. Ф. Ус, З. Г. Шефтель. — К. : Выща шк., 1990. — 600 с.

We have constructed countably-normed spaces of main and generalized functions by expanding spaces of Gelfand I. M. and Shilov G. Ye. Elements of this spaces have limited degree of smoothness. We have investigated completeness of spaces and found the convergence criterion, and the structure of distributions.

Key words: S *-type spaces, generalized functions.*

Отримано:16.03.2017

УДК 517.977.56

К. Б. Мансимов[*,**]**,** д-р физ.-мат. наук, профессор,
Г. Ш. Рамазанова[*]**,** научный сотрудник

[*]Институт Систем Управления НАН Азербайджана, г. Баку, Азербайджан,
[**] Бакинский Государственный Университет, г. Баку, Азербайджан

ЛИНЕАРИЗОВАННОГО ТИПА НЕОБХОДИМОЕ УСЛОВИЕ ОПТИМАЛЬНОСТИ В ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМАХ ТИПА ФОРНАЗИНИ–МАРКЕЗИНИ

Рассматривается одна задача оптимального управления, описываемая системой Форназини–Маркезини. Получено необходимое условие оптимальности в терминах производных по направлениям. Отдельно рассмотрен случай квазидифференцируемого функционала.

Ключевые слова: *дискретная двухпараметрическая система, 2-D дискретная система, необходимое условие оптимальности, условие Липшица, производная по направлению, квазидифференцируемый функционал.*

Введение. Основной результат теории необходимых условий оптимальности, принцип максимума Понтрягина (см. напр. [1–3]), сначала был доказан для задач оптимального управления, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями. Далее он

