УДК 517.5

Т. О. Петрова, канд. фіз.-мат. наук,
І. Л. Петрова, аспірант
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, м. Київ

ПРО ПОТОЧКОВІ ІНТЕРПОЛЯЦІЙНІ ОЦІНКИ ОПУКЛОГО НАБЛИЖЕННЯ ФУНКЦІЙ, ЩО МАЮТЬ ДРОБОВУ ПОХІДНУ ДОВІЛЬНОГО ПОРЯДКУ $r > 4, r \in \mathbb{R}$

Досліджується питання наближення функцій $f \in \mathbb{W}^r \bigcap \Delta^2$, $r > 4$ алгебраїчними поліномами $p_n \in \Pi_n \bigcap \Delta^2$. Побудовано контрприклад, який показує, що для $f \in \mathbb{W}^r \bigcap \Delta^2, r > 4$ оцінка $| f(x) - p_n(x) | \le c \frac{1}{n^2} (\sqrt{x(1-x)})^r, x \in [0,1]$ є невірною.

Ключові слова: *наближення функції, простір Соболєва, алгебраїчний поліном, монотонна функція, опукла функція.*

Вступ. Нехай $W^r, r \in \mathbb{N}$ клас функцій $f \in C[0,1]$, таких, що мають абсолютно неперервну $(r-1)$ похідну і $\left|f^{(r)}(x)\right| \le 1$ майже скрізь на [0,1]. Теляковський [1] для $r = 1$ та Гопенгауз для $r \in \mathbb{N}$ [2] посилили пряму теорему Нікольського–Тіммана довівши, що кожну функцію $f \in W^r$ можна наблизити алгебраїчним многочленом p_n степеня $< n$ так, що

$$| f(x) - p_n(x) | \le c(r) (\frac{\sqrt{x(1-x)}}{n})^r, n > r, \tag{1}$$

де c — абсолютна стала.

DeVore та Yu [3] довели, що при $r = 1, 2$ оцінка (1) справедлива і при наближенні монотонної функції монотонним многочленом. А саме, якщо монотонна функція $f \in W^r$, то існує монотонний многочлен p_n, такий, що має місце (1).

У роботі GLSW [4] доведено, що для натурального $r > 2$ оцінка (1), взагалі кажучи, невірна.

Для опуклого наближення при $r > 2, r \in \mathbb{N}$ доведено [5], що оцінка (1) також є невірною.

Для $r \in \mathbb{R}$ введемо клас функцій $W^r[0,1]$, таких, що $D_{0+}^{r-1} f$ абсолютно неперервна і $\left|D_{0+}^{r} f\right| \le 1$ майже скрізь на [0, 1] (тут $D_{0+}^{r-1} f$ —

лівостороння дробова похідна [7]). Будемо позначати через Π_n — множину всіх алгебраїчних поліномів степеня $\leq n$ і через Δ^2 множину опуклих вниз на $\left[0,1\right]$ функцій.

Основним результатом роботи є теорема, яка узагальнює результат роботи [6] на класи $W^r[0,1]\bigcap\Delta^2$ з $r>4, r\in\mathbb{R}$.

Основні означення та допоміжні твердження. Спочатку нагадаємо основні означення та факти, які використовуються в цій роботі.

Означення. Нехай $\varphi(x)\in L_1(a,b)$. Інтеграли

$$(I_{a+}^{\alpha}\varphi)(x)\overset{def}{=}\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_a^x\frac{\varphi(t)}{(x-t)^{1-\alpha}}dt, x>\alpha, \tag{2}$$

$$(I_{b-}^{\alpha}\varphi)(x)\overset{def}{=}\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_x^b\frac{\varphi(t)}{(x-t)^{1-\alpha}}dt, x<b, \tag{3}$$

де $\alpha>0$ називаються інтегралами дробового порядку α. Перший називають лівостороннім, а другий правостороннім.

Що стосується дробового диференціювання, то його слід ввести, як операцію обернену дробовому інтегруванню [7].

Означення. Для функції $f(x)$, що задана на відрізку $[a, b]$ кожен із виразів

$$(D_{a+}^{\alpha}f)(x)=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dx}\int\limits_a^x\frac{f(t)}{(x-t)^{\alpha}}dt, \tag{4}$$

$$(D_{b-}^{\alpha}f)(x)=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dx}\int\limits_x^b\frac{f(t)}{(x-t)^{\alpha}}dt \tag{5}$$

називається дробовою похідною порядку $\alpha, 0<\alpha<1$ відповідно лівосторонньою та правосторонньою.

Перейдемо до дробових похідних порядків $\alpha\geq 1$

$$\alpha=[\alpha]+\{\alpha\},$$

де $[\alpha]$ — ціла частина числа α і $\{\alpha\}$ — дробова частина числа α.

Якщо α — ціле число, то під дробовою похідною порядка α будемо розуміти звичайне диференціювання:

$$D_{a+}^{\alpha}=(\frac{d}{dx})^{\alpha}, D_{b-}^{\alpha}=(-\frac{d}{dx})^{\alpha}, \alpha=1,2,3... \tag{6}$$

Якщо ж α — не ціле, то правильно ввести за формулами:

$$D_{a+}^{\alpha}f=\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}(\frac{d}{dx})^n\int\limits_a^x\frac{f(t)}{(x-t)^{\alpha-n+1}}dt, n=[\alpha]+1, \tag{7}$$

$$D_{b-}^{\alpha} f = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)} (\frac{d}{dx})^n \int_x^b \frac{f(t)}{(t-x)^{\alpha-n+1}} dt, n = [\alpha]+1. \tag{8}$$

Наступна теорема дає достатні умови для існування дробових похідних будь-якого порядку $\alpha, \alpha > 0$ [7].

Теорема. Нехай $\alpha > 0$ та функція $f(x)$ має абсолютно неперервну похідну порядку $n, n = [\alpha]+1$. Тоді $D_{a+}^{\alpha} f$ існує майже скрізь і може бути представлена у вигляді

$$D_{a+}^{\alpha} f = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(1+k-\alpha)} (x-a)^{k-\alpha} + \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x \frac{f^{(n)}(t)}{(x-t)^{\alpha-n+1}} dt. \tag{9}$$

Нехай $f \in W^r[0,1]$. Гопенгауз довів [2], що для апроксимації без обмежень для всіх $r \in \mathbb{N}$ знайдеться $p_n \in \Pi_n$ такий, що оцінка

$$\left| f(x) - p_n(x) \right| \le c \cdot \frac{1}{n^2} (\sqrt{x(1-x)})^r, x \in [0,1] \tag{10}$$

є вірною.

Для монотонного наближення при $r > 2, r \in \mathbb{N}$, доведено, що оцінка (10) є невірною [4]. В роботі [8] побудовано контрприклад, який показує, що результат не може бути поширеним і на клас $W^r[0,1]$ з $r \in (2,3)$.

Для опуклого наближення при $r > 2, r \in \mathbb{N}$ доведено, що оцінка (10) також є невірною [5]. В роботі [6] побудовано контрприклад, який показує, що результат не може бути поширеним на клас $W^r[0,1]$ при $r \in (2,3)$.

Основним результатом цієї роботи є теорема, яка узагальнює результат роботи [6] на класи $W^r[0,1]$ при $r > 4, r \in \mathbb{R}$.

Основний результат.

Теорема. Нехай $r > 4, r \in R$. Тоді $\forall n \in N$ $\exists F = F_{r,n} \in$ $\in W^r[0,1] \bigcap \Delta^2$, така, що $\forall p_n \in \Pi_n \bigcap \Delta^2$ або

$$\limsup_{x \to 0} \frac{\left| F(x) - p_n(x) \right|}{\varphi^r(x)} = +\infty \tag{11}$$

або

$$\limsup_{x \to 1} \frac{\left| F(x) - p_n(x) \right|}{\varphi^r(x)} = +\infty, \varphi(x) = \sqrt{x(1-x)}. \tag{12}$$

Доведення.

Позначимо $m=[r]+1, r>4,$ де $[r]$ — ціла частина r.

Покладемо:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{b^{m-1}}{(m-1)!}x+\dfrac{(b-x)^m}{m!}-\dfrac{b^m}{m!}, 0\le x\le b\\ \dfrac{b^{m-1}}{(m-1)!}x-\dfrac{b^m}{m!}, b<x\le 1\end{cases}, \text{ де } b=\frac{1}{n^4}.$$

Розглянемо функцію $F(x)=x^{m-2}f(x)$.

Доведемо, що $F\in W^r[0,1]$. За теоремою 2.3 [7] маємо

$$D_{0+}^r F(x)=\sum_{k=0}^{m-1}\frac{F^{(k)}(0)}{\Gamma(1+k-r)}x^{k-r}+\frac{1}{\Gamma(m-r)}\int_0^x\frac{F^{(m)}(t)}{(x-t)^{r-m+1}}dt.$$

Так як $F^{(k)}(0)=0\forall k=0,...,m-1,$ то

$$D_{0+}^r F(x)=\frac{1}{\Gamma(m-r)}\int_0^x\frac{\sum\limits_{k=0}^{m-2}C_m^k(m-2)(m-3)...(m-k-1)t^{m-2-k}f^{(m-k)}(t)}{(x-t)^{r-m+1}}dt.$$

Таким чином, якщо $x\ne b$, то

$$D_{0+}^r F(x)=\frac{1}{\Gamma(m-r)}\int_0^x\frac{\sum\limits_{k=0}^{m-2}C_m^k(m-2)(m-3)...(m-k-1)t^{m-2-k}(-1)^{m-k}\dfrac{(b-t)^k}{k!}}{(x-t)^{r-m+1}}dt=$$

$$=\frac{1}{\Gamma(m-r)}\sum_{k=0}^{m-2}C_m^k(m-2)(m-3)...(m-k-1)\int_0^x\frac{(-1)^{m-k}t^{m-2-k}(b-t)^k}{k!(x-t)^{r-m+1}}dt.$$

Тоді

$$|D_{0+}^r F(x)|\le\frac{1}{\Gamma(m-r)}\sum_{k=0}^{m-2}\frac{C_m^k(m-2)(m-3)...(m-k-1)}{k!}\cdot\int_0^x\frac{dt}{(x-t)^{r-m+1}}=$$

$$=\frac{1}{\Gamma(m-r)}\sum_{k=0}^{m-2}\frac{C_m^k(m-2)(m-3)...(m-k-1)}{k!}\frac{x^{m-r}}{m-r}\le$$

$$\le\frac{x^{m-r}}{\Gamma(m-r)}\sum_{k=0}^{m-2}\frac{C_m^k(m-2)(m-3)...(m-k-1)}{k!}=$$

$$=\frac{x^{m-r}}{\Gamma(m-r)}\sum_{k=0}^{m-2}\frac{m!(m-2)!}{(k!)^2((m-k+2)!)^2}\le\frac{1}{\Gamma(m-r)}\sum_{k=0}^{m-2}\frac{m!(m-2)!}{(k!)^2((m-k+2)!)^2}.$$

Помітимо, що $D_{0+}^r(b+)=0$ і

$$D_{0+}^{r}(b-)\le\frac{b^{m-r}}{\Gamma(m-r)}\sum_{k=0}^{m-2}\frac{m!(m-2)!}{(k!)^2((m-k+2)!)^2}\le\frac{1}{\Gamma(m-r)}\sum_{k=0}^{m-2}\frac{m!(m-2)!}{(k!)^2((m-k+2)!)^2}\,.$$

Таким чином $D_{0+}^{r}F(x)$ існує майже скрізь на $[0,1]$ і обмежена. Очевидно, що $D_{0+}^{r-1}F(x)=\frac{1}{\Gamma(m-r)}\int\limits_0^x\frac{F^{(m-1)}(t)}{(x-t)^{r-m+1}}dt$ є абсолютно неперервною на $[0,1]$. Таким чином, $F\in\mathbb{W}^r[0,1]$. Так як $F''(x)\ge 0\,\forall x\in[0,1]$, то $F\in\mathbb{W}^r[0,1]\bigcap\Delta^2$.

Нехай існує многочлен $h_n(x)$, степеня $\le n$ який є опуклим вниз і для якого не виконується умова (11) з функцією $F(x)$. Тоді з деякою сталою A маємо: $|F(x)-h_n(x)|\le Ax^{\frac{r}{2}},0\le x\le b$ і $h_n(0)=F(0)=$ $=0,h_n'(0)=F'(0)=0,h_n''(0)=F''(0)=0.$ Так як $h''(x)\ge 0,\ \forall x\in[0,1],$ то $h'(x)$ зростає і так як $h'(0)=0,$ то $\forall x\in[0,1]:h'(x)\ge 0$. Тоді многочлен $h_n(x)$ зростає на $[0,1]$ і $\forall x\in[0,1]:h_n(x)\ge 0.$

Розглянемо многочлен

$$\tilde{h}_n(x)=h_n(x)-\frac{b^{m-2}}{2!(m-2)!}x^2,x\in[0,1]$$

$$\tilde{h}_n''(x)=h_n''(x)-\frac{b^{m-2}}{(m-2)!}$$

$$\tilde{h}_n''(0)=h_n''(0)-\frac{b^{m-2}}{(m-2)!}=-\frac{b^{m-2}}{(m-2)!}$$

За нерівністю Маркова маємо:

$$|\tilde{h}_n''(0)|=\frac{b^{m-2}}{(m-2)!}\le 4n^2(n-1)^2\,\|\tilde{h}_n\|\le 4n^2(n-1)^2\,\|h_n\|=4n^2(n-1)^2h_n(1)$$

звідки $h_n(1)\ge\frac{b^{m-2}}{(m-2)!4n^2(n-1)^2}$. Маємо

$$f(1)=\frac{b^{m-1}}{(m-1)!}-\frac{b^m}{m!}=\frac{b^{m-1}}{(m-1)!}(1-\frac{b}{m})=$$

$$=\frac{b^{m-2}}{(m-2)!4n^2(n-1)^2}\frac{b\cdot 4n^2(n-1)^2}{m-1}(1-\frac{b}{m})<$$

$$<\frac{b^{m-2}}{(m-2)!4n^2(n-1)^2}\frac{4}{m-1}\le\frac{b^{m-2}}{(m-2)!4n^2(n-1)^2}.$$

Таким чином, $f(1) \neq h_n(1)$. Так як $F(1) = f(1)$, то $F(1) \neq h_n(1)$. Теорема доведена.

Висновки. В роботі було побудовано контрприклад, який показує, що оцінка (1) не може бути поширена на клас функцій $f \in W^r[0,1] \bigcap \Delta^2, r > 4, r \in \mathbb{R}$.

Список використаних джерел:

1. Теляковський С. А. Две теоремы о приближении функций алгебраическими полиномами / С. А. Теляковський // Мат. сб. — 1966. — Вып. 79. — С. 252–265.
2. Gopengauz A. I. Pointwise estimates of Hermitian interpolation / A. I. Gopengauz. — 1994. — Vol. 77.
3. DeVore R. A. Pointwise estimates for monotone polynomial approximation / R.A. DeVore, X. M. Yu // Constr. Approx. — 1985. — Vol. 1. — P. 323–331.
4. Gonska H. H. Interpolatory pointwise estimates for polynomial approximations / H. H. Gonska, D. Leviatan, I. A. Shevchuk, H. -J. Wenz // Constr. Approx. — 2000. — Vol. 16. — P. 603–629.
5. Петрова Т. О. Контрприклад у інтерполяційному опуклому наближенні / Т. О. Петрова // Праці Інституту математики НАН України «Математика та її застосування. Теорія наближення функцій» — 2005. — Вип. 35. — С. 107–112.
6. Петрова Т. О. Один контрприклад для наближення функцій, що мають дробову похідну / Т. О. Петрова // Вісник Київського університету. Фізико-математичні науки. — 2006. — Вип. 4. — С. 113–118.
7. Samko S. G. Fractional integrals and derivatives: theory and applications / S. G. Samko, A. A. Kilbas, O. I. Marichev. — 1987.
8. Петрова Т. О. Про поточкові інтерполяційні оцінки монотонного наближення функцій, що мають дробову похідну / Т. О. Петрова // Вісник Київськогоу ніверситету. Математика. Механіка. — 2003. — Вип. 9–10. — С. 125–127.

In this paper the question of approximation of function $f \in \mathbb{W}^r \bigcap \Delta^2, r > 4$ by algebraic polynomial $p_n \in \Pi_n \bigcap \Delta^2$ is consider. It is proved, that for $f \in \mathbb{W}^r \bigcap \Delta^2, r > 4$, estimate $|f(x) - p_n(x)| \leq$ $\leq c\frac{1}{n^2}(\sqrt{x(1-x)})^r, x \in [0,1]$ is not true, generally speaking.

Key words: *approximation of function, Sobolev space, algebraic polynomial, monotone function, convex function.*

Отримано: 07.09.2017