УДК 539.3

Р. С. Мусій, д-р фіз.-мат. наук, професор,
Х. Т. Дрогомирецька, канд. фіз.-мат. наук,
Б. Й. Бандирський, канд. фіз.-мат. наук,
О. В. Веселовська, канд. фіз.-мат. наук,
О. Г. Орищин, канд. фіз.-мат. наук

Національний університет «Львівська політехніка», м. Львів

ЗВ’ЯЗАНА ДИНАМІЧНА ЗАДАЧА ТЕРМОПРУЖНОСТІ ДЛЯ ДОВГОГО ПОРОЖНИСТОГО ЦИЛІНДРА ЗА НЕСТАЦІОНАРНИХ ТЕПЛОВОЇ ТА СИЛОВОЇ ДІЙ

Сформульовано плоску осесиметричну зв’язану динамічну задачу термопружності для довгого порожнистого циліндра. Фізико-механічні характеристики матеріалу даного циліндра приймаються сталими. Для визначення термопружного стану циліндра за визначальні функції вибрано температуру і радіальну компоненту вектора переміщень. Для знаходження розв’язку взаємозв’язаної системи двох рівнянь, що описують плоску осесиметричну зв’язану динамічну задачу термопружності для циліндра, запропоновано методику побудови її наближеного розв’язку. Методика полягає у використанні апроксимації розподілів температури і радіальних переміщень за радіальною змінною кубічними поліномами. Коефіцієнти цих поліномів подаються лінійною комбінацією інтегральних за радіальною змінною характеристик визначальних функцій та функцій, що описують граничні значення визначальних функцій на внутрішній і зовнішній поверхнях циліндра. В результаті вихідна початково-крайова задача термопружності на визначальні функції зведена до задачі Коші за часовою змінною на їх інтегральні характеристики. Загальні розв’язки задачі Коші знайдено з використанням інтегрального перетворення Лапласа і отримано у вигляді згорток функцій, що описують нестаціонарні об’ємні джерела тепла і об’ємні сили та функцій, що відповідають загальним розв’язкам відповідних однорідних рівнянь вихідної системи взаємопов’язаних рівнянь на всьому числовому інтервалі зміни нестаціонарних теплових і силових дій. Записані вирази інтегральних характеристик дають змогу знайти їх вирази за конкретних характерних типів нестаціонарних об’ємних джерел тепла і об’ємних сил, що відповідають фізичним процесам, які впливають на термопружний стан циліндра. Зокрема такими процесами можуть бути теплові удари, лазерне випромінювання видимого та інфрачастотного діапазонів, електромагнітне випромінювання радіочастотного діапазону, електромагнітні імпульсні поля різних типів. На основі запропонованої методики отримано також алгебраїчне рівняння шостого степеня для визначення перших двох власних частот коливань радіальних переміщень за врахування процесу термопружного розсіювання енергії у даному циліндрі.

Ключові слова: *зв'язана динамічна задача термопружності, довгий порожнистий циліндр, нестаціонарні теплові і силові дії, апроксимація, кубічні поліноми, радіальна змінна.*

Вступ. Порожнисті циліндри часто використовують як елементи конструкцій сучасних приладів і пристроїв. У процесі роботи і експлуатації пристроїв порожнисті циліндри зазнають нестаціонарних теплових і силових дій, які створюють в них взаємопов'язані поля температури і деформацій. Внаслідок цього відбувається процес термопружного розсіювання енергії, який необхідно враховувати при проектуванні циліндричних елементів конструкцій і прогнозуванні їх роботоздатності. Тому є актуальною побудова загального розв'язку зв'язаної задачі термопружності для порожнистого циліндра за однорідних нестаціонарних теплових і силових дій. На основі отриманого загального розв'язку можна аналізувати термомеханічну поведінку порожнистого циліндра, яким моделюють трубчаті елементи конструкцій, за конкретних типів нестаціонарних теплових і силових дій.

В літературі [1, с. 46–84; 2, с. 173–197] відомі розв'язки зв'язаних задач термопружності для циліндрів за дії теплового удару та за врахування скінченної швидкості поширення тепла. Ці розв'язки знайдені з допомогою інтегрального перетворення Лапласа. Обернення трансформант кінцевих розв'язків є складним, а самі розв'язки подаються виразами, що містять функціональні ряди зі спеціальними функціями. Такі розв'язки досить складні для числового аналізу і не завжди придатні для практичного використання, особливо в інженерних розрахунках.

У даній роботі з використанням апроксимації розподілів температури і переміщень по радіальній змінній кубічними поліномами [3, с. 109–121] отримано в замкнутій формі загальний розв'язок зв'язаної динамічної задачі термопружності для порожнистого циліндра на всьому часовому проміжку нестаціонарних теплової і силової дій.

Математична постановка задачі. Розглядається довгий порожнистий циліндр, віднесений до циліндричної системи координат (r, φ, z), вісь Oz якої співпадає з віссю симетрії циліндра. Матеріал циліндра однорідний та ізотропний, а його фізико-механічні характеристики є сталими. Циліндр знаходиться за умов теплоізоляції його внутрішньої $r = r_0$ і зовнішньої $r = r_1$ поверхонь, які теплоізольовані і вільні від силового поверхневого навантаження.

Термонапружений стан циліндра визначається об'ємно розподіленими нестаціонарними джерелами тепла Q і об'ємними силами $\vec{F}$. Ці два фізичні чинники зумовлюють нестаціонарні температурне поле T і радіальну компоненту $U_r\left(r,t\right)$ вектора переміщень $\vec{U}=\left\{U_r\left(r,t\right);0;0\right\}$ та відповідні компоненти $\sigma_{jj}\,(j=r,\varphi,z)$ тензора напружень $\hat{\sigma}$.

За вказаних умов температуру $T\left(r,t\right)$ і радіальну компоненту $U_r\left(r,t\right)$ вектора переміщень визначаємо із системи рівнянь плоскої осесиметричної зв’язаної динамічної задачі термопружності для циліндра

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r}-\frac{1+\varepsilon_*}{\kappa}\frac{\partial T}{\partial t}-\varepsilon_*\frac{1+2\nu}{\kappa\alpha E}\cdot\frac{\partial^2 U_r}{\partial t\,\partial r}=-\frac{1}{\lambda}Q\ , \tag{1}$$

$$\frac{\partial^2 U_r}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial U_r}{\partial r}-\frac{U_r}{r^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 U_r}{\partial t^2}=\alpha\frac{1+\nu}{1-\nu}\frac{\partial T}{\partial r}-\frac{\left(1+\nu\right)\left(1-2\nu\right)}{E\left(1-\nu\right)}F_r\,.$$

Тут κ, λ, ν, α — коефіцієнти температуро- і теплопровідності, Пуассона, лінійного теплового розширення, E — модуль Юнга, ρ — густина матеріалу циліндра; $c=\sqrt{E\left(1-\nu\right)/\left(\rho\left(1+\nu\right)\left(1-2\nu\right)\right)}$ — швидкість пружної хвилі розширення;. ε_* — параметр, що характеризує зв’язаність полів деформації та температури.

Систему (1) розв’язуємо за граничних умов

$$\frac{\partial T\left(r_0,t\right)}{\partial r}=0,\quad \frac{\partial T\left(r_1,t\right)}{\partial r}=0\,, \tag{2}$$

теплоізоляції поверхонь $r=r_0$ і $r=r_1$ та умов

$$\frac{\partial U_r\left(r_0,t\right)}{\partial r}+\frac{\nu}{1-\nu}\frac{U_r\left(r_0,t\right)}{r_0}=\alpha\frac{1+\nu}{1-\nu}T\left(r_0,t\right),$$
$$\frac{\partial U_r\left(r_1,t\right)}{\partial r}+\frac{\nu}{1-\nu}\frac{U_r\left(r_1,t\right)}{r_1}=\alpha\frac{1+\nu}{1-\nu}T\left(r_1,t\right) \tag{3}$$

відсутності силового навантаження на цих поверхнях, а також нульових початкових умов

$$T\left(r,0\right)=0\,,\ U_r\left(r,0\right)=0\,,\ \frac{\partial U_r\left(r,0\right)}{\partial r}=0\,. \tag{4}$$

За знайденими із системи рівнянь і співвідношень (1)–(4) функціями $T(r,t), U_r\left(r,t\right)$ радіальну σ_{rr}, колову $\sigma_{\varphi\varphi}$ та осьову σ_{zz} компоненти тензора напружень знаходимо за формулами

$$\sigma_{rr}=\frac{2E}{1-2\nu}\left[\left(1-\nu\right)\frac{\partial U_r}{\partial r}+\nu\frac{U_r}{r}-\alpha\left(1+\nu\right)T\right],$$

$$\sigma_{\varphi\varphi}=\frac{2E_n}{1-2\nu}\left[\left(1-\nu\right)\frac{U_r}{r}+\nu\frac{\partial U_r}{\partial r}-\alpha\left(1+\nu\right)T\right],$$

$$\sigma_{zz} = \nu\left(\sigma_{rr} + \sigma_{\varphi\varphi}\right) - \alpha E(1+\nu)T . \qquad (5)$$

Методика розв'язування задачі. Для побудови розв’язків сформульованої зв’язаної задачі термопружності (1)–(4) використовуємо апроксимацію визначальних функцій $\Phi\left(r,t\right) = \left\{ T(r,t), U_r(r,t)\right\}$ за радіальною змінною r кубічними поліномами [3, с. 109–121]:

$$T\left(r,t\right) = \sum_{i=0}^{3} b_i\left(t\right) r^i \ , \ U_r\left(r,t\right) = \sum_{i=0}^{3} c_i\left(t\right) r^i \ . \qquad (6)$$

Коефіцієнти $b_i(t)$, $c_i(t)$ апроксимаційних поліномів (6) подаємо у вигляді лінійних комбінацій

$$b_i\left(t\right) = b_{i1}T_1\left(t\right) + b_{i2}T_2\left(t\right), \qquad (7)$$

$$c_i\left(t\right) = c_{i1}\left(t\right)U_{r1}\left(t\right) + c_{i2}\left(t\right)U_{r2}\left(t\right) + c_{i3}\left(t\right)T\left(r_0,t\right) + c_{i4}\left(t\right)T\left(r_1,t\right) \qquad (8)$$

та інтегральних характеристик:

$$T_s\left(t\right) = \int_{r_0}^{r_1} T(r,t)\, r^{s+1} dr \ , \ U_{rs}\left(t\right) = \int_{r_0}^{r_1} U_r(r,t)\, r^{s+1} dr \ , \ s = 1,2 \ , \qquad (9)$$

температури $T\left(r,t\right)$ і радіальної компоненти $U_r\left(r,t\right)$ вектора $\vec{U}$ та функцій $T\left(r_0,t\right)$ і $T\left(r_1,t\right)$, що описують граничні значення температури на поверхнях $r = r_0$ і $r = r_1$ циліндра.

Підставляючи подання (6) з врахуванням (7) і (8) у вихідну систему рівнянь (1) після перетворень отримуємо її вигляд у наближенні визначальних функцій $T\left(r,t\right)$ і $U_r\left(r,t\right)$ кубічними поліномами (6).

$$T_1(t)\sum_{i=2}^{3} i^2 r^{i-2} b_{i1} + T_2(t)\sum_{i=2}^{3} b_{i2} i^2 r^{i-2} - \frac{d\,T_1(t)}{dt}\left\{\beta_1 \sum_{i=0}^{3} b_{i1} r^i + \right.$$

$$\left. + \beta_2 \sum_{m=1}^{3} m r^{m-1}\left[c_{m3} \sum_{i=0}^{3} b_{i1} r_0^i + c_{m4} \sum_{i=0}^{3} b_{i1} r_1^i + \right]\right\} -$$

$$- \frac{d\,T_2(t)}{dt}\left\{\beta_1 \sum_{i=0}^{3} b_{i2} r^i + \beta_2 \sum_{m=1}^{3} m r^{m-1}\left[c_{m3} \sum_{i=0}^{3} b_{i2} r_0^i + c_{m4} \sum_{i=0}^{3} b_{i2} r_1^i \right]\right\} -$$

$$- \frac{d\,u_{r1}}{dt}\beta_2 \sum_{m=1}^{3} c_{m1}\, m\, r^{m-1} - \frac{d\,u_{r2}}{dt}\beta_2 \sum_{m=1}^{3} c_{m2}\, m\, r^{m-1} = -\frac{1}{\lambda} Q,$$

$$T_1(t)\left\{ \sum_{m=2}^{3} (m^2-1) r^{m-2}\left[c_{m3} \sum_{i=0}^{3} b_{i1} r_0^i + c_{m4} \sum_{i=0}^{3} b_{i1} r_1^i \right] - \beta_3 \sum_{i=1}^{3} i\, r^{i-1} b_{i1} \right\} +$$

$$+ T_2(t)\left\{ \sum_{m=2}^{3} (m^2-1) r^{m-2}\left[c_{m3} \sum_{i=0}^{3} b_{i2} r_0^i + c_{m4} \sum_{i=0}^{3} b_{i2} r_1^i \right] - \beta_3 \sum_{i=1}^{3} i\, r^{i-1} b_{i2} \right\} -$$

$$-\frac{1}{c^2}\frac{d^2T_1(t)}{dt^2}\sum_{m=0}^{3} r^m\left[c_{m3}\sum_{i=0}^{3} b_{i1}r_0^i + c_{m4}\sum_{i=0}^{3} b_{i1}r_1^i\right] - \frac{1}{c^2}\frac{d^2T_2(t)}{dt^2}\times$$

$$\times\sum_{m=0}^{3} r^m\left[c_{m3}\sum_{i=0}^{3} b_{i2}r_0^i + c_{m4}\sum_{i=0}^{3} b_{i2}r_1^i\right] + u_{r1}(t)\sum_{m=2}^{3}(m^2-1)c_{m1}r^{m-2} +$$

$$+u_{r2}(t)\sum_{m=2}^{3}(m^2-1)c_{m2}r^{m-2} - \frac{1}{c^2}\frac{d^2u_{r1}}{dt^2}\sum_{m=0}^{3} c_{m1}\, m\, r^m -$$

$$-\frac{1}{c^2}\frac{d^2u_{r2}}{dt^2}\sum_{m=0}^{3} c_{m2}\, m\, r^m = -\beta_4 F_r(r,t) \qquad (10)$$

Тут: $\beta_1 = \dfrac{1+\varepsilon_*}{\kappa}$, $\beta_2 = \varepsilon_*\dfrac{1+2\nu}{\kappa\alpha E}$, $\beta_3 = \alpha\dfrac{1+\nu}{1-\nu}$, $\beta_4 = \dfrac{(1+\nu)(1-2\nu)}{(1-\nu)E}$.

Інтегруємо систему рівнянь (10) відповідно до подань (9). Після перетворень для визначення інтегральних характеристик $T_s(t)$ і $U_{rs}(t)$ ($s=1,2$) температури $T(r,t)$ та радіальних переміщень $U_r(r,t)$ отримуємо наступну систему чотирьох взаємозв'язаних рівнянь.

$$d_1T_1 + d_2T_2 - d_3\frac{dT_1}{dt} - d_4\frac{dT_2}{dt} - d_5\frac{du_{r1}}{dt} - d_6\frac{du_{r2}}{dt} = -Q_1(t)$$

$$d_7T_1 + d_8T_2 - d_9\frac{dT_1}{dt} - d_{10}\frac{dT_2}{dt} - d_{11}\frac{du_{r1}}{dt} - d_{12}\frac{du_{r2}}{dt} = -Q_2(t)$$

$$d_{13}T_1 + d_{14}T_2 - \frac{1}{c^2}d_{15}\frac{d^2T_1}{dt^2}{}_4 - \frac{1}{c^2}d_{16}\frac{d^2T_2}{dt^2} +$$

$$+d_{17}u_{r1} + d_{18}u_{r2} - \frac{1}{c^2}d_{19}\frac{d^2u_{r1}}{dt^2} - \frac{1}{c^2}d_{20}\frac{d^2u_{r2}}{dt^2} = -\beta_4\int_{r_0}^{r_1} F_r(r,t)r^2dr$$

$$d_{21}T_1 + d_{22}T_2 - \frac{1}{c^2}d_{23}\frac{d^2T_1}{dt^2}{}_4 - \frac{1}{c^2}d_{24}\frac{d^2T_2}{dt^2} + d_{25}u_{r1} +$$

$$+d_{26}u_{r2} - \frac{1}{c^2}d_{27}\frac{d^2u_{r1}}{dt^2} - \frac{1}{c^2}d_{28}\frac{d^2u_{r2}}{dt^2} = -\beta_4\int_{r_0}^{r_1} F_r(r,t)r^3dr. \qquad (11)$$

Тут коефіцієнти $d_1 \div d_{28}$ мають вигляд

$$d_1 = \sum_{i=2}^{3}\frac{i^2}{i+1}\left(r_1^{i+1} - r_0^{i+1}\right)b_{i1}, \quad d_2 = \sum_{i=2}^{3}\frac{i^2}{i+1}\left(r_1^{i+1} - r_0^{i+1}\right)b_{i2}$$

$$d_3 = \beta_1\sum_{i=0}^{3} b_{i1}\frac{r_1^{i+3} - r_0^{i+3}}{i+3} + \beta_2\sum_{m=1}^{3}\frac{m}{m+2}\left(r_1^{m+2} - r_0^{m+2}\right)\left[c_{m3}\sum_{i=0}^{3} b_{i1}\, r_0^i + c_{m4}\sum_{i=0}^{3} b_{i1}\, r_1^i\right],$$

$$d_4 = \beta_1 \sum_{i=0}^{3} b_{i2} \frac{r_1^{i+3} - r_0^{i+3}}{i+3} + \beta_2 \sum_{m=1}^{3} \frac{m}{m+2} \left(r_1^{m+2} - r_0^{m+2} \right) \left[c_{m3} \sum_{i=0}^{3} b_{i2} r_0^i + c_{m4} \sum_{i=0}^{3} b_{i2} r_1^i \right],$$

$$d_5 = \beta_2 \sum_{m=1}^{3} c_{m1} \frac{m}{m+2} \left(r_1^{m+2} - r_0^{m+2} \right), \; d_6 = \beta_2 \sum_{m=1}^{3} c_{m2} \frac{m}{m+2} \left(r_1^{m+2} - r_0^{m+2} \right)$$

$$d_7 = \sum_{i=2}^{3} \frac{i^2}{i+2} \left(r_1^{i+2} - r_0^{i+2} \right) b_{i1} , \; d_8 = \sum_{i=2}^{3} \frac{i^2}{i+2} \left(r_1^{i+2} - r_0^{i+2} \right) b_{i2}$$

$$d_9 = \beta_1 \sum_{i=0}^{3} b_{i1} \frac{r_1^{i+4} - r_0^{i+4}}{i+4} + \beta_2 \sum_{m=1}^{3} \frac{m}{m+3} \left(r_1^{m+3} - r_0^{m+3} \right) \left[c_{m3} \sum_{i=0}^{3} b_{i1} r_0^i + c_{m4} \sum_{i=0}^{3} b_{i1} r_1^i \right],$$

$$d_{10} = \beta_1 \sum_{i=0}^{3} b_{i2} \frac{r_1^{i+4} - r_0^{i+4}}{i+4} + \beta_2 \sum_{m=1}^{3} \frac{m}{m+3} \left(r_1^{m+3} - r_0^{m+3} \right) \left[c_{m3} \sum_{i=0}^{3} b_{i2} r_0^i + c_{m4} \sum_{i=0}^{3} b_{i2} r_1^i \right],$$

$$d_{11} = \beta_2 \sum_{m=1}^{3} c_{m1} \frac{m}{m+3} \left(r_1^{m+3} - r_0^{m+3} \right),$$

$$d_{12} = \beta_2 \sum_{m=1}^{3} c_{m2} \frac{m}{m+3} \left(r_1^{m+3} - r_0^{m+3} \right),$$

$$d_{13} = \sum_{m=2}^{3} \frac{m^2 - 1}{m+1} \left(r_1^{m+1} - r_0^{m+1} \right) \left[c_{m3} \sum_{i=0}^{3} b_{i1} r_0^i + c_{m4} \sum_{i=0}^{3} b_{i1} r_1^i \right] -$$

$$-\beta_3 \sum_{i=1}^{3} \frac{i}{i+2} \left(r_1^{i+2} - r_0^{i+2} \right) b_{i1} ,$$

$$d_{14} = \sum_{m=2}^{3} (m-1) \left(r_1^{m+1} - r_0^{m+1} \right) \left[c_{m3} \sum_{i=0}^{3} b_{i2} r_0^i + c_{m4} \sum_{i=0}^{3} b_{i2} r_1^i + \right] -$$

$$-\beta_3 \sum_{i=1}^{3} \frac{i}{i+2} \left(r_1^{i+2} - r_0^{i+2} \right) b_{i2}$$

$$d_{15} = \sum_{m=0}^{3} \frac{r_1^{m+3} - r_0^{m+3}}{m+3} \left[c_{m3} \sum_{i=0}^{3} b_{i1} r_0^i + c_{m4} \sum_{i=0}^{3} b_{i1} r_1^i \right]$$

$$d_{16} = \sum_{m=0}^{3} \frac{r_1^{m+3} - r_0^{m+3}}{m+3} \left[c_{m3} \sum_{i=0}^{3} b_{i2} r_0^i + c_{m4} \sum_{i=0}^{3} b_{i2} r_1^i \right]$$

$$d_{17} = \sum_{m=2}^{3} (m-1) c_{m1} \left(r_1^{m+1} - r_0^{m+1} \right), \; d_{18} = \sum_{m=2}^{3} (m-1) c_{m2} \left(r_1^{m+1} - r_0^{m+1} \right),$$

$$d_{19} = \sum_{m=0}^{3} c_{m1} \frac{r_1^{m+3} - r_0^{m+3}}{m+3} , \; d_{20} = \sum_{m=0}^{3} c_{m2} \frac{r_1^{m+3} - r_0^{m+3}}{m+3}$$

$$d_{21}=\sum_{m=2}^{3}\frac{m^2-1}{m+2}\left(r_1^{m+2}-r_0^{m+2}\right)\left[c_{m3}\sum_{i=0}^{3}b_{i1}\,r_0^i+c_{m4}\sum_{i=0}^{3}b_{i1}\,r_1^i\right]-$$

$$-\beta_3\sum_{i=1}^{3}\frac{i}{i+3}\left(r_1^{i+3}-r_0^{i+3}\right)b_{i1}\,,$$

$$d_{22}=\sum_{m=2}^{3}\frac{m^2-1}{m+2}\left(r_1^{m+2}-r_0^{m+2}\right)\left[c_{m3}\sum_{i=0}^{3}b_{i2}\,r_0^i+c_{m4}\sum_{i=0}^{3}b_{i2}\,r_1^i\right]-$$

$$-\beta_3\sum_{i=1}^{3}\frac{i}{i+3}\left(r_1^{i+3}-r_0^{i+3}\right)b_{i2}\,,$$

$$d_{23}=\sum_{m=0}^{3}\frac{r_1^{m+4}-r_0^{m+4}}{m+4}\left[c_{m3}\sum_{i=0}^{3}b_{i1}\,r_0^i+c_{m4}\sum_{i=0}^{3}b_{i1}\,r_1^i\right],$$

$$d_{24}=\sum_{m=0}^{3}\frac{r_1^{m+4}-r_0^{m+4}}{m+4}\left[c_{m3}\sum_{i=0}^{3}b_{i2}\,r_0^i+c_{m4}\sum_{i=0}^{3}b_{i2}\,r_1^i\right],$$

$$d_{25}=\sum_{m=2}^{3}\frac{m^2-1}{m+2}c_{m1}\left(r_1^{m+2}-r_0^{m+2}\right),\;d_{26}=\sum_{m=2}^{3}\frac{m^2-1}{m+2}c_{m2}\left(r_1^{m+2}-r_0^{m+2}\right),$$

$$d_{27}=d_{19}\,,\;d_{28}=d_{20}\,.$$

Для знаходження розв'язку системи рівнянь (11) застосуємо інтегральне перетворення Лапласа за часовою змінною t з використанням нульових початкових умов на функції $T_s(t)$ і $U_{rs}(t)$ ($s=1,2$) (отриманих інтегруванням згідно (9) початкових умов (4). В трансформантах Лапласа $\tilde{T}(p)$ і $\tilde{U}_{rs}(p)$ будемо мати систему чотирьох алгебраїчних рівнянь

$$\left(d_1-pd_3\right)\tilde{T}_1+\left(d_2-pd_4\right)\tilde{T}_2-pd_5\tilde{u}_{r1}-pd_6\tilde{u}_{r2}=-\tilde{Q}_1\,,$$

$$\left(d_7-pd_9\right)\tilde{T}_1+\left(d_8-pd_{10}\right)\tilde{T}_2-pd_{11}\tilde{u}_{r1}-pd_{12}\tilde{u}_{r2}=-\tilde{Q}_2\,,$$

$$\left(d_{13}-d_{15}\frac{1}{c^2}p^2\right)\tilde{T}_1+\left(d_{14}-d_{16}\frac{1}{c^2}p^2\right)\tilde{T}_2+\left(d_{17}-d_{19}\frac{1}{c^2}p^2\right)\tilde{u}_{r1}+$$

$$+\left(d_{18}-d_{20}\frac{1}{c^2}p^2\right)\tilde{u}_{r2}=-\beta_4\int_{r_0}^{r_1}\tilde{F}_r(r,p)r^2dr\,,$$

$$\left(d_{21}-d_{23}\frac{1}{c^2}p^2\right)\tilde{T}_1+\left(d_{22}-d_{24}\frac{1}{c^2}p^2\right)\tilde{T}_2+\left(d_{25}-d_{27}\frac{1}{c^2}p^2\right)\tilde{u}_{r1}+$$

$$\left(d_{26}-d_{28}\frac{1}{c^2}p^2\right)\tilde{u}_{r2}=-\beta_4\int_{r_0}^{r_1}\tilde{F}_r(r,t)r^3dr\,. \tag{12}$$

Систему рівнянь (12) розв'язуємо методом Крамера. За знайденими трансформантами Лапласа $\tilde{T}(p)$ і $\tilde{U}_{rs}(p)$, застосовуючи другу теорему розкладу і теорему про згортку функцій отримаємо оригінали функцій $T_s\left(t\right)$ і $U_{rs}\left(t\right)$ ($s=1,2$) у вигляді

$$T_1(t)=\sum_{k=1}^{6}\int_0^t\left[-Q_1(\tau)A_1(p_k)+Q_2(\tau)A_2(p_k)-\right.$$
$$\left.-\beta_4F_{r1}(\tau)A_3(p_k)+\beta_4F_{r2}(\tau)A_4(p_k)\right]\frac{e^{p_k(t-\tau)}}{\Delta'(p_k)}d\tau, \tag{13}$$

$$T_2(t)=\sum_{n=1}^{6}\int_0^t\left[Q_1(\tau)A_5(p_k)-Q_2(\tau)A_6(p_k)+\right.$$
$$\left.+\beta_4F_{r1}(\tau)A_7(p_k)-\beta_4F_{r2}(\tau)A_8(p_k)\right]\frac{e^{p_k(t-\tau)}}{\Delta'(p_k)}d\tau, \tag{14}$$

$$u_{r1}(t)=\sum_{n=1}^{6}\int_0^t\left[-Q_1(\tau)A_9(p_k)+Q_2(\tau)A_{10}(p_k)-\right.$$
$$\left.-\beta_4F_{r1}(\tau)A_{11}(p_k)+\beta_4F_{r2}(\tau)A_{12}(p_k)\right]\frac{e^{p_k(t-\tau)}}{\Delta'(p_k)}d\tau, \tag{15}$$

$$u_{r2}(t)=\sum_{n=1}^{6}\int_0^t\left[Q_1(\tau)A_{13}(p_k)-Q_2(\tau)A_{14}(p_k)+\right.$$
$$\left.+\beta_4F_{r1}(\tau)A_{15}(p_k)-\beta_4F_{r2}(\tau)A_{16}(p_k)\right]\frac{e^{p_k(t-\tau)}}{\Delta'(p_k)}d\tau. \tag{16}$$

Тут вирази $A_1(p)\div A_{16}(p)$ будуть

$$A_1(p)=\begin{vmatrix}\alpha_{22} & -\alpha_{23} & -\alpha_{24}\\ \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{34}\\ \alpha_{42} & \alpha_{43} & \alpha_{44}\end{vmatrix},\quad A_2(p)=\begin{vmatrix}\alpha_{12} & -\alpha_{13} & -\alpha_{14}\\ \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{34}\\ \alpha_{42} & \alpha_{43} & \alpha_{44}\end{vmatrix},$$

$$A_3(p)=\begin{vmatrix}\alpha_{12} & -\alpha_{13} & -\alpha_{14}\\ \alpha_{22} & -\alpha_{23} & -\alpha_{24}\\ \alpha_{42} & \alpha_{43} & \alpha_{44}\end{vmatrix},\quad A_4(p)=\begin{vmatrix}\alpha_{12} & -\alpha_{13} & -\alpha_{14}\\ \alpha_{22} & -\alpha_{23} & -\alpha_{24}\\ \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{34}\end{vmatrix},$$

$$A_5(p)=\begin{vmatrix}\alpha_{21} & -\alpha_{23} & -\alpha_{24}\\ \alpha_{31} & \alpha_{33} & \alpha_{34}\\ \alpha_{41} & \alpha_{43} & \alpha_{44}\end{vmatrix},\quad A_6(p)=\begin{vmatrix}\alpha_{11} & -\alpha_{13} & -\alpha_{14}\\ \alpha_{31} & \alpha_{33} & \alpha_{34}\\ \alpha_{41} & \alpha_{43} & \alpha_{44}\end{vmatrix},$$

$$A_7(p)=\begin{vmatrix}\alpha_{11} & -\alpha_{13} & -\alpha_{14}\\ \alpha_{21} & -\alpha_{23} & -\alpha_{24}\\ \alpha_{41} & \alpha_{43} & \alpha_{44}\end{vmatrix},\quad A_8(p)=\begin{vmatrix}\alpha_{11} & -\alpha_{13} & -\alpha_{14}\\ \alpha_{21} & -\alpha_{23} & -\alpha_{24}\\ \alpha_{31} & \alpha_{33} & \alpha_{34}\end{vmatrix},$$

$$A_9(p)=\begin{vmatrix}\alpha_{21} & \alpha_{22} & -\alpha_{24}\\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{34}\\ \alpha_{41} & \alpha_{42} & \alpha_{44}\end{vmatrix},\ A_{10}(p)=\begin{vmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12} & -\alpha_{14}\\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{34}\\ \alpha_{41} & \alpha_{42} & \alpha_{44}\end{vmatrix},$$

$$A_{11}(p)=\begin{vmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12} & -\alpha_{14}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & -\alpha_{24}\\ \alpha_{41} & \alpha_{42} & \alpha_{44}\end{vmatrix},\ A_{12}(p)=\begin{vmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12} & -\alpha_{14}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & -\alpha_{24}\\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{34}\end{vmatrix},$$

$$A_{13}(p)=\begin{vmatrix}\alpha_{21} & \alpha_{22} & -\alpha_{23}\\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33}\\ \alpha_{41} & \alpha_{42} & \alpha_{43}\end{vmatrix},\ A_{14}(p)=\begin{vmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12} & -\alpha_{13}\\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33}\\ \alpha_{41} & \alpha_{42} & \alpha_{43}\end{vmatrix},$$

$$A_{15}(p)=\begin{vmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12} & -\alpha_{13}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & -\alpha_{23}\\ \alpha_{41} & \alpha_{42} & \alpha_{43}\end{vmatrix},\ A_{16}(p)=\begin{vmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12} & -\alpha_{13}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & -\alpha_{23}\\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33}\end{vmatrix},$$

де

$$\alpha_{11}=d_1-pd_3,\ \alpha_{12}=d_2-pd_4,\ \alpha_{13}=pd_5,\ \alpha_{14}=pd_6,\ \alpha_{21}=d_7-pd_9,$$

$$\alpha_{22}=d_8-pd_{10},\ \alpha_{23}=pd_{11},\ \alpha_{24}=pd_{12},\ \alpha_{31}=d_{13}-\frac{p^2}{c^2}d_{15},$$

$$\alpha_{32}=d_{14}-\frac{p^2}{c^2}d_{16},\ \alpha_{33}=d_{17}-\frac{p^2}{c^2}d_{19},\ \alpha_{34}=d_{18}-\frac{p^2}{c^2}d_{20},$$

$$\alpha_{41}=d_{21}-\frac{p^2}{c^2}d_{23},\ \alpha_{42}=d_{22}-\frac{p^2}{c^2}d_{24},\ \alpha_{43}=d_{25}-\frac{p^2}{c^2}d_{27},$$

$$\alpha_{44}=d_{26}-\frac{p^2}{c^2}d_{28}$$

p_k — корені характеристичного рівняння 6-го степеня відносно параметра p перетворення Лапласа:

$$\Delta(p)=\frac{p^6}{c^4}\Big[(d_3+d_{10})(d_{19}d_{28}-d_{20}d_{27})+d_3d_{16}(d_{27}d_{12}-d_{11}d_{23})+$$

$$+d_3d_{24}(d_{12}d_{19}-d_{11}d_{24})-d_4d_{19}(d_9d_{28}-d_{12}(d_{21}-d_{23}))-$$

$$-d_4d_{20}(d_{11}d_{23}-d_9d_{27})+d_9d_{16}(d_9d_{16}-d_{13}d_{10})+d_5d_{20}(d_{10}d_{23}-d_9d_{24})-$$

$$-c^2d_5d_{12}(d_{16}d_{23}-d_{13}d_{24})+d_6d_{11}(d_{16}d_{25}-d_{15}d_{24})-$$

$$d_6d_9d_{16}d_{27}+d_6d_{10}d_{15}d_{22}\Big]-\frac{p^5}{c^4}\Big[(d_3+d_{10})(d_{19}d_{28}-d_{20}d_{27})+$$

$$+d_1d_{16}(d_{27}d_{12}-d_{11}d_{28})-d_1d_{21}(d_{11}d_{24}-d_{12}d_{19})-d_4d_{19}d_7d_{28}+$$

$$+d_2d_{19}\left(d_9d_{28}-d_{12}(d_{21}-d_{23})\right)-d_2d_{20}\left(d_{11}d_{23}-d_3d_{27}\right)-d_4d_{20}d_7d_{27}-$$
$$-d_2d_{15}\left(d_{11}d_{28}-d_{12}d_{27}\right)++d_9d_{16}\left(d_7d_{16}-d_{15}d_8\right)+$$
$$+d_5d_{20}\left(d_8d_{25}-d_7d_{24}\right)-c^2d_6d_{11}\left(d_{16}d_{21}+d_{14}d_{13}-d_{13}d_{24}-d_{15}d_{24}\right)\Big]-$$
$$-\frac{p^4}{c^2}\Bigg[\left(d_{19}+d_{28}-d_{20}-d_{27}\right)\Bigg(d_3+d_{10}+\frac{1}{c^2}d_1d_8\left(d_{19}d_{28}-d_{20}d_{27}\right)+$$
$$+d_3d_{14}\left(d_{12}d_{27}-d_{11}d_{28}\right)+d_{12}d_{25}d_3d_{16}\Bigg)-d_3d_{22}\left(d_{11}d_{24}-d_{12}d_{19}\right)-$$
$$-d_3d_{24}\left(d_{11}d_{22}-d_{12}d_7\right)-d_4d_{17}\left(d_9d_{28}-d_{12}(d_{21}-d_{23})\right)-d_4d_{19}d_9d_{26}\Big)+$$
$$+\frac{1}{c^2}\left(d_2d_{19}d_7d_{28}+d_2d_{20}d_7d_{17}\right)-d_1d_{13}\left(d_{11}d_{28}-d_{12}d_{27}\right)-$$
$$-d_1d_5\left(d_1d_{26}-d_{21}d_{25}\right)+d_9d_{16}\left(d_9d_{14}-d_{13}d_{10}\right)+d_5d_{26}\left(d_9d_{15}-d_5d_{10}\right)+$$
$$+d_5d_{20}\left(d_9d_{22}-d_{10}d_{21}\right)-d_5d_{18}\left(d_{10}d_{23}-d_9d_{24}\right)+$$
$$+d_9d_{16}\left(d_9d_{14}-d_{13}d_{10}\right)+\left(d_{16}d_{21}+d_{14}d_{23}-d_5d_{22}-d_{13}d_{23}\right)d_5d_{12}+$$
$$+d_9d_{16}\left(d_9d_{14}-d_{13}d_{10}\right)+d_5d_{26}\left(d_9d_{15}-d_{10}d_5\right)+$$
$$+d_5d_{20}(d_9d_{22}-d_{10}d_{21})-d_5d_{18}(d_{10}d_{23}-d_9d_{24})+\left(d_{16}d_{21}+d_{14}d_{23}-\right.$$
$$\left.-d_5d_{12}-d_{13}d_{23}\right)d_5d_{13}-d_6d_9(d_{16}d_{25}+d_{14}d_{27})-d_6d_{10}(d_{19}d_{21}+d_{17}d_{23}-$$
$$-d_{13}d_{27}-d_{15}d_{25})+d_6d_{11}\left(d_{16}d_{21}+d_{14}d_{13}-d_{13}d_{24}-d_{15}d_{24}\right)\Big]-$$
$$-\frac{p^3}{c^2}\Big[\left(d_3+d_{10}\right)\left(d_{19}+d_{28}-d_{20}-d_{27}\right)-d_1d_{14}\left(d_{12}d_{27}-d_{11}d_{28}\right)-$$
$$-d_1d_{12}d_{16}d_{25}+\left(d_{11}d_{24}-d_{12}d_{19}\right)d_3d_{22}+$$
$$+\left(d_{11}d_{22}-d_{12}d_{19}\right)d_1d_{22}+d_1d_7d_{17}d_{25}-d_2d_9d_{19}d_{26}+$$
$$+d_1d_{24}(d_{11}d_{22}-d_{12}d_{17})+d_4d_7d_{20}d_{25}+d_2d_{20}\left(d_{11}d_{23}-d_9d_{25}\right)+$$
$$+d_4d_{20}d_7d_{27}+d_2d_{18}(d_{11}d_{23}-d_9d_{25})+d_2d_{15}\left(d_{11}d_{26}-d_{21}d_{25}\right)+$$
$$+d_2d_{13}(d_{11}d_{28}-d_{12}d_{27})-d_9d_{16}\left(d_7d_{14}-d_8d_{13}\right)-$$
$$-d_5d_{26}\left(d_7d_{16}-d_8d_{15}\right)-d_5d_{20}(d_8d_{21}-d_{22}d_7)-d_5d_{18}(d_8d_{23}-d_{24}d_7)-$$
$$-d_6d_8(d_{19}d_{21}+d_{17}d_{23}-d_{13}d_{27}-d_{15}d_{23})-d_6d_9\left(d_{16}d_{25}+d_{14}d_{27}\right)\Big]-$$
$$-p^2\left[\frac{1}{c^2}d_1d_8\left(d_{19}+d_{28}-d_{20}-d_{27}\right)-(d_3+d_{10})(d_{17}d_{26}-d_{18}d_{25})-\right.$$
$$-d_3d_{11}d_{12}d_{27}+d_3d_{22}(d_{11}d_{22}-d_{12}d_{17})+$$

$$
\begin{gathered}
+\frac{1}{c^2}(d_2d_7d_{19}d_{26}-d_2d_7d_{17}d_{25})+d_4d_9d_{17}d_{26}- \\
-\frac{1}{c^2}(d_2d_7d_{18}d_{27}-d_2d_7d_{20}d_{25})+d_4d_{18}\left(d_{11}d_{21}+d_9d_{25}\right)+ \\
+d_4d_{13}\left(d_1d_{26}-d_{21}d_{25}\right)-d_5d_{26}\left(d_9d_{14}-d_{13}d_{10}\right)+ \\
+d_5d_{18}\left(d_9d_{22}-d_{10}d_{21}\right)+d_5d_{12}\left(d_{14}d_{21}-d_{13}d_{22}\right)+d_6d_9d_{25}d_{14}+ \\
+d_{14}d_{21}-d_{13}d_{22}\big]-p\big[(d_3-d_{10})\left(d_{17}d_{24}-d_{18}d_{25}\right)+d_6d_{10}\left(d_{17}d_{21}-d_{13}d_{25}\right)+ \\
+d_1d_{14}d_{12}d_{25}-d_1d_{22}(d_{11}d_{22}-d_{12}d_{17})-d_4d_7d_{17}d_{26}-d_2d_9d_{17}d_{26}- \\
-d_1d_7d_{18}d_{25}-d_2d_{18}\left(d_{11}d_{21}-d_9d_{25}\right)+d_2d_{13}(d_1d_{26}-d_{21}d_{23})+ \\
+d_5d_{26}(d_7d_{14}-d_8d_{13})+d_5d_{18}(d_8d_{21}-d_{22}d_7)- \\
-d_6d_7d_{14}d_{25}-d_6d_8\left(d_{17}d_{21}-d_{13}d_{25}\right)\big]+d_1d_8(d_{17}d_{26}-d_{18}d_{25})- \\
-d_2d_7(d_{17}d_{26}+d_{18}d_{25})\,. \qquad (17)
\end{gathered}
$$

Зауважимо, що дві пари коренів рівняння (17) є комплексно-спряженими з від'ємними дійсними частинами, а два корені – дійсні від'ємні. Уявні частини комплексно-спряжених коренів відповідають власним частотам радіальних коливань розглядуваного циліндра у випадку зв'язаних полів температури і переміщень.

Отримані вирази (13)–(16) функцій $T_s\left(t\right)$ і $U_{rs}\left(t\right)$ ($s=1,2$) підставляємо у подання (6)–(8) та у формули (5) і записуємо таким чином загальний розв'язок зв'язаної задачі термопружності (1)–(4) для розглядуваного порожнистого циліндра за однорідної теплової і силової дій.

Висновок. Знайдений розв'язок дає змогу проаналізувати термомеханічну поведінку довгого порожнистого циліндра, зумовлену заданими нестаціонарними об'ємними джерелами тепла Q і об'ємними силами $\vec{F}$ з урахуванням процесу термопружного розсіювання енергії. Цей розв'язок є теоретичною основою для комп'ютерного аналізу термонапруженого стану порожнистого циліндра за нестаціонарних теплових і силових дій, в тому числі зумовлених дією зовнішнього нестаціонарного електромагнітного поля [4, с. 16–35].

Список використаних джерел:

1. Грибанов В. Ф. Связанные и динамические задачи термоупругости / В. Ф. Грибанов, Н. Г. Паничкин. — М. : Машиностроение, 1984. — 184 с.
2. Подстригач Я. С. Обобщенная термомеханика / Я. С. Подстригач, Ю. Н. Коляно. — К. : Наукова думка, 1976. — 310 с.
3. Мусій Р. С. Динамічні задачі термомеханіки електропровідних тіл канонічної форми / Р. С. Мусій. — Львів : РАСТР-7, 2010. — 211 с.

4. Термоупругость электропроводных тел / Я. С. Подстригач, Я. И. Бурак, А. Р. Гачкевич, Л. В. Чернявская. — К. : Наук. думка, 1977. — 247 с.

CONNECTED DYNAMIC PROBLEM OF THERMOELASTICITY FOR A LONG HOLLOW CYLINDER UNDER NON-STATIONARY HEAT AND POWER ACTIONS

A planar axisymmetric connected dynamic problem of thermoelasticity for a long hollow cylinder is formulated. Constant physical and mechanical characteristics of the material of the cylinder are accepted. To determine the thermoelastic state of the cylinder, the temperature and the radial component of the displacement vector are chosen as determining functions. To obtain the solution of the interconnected system of two equations describing a planar axisymmetric connected dynamic problem of thermoelasticity for a cylinder, a method for constructing its approximate solution is proposed. The method is to use the approximation of temperature distributions and radial displacements in radial variable by cubic polynomials. The coefficients of these polynomials are given by a linear combination of integral in radial variables characteristics of the determining functions and functions that describe the boundary values of the determining functions on the inner and outer surfaces of the cylinder. As a result, the initial initial-boundary value problem of thermoelasticity for the determining functions is reduced to the Cauchy problem in a time variable on their integral characteristics. General solutions of the Cauchy problem are obtained using the integral Laplace transform and got as a convolution of functions describing non-stationary volumetric heat sources and forces, and functions corresponding to the general solutions of the homogeneous equations of the initial system of interconnected equations on the whole numerical interval of non-stationary thermal and force actions changes. The expressions of the integral characteristics give an opportunity to obtain their expressions for specific characteristic types of non-stationary volumetric heat sources and forces corresponding to the physical processes that affect the thermoelastic state of the cylinder. Specifically, such processes may include thermal shock, laser radiation of visible and infrared frequencies, electromagnetic radiation of the radio frequency band, and various types of electromagnetic pulsed fields. On the basis of the proposed methodology, an algebraic equation of the sixth degree was also obtained for the determination of the first two natural frequencies of oscillations of radial displacements taking into account the process of thermoelastic energy dissipation in this cylinder.

Keywords: *connected dynamic problem of thermoelasticity, long hollow cylinder, non-stationary heat and force actions, approximation, cubic polynomials, radial variable.*

Отримано: 30.05.2018