УДК 517.912

О. М. Омелян, канд. фіз.-мат. наук
Полтавський національний технічний університет
імені Юрія Кондратюка, м. Полтава

НЕЛОКАЛЬНІ АНЗАЦИ ТА РЕДУКЦІЯ СИСТЕМИ НЕЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ КОНВЕКЦІЇ-ДИФУЗІЇ З ХЕМОТАКСИСНОЮ ДИФУЗИВНОЮ МАТРИЦЕЮ

Сучасні наукові дослідження в самих різноманітних галузях науки неможливі без побудови математичних моделей фізичних, хімічних, біологічних та ін. процесів та явищ, що вивчаються. Одним з видів математичних моделей є диференціальні рівняння та їх системи. Серед диференціальних рівнянь для опису процесів проходження рідини з домішками через багатошарові фільтри, процесів забруднення атмосферного повітря вихлопними газами використовуються системи рівнянь конвекції-дифузії. До цього часу актуальною залишається розробка нових методів знаходження точних розв'язків диференціальних рівнянь з частинними похідними. Одним з таких методів є метод С. Лі. Дана робота присвячена пошуку засобів узагальнення методу С. Лі для знаходження нових класів точних розв'язків диференціальних рівнянь з частинними похідними.

У статті об'єктом дослідження є система нелінійних рівнянь конвекції-дифузії з дифузивною матрицею, що притаманна системі рівнянь хемотаксису. У статті показано, що наведені в ній нелокальні перетворення є перетвореннями еквівалентності системи нелінійних рівнянь конвекції-дифузії. Для даної системи та системи-образу, пов'язаної з нею нелокальними перетвореннями, досліджено їх симетрійні властивості. Для знайденої системи-образу в роботі побудовані нееквівалентні ліївські анзаци. Подіявши на ліївські анзаци системи-образу нелокальними перетвореннями, одержані нелокальні анзаци системи конвекції-дифузії з хемотаксисною матрицею дифузії. Подіявши нелокальними анзацами на дану систему, знайдені редуковані рівняння, розв'язавши які, можна одержати точні розв'язки даної системи. Знайдені нелокальні анзаци не можна отримати в рамках класичного методу С. Лі., але вони дозволяють побудувати нові, неліївські розв'язки даної системи диференціальних рівнянь. Зокрема, в статті, розв'язавши одну з редукованих систем, в якості прикладу застосування нелокальних анзаців, побудовано розв'язок системи конвекції-дифузії з хемотаксисною дифузивною матрицею.

Ключові слова: *система рівнянь конвекції-дифузії, нелокальні перетворення еквівалентності, нелокальні анзаци, нелокальна редукція.*

Вступ. Рівняння дифузії, конвекції-дифузії та їх системи мають важливе значення для моделювання реальних процесів навколишнього світу (див. [9, 10]). Зокрема, у роботі [6] досліджуються процеси масоперенесення частинок домішкової речовини з урахуванням конвективної складової перенесення та сорбційних процесів у двошаровому фільтрі.

Для побудови аналітичних точних розв'язків рівнянь математичної фізики використовується метод С. Лі (див. [2, 8, 14]). В кінці XX століття в роботах [7, 12] запропоновано знаходити додаткові неліївські розв'язки рівнянь за допомогою нелокальних перетворень.

У роботах [15, 16] нелокальні перетворення еквівалентності застосовані для розширення класів розв'язків нелінійних рівнянь конвекції-дифузії вигляду

$$u_t = \partial_x[f(u)u_x + g(u)], \tag{1}$$

де $g(u)$ — довільна гладка функція.

У роботі поставимо задачу застосувати нелокальні перетворення еквівалентності методом, запропонованим у роботах [4, 5], для знаходження нелокальних анзаців та редукції нелінійної системи з класу систем рівнянь конвекції-дифузії:

$$U_t = \partial_x[F(U)U_x + G(U)], \tag{2}$$

де $U = \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix}$, $F(U) = \begin{pmatrix} f^{11} & f^{12} \\ f^{21} & f^{22} \end{pmatrix}$, $G(U) = \begin{pmatrix} g^1 \\ g^2 \end{pmatrix}$, $u^a = u^a(t,x)$,

$f^{ab} = f^{ab}(U)$, $g^a = g^a(U)$ — довільні гладкі функції, $a,b = \overline{1,2}$.

1. Нелокальні перетворення системи (2)

Розглянемо нелокальні перетворення системи рівнянь конвекції-дифузії (2) вигляду:

$$t = t, \quad x = x, \quad u^a = v_x^a, \tag{3}$$

$$t = x_0, \quad x = w^2, \quad v^1 = w^1, \quad v^2 = x_1, \tag{4}$$

$$x_0 = x_0, \quad x_1 = x_1, \quad w_1^1 = z^1, \quad w_1^2 = z^2, \tag{5}$$

де t, x, x_0, x_1 — нові незалежні змінні, $v^a = v^a(t,x)$, $w^a = w^a(x_0, x_1)$, $z^a = z^a(x_0, x_1)$ — нові залежні змінні.

Теорема 1. Нелокальні перетворення (3), (4), (5) є перетвореннями еквівалентності системи рівнянь конвекції-дифузії (2).

Доведення. Застосувавши до системи (2) нелокальну заміну вигляду (3), де $v^a = v^a(t,x)$ — нові невідомі функції змінних t, x, після інтегруваня одержаної системи за змінною x, отримаємо:

$$V_t = F(V_x)V_{xx} + G(V_x), \tag{6}$$

де $V = \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \end{pmatrix}$, $G(V_x) = \begin{pmatrix} g^1(V_x) \\ g^2(V_x) \end{pmatrix}$.

Якщо до системи (6) застосувати перетворення годографа (4) де x_0, x_1 — нові незалежні змінні, $w^a = w^a(x_0, x_1)$ — нові залежні змінні, то дана система зведеться до вигляду

$$\begin{cases} w_0^1 = \dfrac{1}{(w_1^2)^2}[(f^{11} - w_1^1 f^{21})w_{11}^1 + (-(w_1^1 f^{11} + f^{12}) + \\ +w_1^1(w_1^1 f^{21} + f^{22}))\dfrac{w_{11}^2}{w_1^2}] + g^1 - w_1^1 g^2, \\ w_0^2 = -\dfrac{1}{w_1^2} f^{21} w_{11}^1 + \dfrac{1}{(w_1^2)^2}(w_1^1 f^{21} + f^{22})w_{11}^2 - w_1^2 g^2, \end{cases} \tag{7}$$

де $w_\mu^a = \dfrac{\partial w^a}{\partial x_\mu}$, $w_{11}^a = \dfrac{\partial^2 w^a}{\partial x_1^2}$, $\mu = 0,1$, причому:

$$f^{ab} = f^{ab}\left(\frac{w_1^1}{w_1^2}, \frac{1}{w_1^2}\right), \; g^a = g^a\left(\frac{w_1^1}{w_1^2}, \frac{1}{w_1^2}\right); \;\; a, b = \overline{1,2}. \tag{8}$$

Продиференціювавши систему (7) за змінною x_1, та виконавши заміни (5), де $z^a = z^a(x_0, x_1)$ — нові залежні змінні, одержимо наступну систему

$$Z_0 = \partial_1[\Phi(Z)Z_1 + \Psi(Z)], \tag{9}$$

де $Z = \begin{pmatrix} z^1 \\ z^2 \end{pmatrix}$, $Z_\mu = \dfrac{\partial Z}{\partial x_\mu}$, $\partial_1 = \dfrac{\partial}{\partial x_1}$, $\Phi(Z) = \begin{pmatrix} \varphi^{11} & \varphi^{12} \\ \varphi^{21} & \varphi^{22} \end{pmatrix}$,

$$\Psi(Z) = \begin{pmatrix} \psi^1 \\ \psi^2 \end{pmatrix}, \; \varphi^{ab} = \varphi^{ab}(Z), \; \psi^a = \psi^a(Z), \; \mu = 0,1,$$

причому функції $f^{ab}(Z)$ та $g^a(Z)$ пов'язані із функціями $\varphi^{ab}(Z)$ та $\psi^a(Z)$ наступними співвідношеннями

$$\begin{cases} \varphi^{11} = (z^2)^{-2}[f^{11} - z^1 f^{21}], \\ \varphi^{12} = (z^2)^{-3}[-(z^1 f^{11} + f^{12}) + z^1(z^1 f^{21} + f^{22})], \\ \varphi^{21} = -(z^2)^{-1} f^{21}, \\ \varphi^{22} = (z^2)^{-2}[z^1 f^{21} + f^{22}], \end{cases} \tag{10}$$

де $f^{ab} = f^{ab}(\dfrac{z^1}{z^2}, \dfrac{1}{z^2})$, $\varphi^{ab} = \varphi^{ab}(z^1, z^2)$.

$$\begin{cases} \psi^1 = g^1 - z^1 g^2, \\ \psi^2 = -z^2 g^2, \end{cases} \tag{11}$$

де $g^a = g^a(\frac{z^1}{z^2}, \frac{1}{z^2})$, $\psi^a = \psi^a(Z)$.

Таким чином, ми встановили, що ланцюжок замін (3), (4), (5) зводить систему (2) до системи рівнянь того ж класу вигляду (9) і навпаки, — не важко переконатися, що система (9) за допомогою вказаних замін зводиться до системи (2).

Теорему доведено.

2. Система нелінійних рівнянь конвекції-дифузії з хемотаксисною дифузною матрицею та її алгебра інваріантності.

Лема. Перетворення вигляду

$$U = AW + B, \tag{12}$$

де $W = \begin{pmatrix} w^1 \\ w^2 \end{pmatrix}$ — нові невідомі функції, $A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix}$, — довільні сталі матриці, матриця А невироджена , $\alpha_{ab}, \beta_a \in R$, є перетвореннями локальної еквівалентності системи (2).

Зауваження 1. Наступні твердження про симетрійні властивості систем рівнянь конвекції-дифузії з класу (2) формулюватимемо з точністю до перетворень еквівалентності (12).

Розглянемо систему нелінійних рівнянь конвекції-дифузії вигляду

$$\begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix}_t = \partial_x \left[\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 2\lambda_1 \frac{u^2}{u^1} & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix}_x + \begin{pmatrix} 0 \\ \mu (u^2)^2 \end{pmatrix} \right], \tag{13}$$

де $u^a = u^a(x_0, x_1)$, $a = \overline{1,2}$, $\lambda_1 + \lambda_2 \neq 0$, t — часова змінна, x — просторова змінна, нижній індекс означає диференціювання за відповідною змінною. Система рівнянь (13) належить до систем класу (2). Система рівнянь вигляду (13) застосовується в природничих науках для моделювання хемотаксису мікроорганізмів внаслідок впливу фізичних або хімічних факторів (див. [1, 11, 13]).

Теорема 2. Максимальною алгеброю інваріантності системи (13) є узагальнена алгебра Галілея $AG_2(1;1)$:

1) при $\lambda_1 + \lambda_2 \neq 0,\ \mu \neq 0$ $A_1 = \langle \partial_t, \partial_x, G_1 = t\partial_x + xQ_1,$

$$A_1 = \langle \partial_t, \partial_x, G_1 = t\partial_x + xQ_1,$$

$$Q_1 = -\tfrac{1}{2\lambda_1} u^1 \partial_{u^1},\ D = 2t\partial_t + x\partial_x + \lambda_1 Q_1 - Q_2, \tag{14}$$

$$\Pi = t^2\partial_t + tx\partial_x + \tfrac{1}{2}(x^2 + 2\lambda_1 t)Q_1 - tQ_2 \rangle,$$

2) при $\lambda_1 + \lambda_2 \neq 0,\ \mu = 0$, $A_2 = \langle A_1, Q_2 \rangle$, (15)

де $Q_2 = u^2 \partial_{u^2}$.

Дана теорема була доведена стандартним методом С. Лі (див. [2, 8, 14]).

3. Симетрійні властивості образу системи (13). Подіявши на систему (13) суперпозицією перетворень (3), (4), (5) отримуємо наступну систему рівнянь конвекції-дифузії, яку назвемо системою-образом системи (13).

$$\begin{pmatrix} z^1 \\ z^2 \end{pmatrix}_0 = \partial_1 \left[\begin{pmatrix} -\dfrac{\lambda_1}{(z^2)^2} & \dfrac{(\lambda_1+\lambda_2)z^1}{(z^2)^3} \\ -\dfrac{2\lambda_1}{z^1 z^2} & \dfrac{2\lambda_1+\lambda_2}{(z^2)^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z^1 \\ z^2 \end{pmatrix}_1 - \begin{pmatrix} \dfrac{\mu z^1}{(z^2)^2} \\ \dfrac{\mu}{z^2} \end{pmatrix} \right]. \tag{16}$$

Дослідивши симетрійні властивості системи (16), доведено теорему.

Теорема 3. Максимальними алгебрами інваріантності системи (16) є наступні:

1. При $\mu \neq 0, \lambda_2 \neq \lambda_1$

$$A_5 = \left\langle A_0, Q_2 = e^{-\frac{\mu}{\lambda_2}x_1}[\partial_1 + \frac{\mu}{\lambda_2}(z^1\partial_{z^1} + z^2\partial_{z^2})] \right\rangle. \tag{17}$$

2. При $\mu \neq 0, \lambda_2 = \lambda_1$

$$A_6 = \langle A_0, Q_2 = e^{-\mu x_1}[\partial_1 + \mu(z^1\partial_{z^1} + z^2\partial_{z^2})],$$
$$Q_3 = e^{\mu x_1}[\partial_1 - 2\mu z^1\partial_{z^1} - \mu z^2\partial_{z^2}] \rangle. \tag{18}$$

3. При $\mu = 0, \lambda_2 \neq \lambda_1$

$$A_7 = \left\langle A_0,\ D_2 = x_1\partial_1 - \frac{3}{2}z^1\partial_{z^1} - z^2\partial_{z^2})] \right\rangle. \tag{19}$$

4. При $\mu = 0, \lambda_2 = \lambda_1$.

$$A_8 = \left\langle A_0,\ D_2,\ K = x_1^2\partial_1 - x_1(3z^1\partial_{z^1} + 2z^2\partial_{z^2}) \right\rangle, \tag{20}$$

де $A_0 = \left\langle \partial_0, \partial_1, D = 2x_0\partial_0 + z^2\partial_{z^2}, Q_1 = z^1\partial_{z^1} \right\rangle$.

Теорема 3 доводиться стандартним методом Лі (див., наприклад, [2, 8, 14]).

Порівнявши алгебри (14)–(15) і (17)–(20), бачимо, що вони складаються з принципово різних наборів операторів. Використаємо цей факт для знаходження за допомогою нелокальних перетворень (3), (4), (5) додаткових (неліївських) анзаців системи (13).

4. Ліївські анзаци системи (13). Використаємо Ліївську симетрію системи (13) для побудови її інваріантних анзаців.

Розв'язок системи (13) будемо шукати у вигляді
$$U = A(t,x)\varphi(\omega),$$
де $A(t,x) = (\alpha^{ab})$, $\varphi = \begin{pmatrix} \varphi^1 \\ \varphi^2 \end{pmatrix}$, $\alpha^{ab} = \alpha^{ab}(t,x)$, $\omega = \omega(t,x)$ — деякі гладкі функції, $\varphi^a(\omega)$ — нові невідомі функції, які знаходяться після розв'язування системи звичайних диференціальних рівнянь:
$$\frac{dt}{\xi^0} = \frac{dx}{\xi^1} = \frac{du^1}{\eta^1} = \frac{du^2}{\eta^2} = d\tau. \qquad (21)$$

Максимальною алгеброю інваріантності системи (13) при $\mu \neq 0$ є алгебра (14). Координати інфінітезимального оператора скінченновимірного ядра цієї алгебри задаються формулами:
$$\xi^0 = c_1 t^2 + 2c_2 t + c_3; \quad \xi^1 = c_1 tx + c_4 t + c_2 x + c_5;$$
$$\eta^1 = [-\frac{1}{2\lambda_1}(\frac{c_1}{2}(x^2 + 2\lambda_1 t) + c_4 x) - \frac{1}{2}c_2 + c_6]u^1;$$
$$\eta^2 = (-c_1 t - c_2)u^2,$$
де $c_1, \ldots, c_7$ — групові параметри. Враховуючи це, система (21) має вигляд:
$$\begin{aligned} &\dot{t} = c_1 t^2 + 2c_2 t + c_3, \\ &\dot{x} = c_1 tx + c_4 t + c_2 x + c_5, \\ &\dot{u}^1 = [-\frac{1}{2\lambda_1}(\frac{c_1}{2}(x^2 + 2\lambda_1 t) + c_4 x) - \frac{1}{2}c_2 + c_6]u^1, \\ &\dot{u}^2 = (-c_1 t - c_2)u^2, \end{aligned} \qquad (22)$$
де $c_1, \ldots, c_7$ — довільні числові параметри. Проінтегрувавши систему (22) методом, розглянутим наприклад, у роботах [3, 5], наведемо вигляд нееквівалентних анзаців, які одержуються в результаті
$$u^1 = e^{k_1 t}\varphi^1(\omega), \quad u^2 = e^{k_2 t}\varphi^2(\omega), \quad \omega = k_3 t + x, \qquad (23)$$
$$\begin{aligned} &u^1 = t^{k_1}\varphi^1(\omega), \quad \omega = t^{-\frac{1}{2}}x, \\ &u^2 = t^{k_2}\varphi^2(\omega), \end{aligned} \qquad (24)$$
$$\begin{aligned} &u^1 = e^{\frac{m}{\lambda_1}t(x + \frac{2}{3}mt^2)}\varphi^1(\omega), \quad \omega = mt^2 + x, \\ &u^2 = e^{nt}\varphi^2(\omega), \end{aligned} \qquad (25)$$

$$u^1 = e^{-\frac{1}{4\lambda_1}tx^2(t^2+1)^{-1}}(t^2+1)^{-\frac{1}{4}}\varphi^1(\omega),$$
$$u^2 = (t^2+1)^{-\frac{1}{2}}\varphi^2(\omega), \tag{26}$$
$$\omega = x(t^2+1)^{-\frac{1}{2}},$$

де $k, k_1, \ldots, k_4$ — сталі, які певним чином виражаються через сталі $c_1, \ldots, c_7$.

5. Ліївські анзаци системи (16). Використаємо Ліївську симетрію системи (16) для побудови інваріантних анзаців цієї системи.

Максимальними алгебрами інваріантності системи (16) залежно від значення параметрів системи μ та λ_1, λ_2 є алгебри (21–20).

5.1. $\mu \neq 0,\ \lambda_2 \neq \lambda_1$.

Координати інфінітезимального оператора алгебри (17) задаються формулами:

$$\xi^0 = c_0 + 2c_2x_0; \qquad \xi^1 = c_1 + c_4e^{-\frac{\mu}{\lambda_2}x_1};$$
$$\eta^1 = (\frac{\mu}{\lambda_2}c_4e^{-\frac{\mu}{\lambda_2}x_1} + c_3)z^1; \quad \eta^2 = (\frac{\mu}{\lambda_2}c_4e^{-\frac{\mu}{\lambda_2}x_1} + c_2)z^2,$$

де $c_0, \ldots, c_5$ — групові параметри. Система (21) матиме вигляд:

$$\dot{x}_0 = c_0 + 2c_2x_0, \qquad \dot{x}_1 = c_1 + c_4e^{-\frac{\mu}{\lambda_2}x_1},$$
$$\dot{z}^1 = (\frac{\mu}{\lambda_2}c_4e^{-\frac{\mu}{\lambda_2}x_1} + c_3)z^1, \quad \dot{z}^2 = (\frac{\mu}{\lambda_2}c_4e^{-\frac{\mu}{\lambda_2}x_1} + c_2)z^2. \tag{27}$$

Не вдаючись у деталі інтегрування системи (27), наведемо вигляд нееквівалентних анзаців, які одержуються в результаті

1) $$z^1 = e^{mx_0+\frac{\mu}{\lambda_2}x_1}\varphi^1(\omega), \quad z^2 = e^{\frac{\mu}{\lambda_2}x_1}\varphi^2(\omega), \quad \omega = x_0 + pe^{\frac{\mu}{\lambda_2}x_1}, \tag{28}$$

2) $$z^1 = \frac{e^{mx_0+\frac{\mu}{\lambda_2}x_1}}{e^{\frac{\mu}{\lambda_2}x_1}+k}\varphi^1(\omega), \quad z^2 = \frac{e^{\frac{\mu}{\lambda_2}x_1}}{e^{\frac{\mu}{\lambda_2}x_1}+k}\varphi^2(\omega), \tag{29}$$
$$\omega = x_0 + p\ln(e^{\frac{\mu}{\lambda_2}x_1} + k);$$

3) $$z^1 = x_0{}^m e^{\frac{\mu}{\lambda_2}x_1}\varphi^1(\omega), \quad z^2 = x_0{}^{\frac{1}{2}}e^{\frac{\mu}{\lambda_2}x_1}\varphi^2(\omega), \tag{30}$$
$$\omega = \ln x_0 + pe^{\frac{\mu}{\lambda_2}x_1};$$

4) $$z^1 = x_0{}^m \frac{e^{\frac{\mu}{\lambda_2}x_1}}{e^{\frac{\mu}{\lambda_2}x_1}+k}\varphi^1(\omega), \quad z^2 = x_0{}^{\frac{1}{2}} \frac{e^{\frac{\mu}{\lambda_2}x_1}}{e^{\frac{\mu}{\lambda_2}x_1}+k}\varphi^2(\omega), \tag{31}$$

$$\omega = \ln x_0 + p\ln(e^{\frac{\mu}{\lambda_2}x_1}+k),$$

5.2. $\mu \neq 0,\ \lambda_2 = \lambda_1 = 1.$

Координати інфінітезимального оператора алгебри (18) задаються формулами:

$$\xi^0 = c_0 + 2c_2x_0;\ \xi^1 = c_1 + c_4e^{-\mu x_1} + c_5e^{\mu x_1};$$

$$\eta^1 = (\mu c_4e^{-\mu x_1} - 2\mu c_5e^{\mu x_1} + c_3)z^1;\ \eta^2 = (\mu c_4e^{-\mu x_1} - \mu c_5e^{\mu x_1} + c_2)z^2,$$

де $c_0,\ldots,c_5$ — групові параметри. Тоді система (21) матиме вигляд:

$$\begin{aligned} &\dot{x}_0 = c_0 + 2c_2x_0, && \dot{x}_1 = c_1 + c_4e^{-\mu x_1} + c_5e^{\mu x_1}, \\ &\dot{z}^1 = (\mu c_4e^{-\mu x_1} - 2\mu c_5e^{\mu x_1} + c_3)z^1, && \dot{z}^2 = (\mu c_4e^{-\mu x_1} - \mu c_5e^{\mu x_1} + c_2)z^2. \end{aligned} \tag{32}$$

Проінтегрувавши систему (32), в результаті одержуємо наступні нееквівалентні анзаци

1) $$z^1 = e^{kx_0 - 2\mu x_1}\varphi^1(\omega),\ \ z^2 = e^{-\mu x_1}\varphi^2(\omega),\ \omega = x_0 + pe^{-\mu x_1}. \tag{33}$$

2) $$z^1 = e^{kx_0 + \mu x_1}\varphi^1(\omega),\ \ z^2 = e^{\mu x_1}\varphi^2(\omega),\ \omega = x_0 + pe^{\mu x_1}; \tag{34}$$

3) $$z^1 = e^{kx_0}\frac{e^{\mu x_1}}{(e^{2\mu x_1} + \frac{1}{m^2})^{\frac{3}{2}}}\varphi^1(\omega), \quad z^2 = \frac{\varphi^2(\omega)}{c_1e^{-\mu x_1} + c_2\, e^{\mu x_1}}, \tag{35}$$

$$\omega = x_0 + p\,arctg(me^{\mu x_1}),$$

4) $$z^1 = e^{kx_0}\frac{e^{\mu x_1}}{(e^{2\mu x_1} - \frac{1}{n^2})^{\frac{3}{2}}}\varphi^1(\omega), \quad z^2 = \frac{\varphi^2(\omega)}{c_1e^{-\mu x_1} + c_2\, e^{\mu x_1}}, \tag{36}$$

$$\omega = x_0 + p\,arcth(ne^{\mu x_1}),$$

5) $$z^1 = e^{-2\mu x_1}x_0^p\varphi^1(\omega), \quad z^2 = e^{-\mu x_1}x_0^{\frac{1}{2}}\varphi^2(\omega), \tag{37}$$

$$\omega = \ln x_0 + ke^{-\mu x_1}.$$

6) $$z^1 = e^{\mu x_1}x_0^p\varphi^1(\omega), \quad z^2 = e^{\mu x_1}x_0^{\frac{1}{2}}\varphi^2(\omega), \tag{38}$$

$$\omega = \ln x_0 + ke^{\mu x_1}.$$

7) $$z^1 = \frac{e^{\mu x_1}x_0^p}{(e^{2\mu x_1} + \frac{1}{m^2})^{\frac{3}{2}}}\varphi^1(\omega), \quad z^2 = \frac{x_0^p}{c_1e^{-\mu x_1} + c_1m^2\, e^{\mu x_1}}\varphi^2(\omega), \tag{39}$$

$$\omega = \ln x_0 + k\,arctg(me^{2\mu x_1}),$$

8) $$z^1 = \frac{e^{\mu x_1} x_0^p}{(e^{2\mu x_1} - \frac{1}{n^2})^{\frac{3}{2}}} \varphi^1(\omega), \quad z^2 = \frac{x_0^{\frac{1}{2}}}{c_1 e^{-\mu x_1} - c_1 n^2 e^{\mu x_1}} \varphi^2(\omega), \tag{40}$$

$$\omega = \ln x_0 + k arcth(n e^{\mu x_1}).$$

5.3. $\mu = 0,\ \lambda_2 \neq \lambda_1.$

Координати інфінітезимального оператора алгебри (19) задаються формулами:

$$\xi^0 = 2c_2 x_0 + c_0;\ \xi^1 = c_4 x_1 + c_1;$$
$$\eta^1 = c_3 z^1;\ \eta^2 = (c_2 - c_4) z^2,$$

де $c_0, \ldots, c_4$ — групові параметри. Система (21) матиме вигляд:

$$\begin{aligned} &\dot{x}_0 = 2c_2 x_0 + c_0, \ \dot{x}_1 = c_4 x_1 + c_1, \\ &\dot{z}^1 = c_3 z^1, \qquad \dot{z}^2 = (c_2 - c_4) z^2. \end{aligned} \tag{41}$$

Не вдаючись у деталі інтегрування системи (41), наведемо вигляд нееквівалентних анзаців, які одержуються в результаті

1) $$z^1 = x_0^p \varphi^1(\omega),\ \ z^2 = x_0^{k+\frac{1}{2}} \varphi^2(\omega),\ \omega = x_0^k x_1, \tag{42}$$

2) $$z^1 = e^{p x_0} \varphi^1(\omega),\ \ z^2 = e^{k x_0} \varphi^2(\omega),\ \omega = e^{k x_0} x_1, \tag{43}$$

3) $$z^1 = x_0^p \varphi^1(\omega),\ \ z^2 = x_0^{\frac{1}{2}} \varphi^2(\omega),\ \omega = x_1 + k \ln x_0, \tag{44}$$

4) $$z^1 = e^{p x_0} \varphi^1(\omega),\ \ z^2 = \varphi^2(\omega),\ \omega = x_1 + k x_0, \tag{45}$$

5) $$z^1 = x_1^k \varphi^1(\omega),\ \ z^2 = x_1^{-1} \varphi^2(\omega),\ \omega = x_0, \tag{46}$$

6) $$z^1 = e^{p x_1} \varphi^1(\omega),\ \ z^2 = \varphi^2(\omega),\ \omega = x_0, \tag{47}$$

Зауважимо, що дією ланцюжків перетворень (3), (4), (5), на анзаци (42)–(47), одержуємо Ліївські анзаци системи (13), які можна одержати, використовуючи оператори алгебр (14), (15), а тому їх не наводимо.

5.4. $\mu = 0,\ \lambda_2 = \lambda_1 = 1.$

Координати інфінітезимального оператора алгебри (20) задаються формулами:

$$\xi^0 = 2c_2 x_0 + c_0;\ \xi^1 = c_5 x_1^2 + c_3 x_1 + c_1;$$
$$\eta^1 = (-3c_5 x_1 + c_4) z^1;\ \eta^2 = (-2c_5 x_1 + c_2 - c_3) z^2,$$

де $c_0, \ldots, c_5$ — групові параметри. Система (21) матиме вигляд:

$$\begin{aligned} &\dot{x}_0 = 2c_2 x_0 + c_0, \qquad \dot{x}_1 = c_5 x_1^2 + c_3 x_1 + c_1, \\ &\dot{z}^1 = (-3c_5 x_1 + c_4) z^1, \quad \dot{z}^2 = (-2c_5 x_1 + c_2 - c_3) z^2; \end{aligned} \tag{48}$$

Не вдаючись у деталі інтегрування системи (48), наведемо вигляд нееквівалентних анзаців, які одержуються в результаті

1) $$z^1 = (x_1^2+1)^{-\frac{3}{2}}\varphi^1(\omega), \quad z^2 = (x_1^2+1)^{-1}\varphi^2(\omega), \qquad (49)$$
$$\omega = x_0 + p\,arctg\,x_1,$$

2) $$z^1 = (x_1^2+1)^{-\frac{3}{2}}\varphi^1(\omega), \quad z^2 = x_0^{-\frac{1}{2}}(x_1^2+1)^{-1}\varphi^2(\omega), \qquad (50)$$
$$\omega = \ln x_0 + p\,arctg\,x_1,$$

6. Нелокальні анзаци системи (13). В пункті 2, 3 було встановлено, що система (13), інваріантна відносно алгебри $AG_2(1;1)$, під дією композиції нелокальних перетворень (3), (4), (5) переходить в систему (16), яка має алгебру інваріантності, що містить принципово інші оператори ніж оператори алгебр (14), (15). Цей факт використаємо для одержання додаткових анзаців системи (13).

Для відшукання додаткових неліївських анзаців системи (13) подіємо композицією нелокальних перетворень (3)–(5) на уже знайдені анзаци системи (13). Зауважимо, що дією композиції нелокальних перетворень (3)–(5) на анзаци (42)–(47), отримуємо ліївські анзаци системи (13), які можна одержати, використовуючи оператори алгебр (14), (15).

Подіявши композицією нелокальних перетворень (3)–(5) на анзаци (28)–(31), (33)–(40), (49)–(50), отримуємо нелокальні анзаци системи (16), які не можна одержати, використовуючи оператори алгебр (14), (15).

Не вдаючись у деталі їх знаходження, наведемо остаточні результати.

Нелокальні анзаци для системи (13).

Зокрема, із ліївських анзаців (28)–(31) отримуємо наступні нелокальні анзаци

$$u^1 = e^{mt}\varphi^1(\omega),$$
$$u^2 = \frac{\lambda_2}{\mu}\frac{\dot{\varphi}^2(\omega)}{\varphi^2(\omega)+pt}, \qquad (51)$$
$$\omega = x;$$

$$u^1 = e^{mt}\varphi^1(\omega),$$
$$u^2 = \frac{\lambda_2}{\mu}\frac{\dot{\varphi}^2(\omega)}{\varphi^2(\omega)+pe^{st}}, \qquad (52)$$
$$\omega = x;$$

$$u^1 = t^m\varphi^1(\omega),$$

$$u^2=\frac{\lambda_2}{\mu}t^{-\frac{1}{2}}\frac{\dot{\varphi}^2(\omega)}{\varphi^2(\omega)+p\ln t},\qquad(53)$$

$$\omega=\frac{x}{\sqrt{t}};$$

$$u^1=t^m\varphi^1(\omega),$$

$$u^2=\frac{\lambda_2}{\mu}t^{-\frac{1}{2}}\frac{\dot{\varphi}^2(\omega)}{\varphi^2(\omega)+pt^n},\qquad(54)$$

$$\omega=\frac{x}{\sqrt{t}}.$$

З ліївських анзаців (51)–(54) отримуємо наступні нелокальні анзаци

$$u^1=e^{kt}\varphi^1(\omega)(\varphi^2(\omega)+t),$$

$$u^2=-\frac{1}{\mu}\frac{\dot{\varphi}^2(\omega)}{\varphi^2(\omega)+t},\qquad(55)$$

$$\omega=x;$$

$$u^1=e^{kt}\varphi^1(\omega),$$

$$u^2=\frac{1}{\mu}\frac{\dot{\varphi}^2(\omega)}{\varphi^2(\omega)+t},\qquad(56)$$

$$\omega=x;$$

$$u^1=e^{kt}\cos\alpha\varphi^1(\omega),$$

$$u^2=\frac{2}{\mu}\frac{\dot{\varphi}^2(\omega)}{\sin 2\alpha},\qquad(57)$$

$$\omega=x,\quad \alpha=\varphi^2(\omega)-\frac{t}{p};$$

$$u^1=e^{kt}ch\alpha\varphi^1(\omega),$$

$$u^2=\frac{2}{\mu}\frac{\dot{\varphi}^2(\omega)}{sh2\alpha},\qquad(58)$$

$$\omega=x,\quad \alpha=\varphi^2(\omega)-\frac{t}{p}.$$

$$u^1=t^p\varphi^1(\omega)(\varphi^2(\omega)-\frac{1}{k}\ln t),$$

$$u^2=-\frac{1}{\mu}\frac{\dot{\varphi}^2(\omega)}{\varphi^2(\omega)-\frac{1}{k}\ln t},\qquad(59)$$

$$\omega=\frac{x}{\sqrt{t}};$$

$$u^1 = t^p \varphi^1(\omega),$$
$$u^2 = \frac{1}{\mu} t^{-\frac{1}{2}} \frac{\dot{\varphi}^2(\omega)}{\varphi^2(\omega) + \ln t}, \qquad (60)$$
$$\omega = \frac{x}{\sqrt{t}};$$

$$u^1 = t^p \cos\alpha\, \varphi^1(\omega),$$
$$u^2 = \frac{2}{\mu} t^{-\frac{1}{2}} \frac{\dot{\varphi}^2(\omega)}{\sin 2\alpha}, \qquad (61)$$
$$\omega = \frac{x}{\sqrt{t}}, \quad \alpha = \varphi^2(\omega) + k \ln t\ ;$$

$$u^1 = t^p ch\alpha\, \varphi^1(\omega),$$
$$u^2 = \frac{2}{\mu} t^{-\frac{1}{2}} \frac{\dot{\varphi}^2(\omega)}{sh 2\alpha}, \qquad (62)$$
$$\omega = \frac{x}{\sqrt{t}}, \quad \alpha = \varphi^2(\omega) + k \ln t.$$

Із ліївських анзаців (49)–(50) отримуємо наступні нелокальні анзаци системи (13)

$$u^1 = \varphi^1(\omega) \cos\alpha,$$
$$u^2 = \frac{\dot{\varphi}^2(\omega)}{\cos^2 \alpha}, \qquad (63)$$
$$\omega = x, \quad \alpha = \varphi^2(\omega) - \frac{t}{p};$$

$$u^1 = t^{-\frac{1}{2}} \varphi^1(\omega) \cos\alpha,$$
$$u^2 = t^{-\frac{1}{2}} \frac{\dot{\varphi}^2(\omega)}{\cos^2 \alpha}, \qquad (64)$$
$$\omega = \frac{x}{\sqrt{t}}, \quad \alpha = \varphi^2(\omega) - \frac{1}{p} \ln t.$$

Нелокальні анзаци (51)–(64) для системи (13) не можливо одержати в рамках теорії С. Лі.

7. Нелокальна редукція системи (13). Для знаходження невідомих функцій φ^1, φ^2 необхідно одержані вище нелокальні анзаци (51)–(64) підставити у систему (13). Анзаци (51)–(64) редукують систему (13) до систем звичайних диференціальних рівнянь відповідно

Зокрема, анзаци (51)–(54) редукують систему (13) до таких редукованих систем

$$\begin{aligned} &\ddot{\varphi}^1 = \frac{m}{\lambda_1}\varphi^1, \\ &\ddot{\varphi}^2 = \frac{1}{\lambda_2}(-2\lambda_1\frac{\dot{\varphi}^1}{\varphi^1}\dot{\varphi}^2 + p); \end{aligned} \tag{65}$$

$$\begin{aligned} &\ddot{\varphi}^1 = \frac{m}{\lambda_1}\varphi^1, \\ &\ddot{\varphi}^2 = \frac{1}{\lambda_2}(-2\lambda_1\frac{\dot{\varphi}^1}{\varphi^1}\dot{\varphi}^2 + ps\varphi^2); \end{aligned} \tag{66}$$

$$\begin{aligned} &\ddot{\varphi}^1 = \frac{1}{\lambda_1}(-\frac{\omega}{2}\dot{\varphi}^1 + m\varphi^1), \\ &\ddot{\varphi}^2 = \frac{1}{\lambda_2}(-2\lambda_1\frac{\dot{\varphi}^1}{\varphi^1}\dot{\varphi}^2 - \frac{\omega}{2}(\dot{\varphi}^2 + p)); \end{aligned} \tag{67}$$

$$\begin{aligned} &\ddot{\varphi}^1 = \frac{1}{\lambda_1}(-\frac{\omega}{2}\dot{\varphi}^1 + m\varphi^1), \\ &\ddot{\varphi}^2 = \frac{1}{\lambda_2}(-2\lambda_1\frac{\dot{\varphi}^1}{\varphi^1}\dot{\varphi}^2 - \frac{\omega}{2}\varphi^2 - n\varphi^2)); \end{aligned} \tag{68}$$

Анзаци (55)-(62) редукують систему (13) до таких редукованих систем

$$\begin{aligned} &\ddot{\varphi}^1 = k\varphi^1, \\ &\ddot{\varphi}^2 + 2\frac{\dot{\varphi}^1}{\varphi^1}\dot{\varphi}^2 - 1 = 0; \end{aligned} \tag{69}$$

$$\begin{aligned} &\ddot{\varphi}^1 - \varphi^1(\dot{\varphi}^2)^2 - k\varphi^1 = 0, \\ &\ddot{\varphi}^2 + 2\frac{\dot{\varphi}^1}{\varphi^1}\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{p} = 0; \end{aligned} \tag{70}$$

$$\begin{aligned} &\ddot{\varphi}^1 + \varphi^1(\dot{\varphi}^2)^2 - k\varphi^1 = 0, \\ &\ddot{\varphi}^2 + 2\frac{\dot{\varphi}^1}{\varphi^1}\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{p} = 0; \end{aligned} \tag{71}$$

$$\begin{aligned} &\ddot{\varphi}^1 + \frac{1}{2}\omega\dot{\varphi}^1 - p\varphi^1 = 0, \\ &\ddot{\varphi}^2 + (\frac{1}{2}\omega + 2\frac{\dot{\varphi}^1}{\varphi^1})\dot{\varphi}^2 - 1 = 0; \end{aligned} \tag{72}$$

$$\begin{aligned} &\ddot{\varphi}^1 + \frac{1}{2}\omega\dot{\varphi}^1 - ((\dot{\varphi}^2)^2 + p)\varphi^1 = 0, \\ &\ddot{\varphi}^2 + (\frac{1}{2}\omega + 2\frac{\dot{\varphi}^1}{\varphi^1})\dot{\varphi}^2 - k = 0; \end{aligned} \tag{73}$$

$$\begin{aligned} &\ddot{\varphi}^1 + \frac{1}{2}\omega\dot{\varphi}^1 + ((\dot{\varphi}^2)^2 - p)\varphi^1 = 0, \\ &\ddot{\varphi}^2 + (\frac{1}{2}\omega\dot{\varphi}^2 + 2\frac{\dot{\varphi}^1}{\varphi^1})\dot{\varphi}^2 - k = 0. \end{aligned} \tag{74}$$

Анзаци (63)–(64) редукують систему (13) до таких редукованих систем

$$\begin{aligned} &\ddot{\varphi}^1 = \varphi^1(\dot{\varphi}^2)^2, \\ &\ddot{\varphi}^2 + 2\frac{\dot{\varphi}^1}{\varphi^1}\dot{\varphi}^2 = \frac{2}{p}; \end{aligned} \tag{75}$$

$$\begin{aligned} &\ddot{\varphi}^1 = \omega\dot{\varphi}^1 + [(\dot{\varphi}^2)^2 + 1]\varphi^1, \\ &\ddot{\varphi}^2 = (\omega - 2\frac{\dot{\varphi}^1}{\varphi^1})\dot{\varphi}^2 + \frac{2}{p}. \end{aligned} \tag{76}$$

8. Розв'язки системи (13). Розв'язавши редуковані системи (65)–(76), можна побудувати розв'язки системи (13).

Так, наприклад, розв'язком системи (69) є наступні функції:

$$\varphi^1 = e^{\sqrt{k}\omega}, \quad \varphi^1 = c_1 e^{-2\sqrt{k}\omega} + \frac{1}{2\sqrt{k}}\omega + c_2, \tag{77}$$

де c_1, c_2 — довільні сталі.

Підставивши функції (77) у аназац (55), отримуємо наступний розв'язок системи (13):

$$\begin{aligned} &u^1 = e^{kt+\sqrt{k}x}[c_1 e^{-2\sqrt{k}x} + \frac{1}{2\sqrt{k}}x + t + c_2], \\ &u^2 = -\frac{1}{\mu}\cdot\frac{-2c_1\sqrt{k}e^{-2\sqrt{k}x} + \frac{1}{2\sqrt{k}}}{c_1 e^{-2\sqrt{k}x} + \frac{1}{2\sqrt{k}}x + t + c_2}. \end{aligned} \tag{78}$$

Висновки.

У роботі для системи нелінійних рівнянь хемотаксису, за допомогою нелокальних перетворень одержані нелокальні анзаци та знайдено відповідні редуковані системи (65)–(76), розв'язавши які, можна одержати точні розв'язки системи (13).

Зокрема, один з розв'язків системи (13) має вигляд (78).

Список використаних джерел:

1. Иваницкий Г. Р. От беспорядка к упорядоченности — на примере движения микроорганизмов / Г. Р. Иваницкий, А. Б. Медвинский, М. А. Цыганов // Успехи физических наук. — 1991. — Т. 161, № 4. — С. 13–71.

2. Овсянников Л. В. Групповой анализ дифференциальных уравнений / Л. В. Овсянников. — М. : Наука, 1978. — 400с.
3. Омелян О. М. Редукція та розв'язки систем нелінійних рів-нянь дифузії, інваріантних відносно алгебри Галілея / О. М. Омелян // Вісн. Київ. нац. ун-ту ім. Тараса Шевченка. Сер.: «Математика. Механіка». — 2004. — № 11–12. — С. 95–100.
4. Сєров М. І. Лінеаризація систем нелінійних рівнянь дифузії за допомогою нелокальних перетворень / М. І. Сєров, О. М. Омелян, Р. М. Черніга // Доп. НАН України. — 2004. — № 10. — С. 39–45.
5. Сєров М. І. Симетрійні властивості системи нелінійних рівнянь хемотаксису / М. І. Сєров, О. М. Омелян. — Полтава : ПолтНТУ, 2012. — 238 с.
6. Сівак В. Процеси дифузії-конвекції з урахуванням сорбції у двошаровому фільтрі / В. Сівак, Є. Чапля, О. Чернуха // Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології. — 2006. — Вип. 4. — С. 78–91.
7. Фущич В. И. О нелокальных анзацах одного нелинейного одномерного уравнения теплопроводности / В. И. Фущич, Н. И. Серов, Т. К. Амеров // Доклады Академии наук Украины. — 1992. — № 1. — С. 26–30.
8. Фущич В. И. Симметрийный анализ и точные решения нелинейных уравнений математической физики / В. И. Фущич, В. М. Штелень, Н. И. Серов. — К. : Наук. думка, 1989. — 335 с.
9. Чапля Є. Математичне моделювання стаціонарних процесів конвективно-дифузійного масопереносу у бінарних періодичних структурах / Є. Чапля, О. Чернуха, В. Дмитрук // Доповіді НАН України. — 2011. — № 7. — С. 46–51.
10. Чернуха О. Математичні моделі стаціонарних процесів конвективної дифузії в регулярних структурах. Задачі термодифузії та методи їх розв’язку : колект. моногр. / О. Чернуха, В. Гончарук, В. Дмитрук ; під ред. д. т. н. В. П. Ляшенка. — Кременчук : Кременчуцький національний університет імені Михайла Остроградського, 2012. — С. 91–109.
11. Adler J. Chemotaxis in bacteria / J. Adler // Sciense. — 1996. — Vol. 153. — P. 708–716.
12. Fushchich W. I. On nonlocal symmetries of the nonlinear heat equation / W. I. Fushchich, N. I. Serov, V. A. Tychynin, T. K. Amerov // Proc. Acad. of Sci. Ukraine. — 1992. — №11. — P. 27–33.
13. Keller E. F. Model for chemotaxis / E. F. Keller, L.A. Segel // J. Theor. Biol. — 1971. — Vol. 30. — P. 225–234.
14. Olver P. Applications of Lie Groups to Differential Equations / P. Olver. — New York : Springer, 1986. — 497 p.
15. Tychynin V. A. Symmetries and Generation of Solutions for Partial Differential Equations / V. A. Tychynin, O. V. Petrova, O. M. Tertyshnyk // Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications (SIGMA) — 2007. — Vol. 3. —14 p. — URL: http://arxiv.org/abs/math-ph/0702033
16. Tychynin V. A. Nonlocal symmetries and formulae for generation of solutions for a class of diffusion-convection equations / V. A. Tychynin, O. V. Petrova // J. Math. Anal. Appl. — 2011. — № 382. — P. 20–33.

THE NONLOCAL ANSATZE AND REDUCTION OF NONLINEAR SYSTEM OF CONVECTION-DIFFUSION EQUATIONS WITH CHEMOTAXIS MATRIX OF DIFFUSION

Contemporary scientific research in the most diverse fields of science is impossible without the construction of mathematical models of physical, chemical, biological, etc. processes and phenomena being studied. One of the types of mathematical models is the differential equations and their systems. Among the differential equations for describing the processes of passing liquid with impurities through multilayer filters, processes of atmospheric air pollution by exhaust gases, systems of equations of convection-diffusion are used. By this time, the development of new methods for finding exact solutions of differential equations with partial derivatives remains relevant. One such method is the C. Lee method. This paper is devoted to the search for means for generalizing the S. Le method to find new classes of exact solutions of partial differential equations.

In this article, the object of the study is a system of nonlinear equations of convection-diffusion with a diffusion matrix, inherent in the system of equations of chemotaxis. In this paper it is shown that the nonlocal transformations presented in it are transformations of the equivalence of a system of nonlinear convection-diffusion equations. For this system and system-image which is associated with nonlocal transformations, their symmetric properties were investigated. For the system-image which is found in the article, we construct non-equivalent Lie ansatzes. By acting on the Lie ansatzes of the system-image with nonlocal transformations, nonlocal ansatzes of a convection-diffusion system with a chemotaxis diffusion matrix were obtained. We found the reduced equations with applying nonlocal anzatses to this system. If we will solved reduced equations we can obtain exact solutions of the given system. The nonlocal ansatzes is found can not be obtained within the classical Lie method, but they allow us to construct new, non-Lies solutions of a given system of differential equations. In particular, in the article, having solved one of the reduced systems, as an example of the application of non-local ansatzes, solution of the convection-diffusion system with a chemotaxis diffusion matrix was constructed.

Key words: *nonlocal trasformations of equivalence, nonlocal ansatze, nonlocal reduction, nonlinear system of convection-diffusion equations with chemotaxis matrix of diffusion.*

Отримано: 24.05.2018