condition is fulfilled if the use of a simplified model instead of a complete does not require the relaxation of the specified limits on the accuracy of estimates of the quality indices of the system being studied.

The principle of simplification of models is proposed, which consists in neglecting parameters, factors or fragments of the model, insignificant for the given indicators of quality. On this principle, a method for simplifying (reduction) of mathematical models is developed, differing from the known additional motion and the harmonization of the accuracy of the initial data and perturbations of the parameters with the required accuracy of estimates of the quality indices of the systems under study.

Key words: *reduction methods of mathematical models, estimation accuracy requirements, dynamic systems.*

Отримано: 16.11.2018

УДК 517.968.7
DOI: 10.32626/2308-5878.2018-18.55-64

К. Г. Геселева, аспірант

Кам'янець-Подільський національний університет
імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський

КОЛОКАЦІЙНО-ІТЕРАТИВНИЙ МЕТОД РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ІНТЕГРО-ФУНКЦІОНАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З ОБМЕЖЕННЯМИ

Інтегро-функціональні рівняння мають широке застосування в різних областях науки та природознавства (зокрема, до таких рівнянь з відхиленням аргументу як нейтрального типу так і з запізненням).

У деяких випадках про розв'язки цих рівнянь буває відома додаткова інформація. Тому важливим є не тільки питання побудови розв'язку такого рівняння, а й встановлення умов сумісності відповідної задачі, тобто потрібно вияснити, чи узгоджується шуканий розв'язок задачі з додатковими умовами.

Встановленню умов сумісності задач такого типу стосовно різних видів операторних рівнянь та розробці методів побудови їх розв'язків присвячено низку наукових праць [1–4].

У статті розглядається один тип інтегро-функціонального рівняння з умовою та обмеженнями на шукану функцію, які носять інтегральний характер. Сформульовано умови сумісності вихідної задачі. Стосовно величин, що входять у задану задачу вимагається, що вони задовольняють ряд необхідних умов. Показано, що при виконанні цих умов вихідна задача буде рівносильною деякому інтегральному рівнянню Фредгольма другого роду з цілком неперервним оператором та додатковими умовами на шуканий розв'язок.

Крім основної задачі розглянуто також допоміжну задачу — задачу з керуванням, коли у випадку сумісності вводиться додаткова, корегуючи величина. Сформульовано та обґрунтовано умови сумісності вихідної задачі.

У роботі також приведено та обґрунтовано ітераційний та колокаційно-ітеративний методи побудови наближених розв’язків вихідної задачі з обмеженнями. Вказано алгоритм цих методів та достатні умови їх збіжності. При цьому, використовуємо той факт, що вихідна задача при виконанні певних умов є рівносильною інтегральному рівнянню з обмеженнями. Приведені методи побудови наближених розв’язків інтегро-функціонального рівняння з додатковими умовами можна успішно реалізувати на ЕОМ, створивши відповідні програми.

Ключові слова: *наближений розв’язок, додаткові умови, обмеження, умови сумісності, допоміжна задача, інтегро-функціональні рівняння, інтегральне рівняння, ітеративний метод, колокаційно-ітеративний метод, обернений оператор.*

Вступ. Розглянемо в просторі $L_2\left[a,b\right]$ інтегро-функціональне рівняння

$$y\left(x\right)=f\left(x\right)+\int_a^b K\left(x,t\right)y\left(t\right)dt+\int_a^b H\left(x,t\right)y\left(h(t)\right)dt, x\in\left[a,b\right] \qquad (1)$$

з умовою

$$y\left(x\right)=\psi(x), x\notin\left[a,b\right] \qquad (2)$$

та обмеженнями

$$\int_a^b \Phi_i(x)y(x)dx=\gamma_i, i=\overline{1,m}, \qquad (3)$$

де $f\left(x\right),\psi\left(x\right)$ — задані відповідно на $\left[a,b\right]$ та за його межами функції, а $y\left(x\right)$ — шукана функція. Лінійно-незалежна система функцій $\left\{\Phi_i(x)\right\}$ та числова множина $\left\{\gamma_i\right\}, i=\overline{1,m}$ — відомі. До рівняння (1) зводиться крайова задача для диференціального рівняння з відхиленням аргументу із запізненням, у випадку сталого запізнення $\Delta, h(x)=x-\Delta$.

Задачу (1)–(3) будемо вважати сумісною, якщо існує така функція $y(x)$, яка є розв’язком рівняння (1), що задовольняє умову (2) та обмеження (3).

Основна частина. Розглянемо випадок, коли функції $K(x,t)$, $H(x,t)$ в квадраті $\left[a,b\right]^2$ задовольняють умови:

$$\int_a^b\int_a^b K^2\left(x,t\right)dxdt = K^2 < \infty, \tag{4}$$

$$\int_a^b\int_a^b H^2\left(x,t\right)dxdt = H^2 < \infty, \tag{5}$$

функція $h(x)$ є неперервною разом із своєю похідною на $\left[a,b\right]$ і справджуються нерівності

$$x - h(x) \geq \Delta > 0, \tag{6}$$

$$h'(x) \geq l > 0. \tag{7}$$

Покажемо, що рівняння (1) з умовою (2) при виконанні умов (7) зводиться до інтегрального рівняння Фредгольма другого роду. Перепишемо другий інтеграл правої частини рівняння (1) з урахуванням умови (2) так

$$\int_a^b H\left(x,t\right)y\left(h(t)\right)dt = \int_a^{h^{-1}(a)} H\left(x,t\right)y\left(h(t)\right)dt + \int_{h^{-1}(a)}^b H\left(x,t\right)y\left(h(t)\right)dt =$$

$$= \int_a^{h^{-1}(a)} H\left(x,t\right)\psi\left(h(t)\right)dt + \int_{h^{-1}(a)}^b H\left(x,t\right)y\left(h(t)\right)dt =$$

$$= \varphi\left(x\right) + \int_{h^{-1}(a)}^b H\left(x,t\right)y\left(h(t)\right)dt,$$

де $\varphi\left(x\right)$ — можна знайти.

В силу умови (7) неперервна функція $s = h(t)$ буде зростаючою і для неї існуватиме обернена функція $t = h^{-1}(s), dt = \dfrac{ds}{h'\left(h^{-1}(s)\right)}$. (Нові межами інтегрування будуть числа.) Тоді останній інтеграл буде мати вигляд

$$\int_{h^{-1}(a)}^b H\left(x,t\right)y\left(h(t)\right)dt = \int_a^{h(b)} \frac{H\left(x,h^{-1}(s)\right)}{h'\left(h^{-1}(s)\right)}y(s)ds = \int_a^b \tilde{H}(x,s)y(s)ds,$$

$$\tilde{H}(x,s) = \begin{cases} \dfrac{H\left(x,h^{-1}(s)\right)}{h'\left(h^{-1}(s)\right)}, s \in \left[a,h\left(b\right)\right] \\ 0, s \in (h(b),b], x \in \left[a,b\right]. \end{cases}, \tag{8}$$

Слід відмітити що оператор $\tilde{H}$, який визначається рівністю

$$\left(\tilde{H}v\right)\left(x\right)=\int_a^b \tilde{H}(x,t)v(t)dt, \forall v(x)\in L_2\left[a,b\right], \quad (9)$$

з виконанням умов (5)–(7) як і оператор K, який має вигляд

$$\left(Kv\right)\left(x\right)=\int_a^b K(x,t)v(t)dt, \forall v(x)\in L_2\left[a,b\right],$$

буде Фредгольмовим.

Дійсно,

$$\int_a^b\int_a^b \tilde{H}^2\left(x,s\right)dxds=\int_a^b\int_a^b \frac{H^2\left(x,h^{-1}(s)\right)}{\left(h'\left(h^{-1}(s)\right)\right)^2}dxds\le\int_a^b\int_a^b \frac{H^2\left(x,h^{-1}(s)\right)}{h^2}dxds=$$

$$=\frac{1}{h^2}\int_a^b\int_a^b H^2\left(x,h^{-1}(s)\right)dxds\le\frac{H^2}{h^2}<\infty.$$

З урахуванням приведених міркувань рівняння (1) з умовою (2) запишеться таким чином

$$y\left(x\right)=f\left(x\right)+\int_a^b K\left(x,t\right)y\left(t\right)dt+\varphi\left(x\right)+\int_a^b \tilde{H}\left(x,s\right)y\left(s\right)ds,$$

або

$$y(x)=f_1(x)+\int_a^b T(x,t)y(t)dt, \quad (10)$$

де

$$f_1(x)=f(x)+\varphi\left(t\right)=f(t)+\int_a^{h^{-1}(a)} H\left(x,t\right)\psi\left(h(t)\right)dt, \quad (11)$$

$$T(x,t)=K(x,t)+\tilde{H}(x,t),(x,t)\in\left[a,b\right]^2. \quad (12)$$

Теорема 1. Рівняння (1) з умовою (2) при виконанні умов (4)–(7) зводиться до інтегрального рівняння (10) з цілком неперервним оператором T.

Це означає, що задача (1)–(3), в свою чергу, зводиться до аналогічної задачі (10), (3) для інтегрального рівняння Фредгольма другого роду і з її сумісності випливає сумісність вихідної задачі і навпаки. Дослідженню умов сумісності задачі (10), (3) присвячена низка наукових праць, зокрема [2, 3]. Встановлений факт еквівалентності задач (1)–(3) та (10), (3) щодо їх сумісності дає можливість проводити подальші дослідження стосовно формулювання умов сумісності, безпосередньо, для задачі (1)–(3) та розгляду питання застосування до цієї задачі наближених методів.

Задача з керуванням. Розглянемо в просторі $L_2\left[a,b\right]$ задачу

$$\tilde{y}\left(x\right)=f\left(x\right)+\int_a^b K\left(x,t\right)\tilde{y}\left(t\right)dt+\int_a^b H\left(x,t\right)\tilde{y}\left(h(t)\right)dt, x\in\left[a,b\right], \quad (13)$$

$$\tilde{y}\left(x\right)=\psi(x), x\notin\left[a,b\right], \quad (14)$$

$$\int_a^b \Phi_i(x)\tilde{y}(x)dx=\gamma_i+\int_a^b \Phi_i(x)u(x)dx, i=\overline{1,m}, \quad (15)$$

де $\tilde{y}(x)$ і $u(x)$ — шукані функції, причому

$$u(x)=\sum_{j=1}^{m}\lambda_j\xi_j(x), \quad (16)$$

$\left\{\xi_j(x)\right\}, j=\overline{1,m},$ — деяка лінійно-незалежна система функцій і $\xi_j(x)=0$, коли $x\notin\left[a;b\right]$.

Покажемо, що задача (13)–(15) еквівалентна деякому рівнянню без обмежень. Введемо заміну

$$\tilde{y}\left(x\right)=z\left(x\right)+\int_a^b K\left(x;t\right)u\left(t\right)dt+\int_a^b H\left(x;t\right)u\left(h(t)\right)dt, x\in\left[a;b\right], \quad (17)$$

яку будемо розглядати, як допоміжну задачу, вважаючи в ній функцію $z\left(x\right)$ заданою, а функції $\tilde{y}\left(x\right)$ та $u\left(x\right)$ треба знайти. Підставляючи (16) в (17), а потім (16) та (17) в рівність (15), отримаємо

$$\int_a^b \Phi_i(x)\left\{z(x)+\sum_{j=1}^{m}\lambda_j\left(\int_a^b K(x,t)\xi_j(t)dt+\int_a^b H(x,t)\xi_j(h(t))dt\right)\right\}dx=$$

$$=\gamma_i+\int_a^b \Phi_i(x)\left(\sum_{j=1}^{m}\lambda_j\xi_j(x)\right)dx, i=\overline{1,m},$$

Перепишемо цю рівність так

$$\int_a^b \Phi_i(x)\left\{\sum_{j=1}^{m}\lambda_j\left(\xi_j(x)-\int_a^b K(x,t)\xi_j(t)dt-\int_a^b H(x,t)\xi_j(h(t))dt\right)\right\}dx=$$

$$=\int_a^b \Phi_i(x)z(x)dx-\gamma_i, i=\overline{1,m}.$$

Нехай

$$\eta_i(x)=\xi_j(x)-\int_a^b K(x,t)\xi_j(t)dt-\int_a^b H(x,t)\xi_j(h(t))dt. \quad (18)$$

Позначивши

$$\int_a^b \Phi_i(x)\eta_i(x)dx = a_{ij}, b_i = \int_a^b \Phi_i(x)z(x)dx - \gamma_i, i, j = \overline{1,m}. \quad (19)$$

Останню рівність запишемо так

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ij}\lambda_j = b_i, i = \overline{1,m}. \quad (20)$$

Отримали систему лінійних алгебраїчних рівнянь. Розглянемо випадок, коли матриця цієї системи, яку позначимо через Λ, невироджена і нехай $\Lambda^{-1} = (c_{ij}), i, j = \overline{1,m}$ — обернена матриця. Тоді

$$\lambda_j = \sum_{j=1}^{m} c_{ij} b_j, j = \overline{1,m}, \quad (21)$$

і розв'язки допоміжної задачі (17), (15) запишуться так

$$u(x) = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \xi_j(x) = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{m} c_{ji} b_i \xi_j(x) = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{m} c_{ij}\left(\int_a^b \Phi_i(t)z(t)dt - \gamma_i\right)\xi_j(x) =$$

$$= \int_a^b \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{m} c_{ji} b_i \xi_j(x)\Phi_i(t)z(t)dt - \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{m} c_{ij}\gamma_i \xi_j(x).$$

Тобто

$$u(x) = \int_a^b R(x,t)z(t)dt - w(x), \quad (22)$$

$$R(x,t) = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{m} c_{ij}\xi_j(x)\Phi_i(t), \quad (23)$$

$$w(x) = \sum_{j=1}^{m} \sigma_j \xi_j(x), \sigma_j = \sum_{j=1}^{m} c_{ji}\gamma_i, j = \overline{1,m}, \quad (24)$$

$$\tilde{y}(x) = u(x) + z(x) - \sum_{j=1}^{m} \lambda_i \eta_i(x) = u(x) + z(x) - \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{m} c_{ji} b_i \eta_j(x) =$$

$$= u(x) + z(x) - \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{m} c_{ji}\left(\int_a^b \Phi_i(t)z(t)dt - \gamma_i\right)\eta_j(x) =$$

$$= u(x) + z(x) - \int_a^b \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{m} c_{ji}\Phi_i(t)\eta_i(t)dt - \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{m} c_{ji}\gamma_i \eta_j(x) =$$

$$= u(x) + b(x) + \int_a^b G(x,t)z(t)dt,$$

$$G(x,t) = \delta(x-t) - \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{m} c_{ji}\eta_j(x)\Phi_i(t), \tag{25}$$

$$b(x) = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{m} c_{ji}\gamma_i\eta_j(x) = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{m}\sigma_i\eta_j(x). \tag{26}$$

Таким чином, має місце наступна теорема.

Теорема 2. Єдиний розв'язок допоміжної задачі (17), (15) має вигляд

$$u(x) = \int_a^b R(x,t)z(t)dt - w(x), y(x) = u(x) + b(x) + \int_a^b G(x,t)z(t)dt.$$

Задача (1)–(3) сумісна лише тоді, коли розв'язок $z^*(x)$ рівняння

$$z(x) = g(x) + \int_a^b M(x,t)z(t)dt, \tag{27}$$

задовольняє умову

$$\int_a^b G(x,t)z^*(t)dt = w(x), \tag{28}$$

де

$$g(x) = f(x) + \int_a^b K(x,t)z(t)dt + \int_a^b H(x,t)b(h(t))dt, \tag{29}$$

$$M(x,t) = \int_a^b K(x,\xi)G(\xi,t)d\xi + \int_a^b H(x,\xi)G(h(\xi),t)dt. \tag{30}$$

Можна також показати, що умова (28) буде рівносильною умові

$$\int_a^b \Gamma_j(t)z^*(t)dt = \sigma_j, j = \overline{1,m}, \tag{31}$$

де

$$\Gamma_j(t) = \sum_{i=1}^{m} c_{ji}\Phi_i(t). \tag{32}$$

Ітераційний метод. Ідея ітераційного методу стосовно задачі (1)–(3) полягає в тому, що послідовні наближення до шуканого розв'язку знаходимо на підставі формул

$$z_k(x) = f(x) + \int_a^b K(x;t)y_{k-1}(t)dt + \int_a^b H(x;t)y_{k-1}(h(t))dt, x \in [a;b], \tag{33}$$

$$y_{k-1}(x) = \psi(x), x \notin [a;b], \tag{34}$$

$$\tilde{y}_k(x) = z_k(x) + \int_a^b K(x;t)u_k(t)dt + \int_a^b H(x;t)u_k(h(t))dt, x \in [a;b], \quad (35)$$

$$u_k(x) = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j^k \xi_i(x), x \in [a,b], u_k(x) = 0, x \notin [a,b], \quad (36)$$

$$\int_a^b \Phi_i(x) y_k(x) dx = \gamma_i, i = 1, m, y_k(x) = \tilde{y}_k(x) - u_k(x). \quad (37)$$

Для визначення невідомих параметрів $\lambda_j^k, j = \overline{1,m}$, отримаємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь. Дійсно, на підставі наведених вище формул матимемо

$$y_k(x) = z_k(x) - \sum_{j=1}^{m} \lambda_j^k \eta_i(x). \quad (38)$$

Якщо підставити цю функцію в першу з формул (37) і скористатись позначенням (19), то отримаємо

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ij} \lambda_j^k = b^k, i = \overline{1,m}, \quad (39)$$

де

$$b_i^k = \int_a^b \Phi_i(x) z_k(x) dx - \gamma_i, i = \overline{1,m}. \quad (40)$$

Зокрема, приходимо до висновку, що має місце наступна теорема.

Теорема 3. Метод (33)–(37) буде збіжним, якщо матриця Λ невироджена, задача (1)–(3) сумісна і $\rho(M) < 1$, причому послідовність $\{y_k(x)\}$ збігатиметься до єдиного розв'язку $y^*(x)$ задачі (1)–(3), а послідовність $\{u_k(x)\}$ збігатиметься до нуля.

Колокаційно-ітеративний метод. Послідовні наближення до шуканого розв'язку задачі (1)–(2) знаходимо на підставі формул:

$$z_k(x) = f(x) + \int_a^b K(x;t)\left(y_{k-1}(t) + w_k(t)\right)dt + \int_a^b H(x;t)\left(y_{k-1}(h(t)) + w_k(h(t)\right)dt, x \in [a;b], \quad (41)$$

$$y_{k-1}(x) = \psi(x), x \notin [a;b], \quad (42)$$

$$\tilde{y}_k(x) = z_k(x) + \int_a^b K(x;t)u_k(t)dt + \int_a^b H(x;t)u_k(h(t))dt, x \in [a;b], \quad (43)$$

$$u_k(x) = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j^k \xi_i(x), x \in [a,b], u_k(x) = 0, x \notin [a,b], \quad (44)$$

$$w_k(x) = \sum_{s=1}^{n} a_s^k \varphi_s(x), \quad (45)$$

де $\{\varphi_s(x)\}_{s=1}^{n}$ — деяка задана та лінійно-незалежна на $[a,b]$ система функцій. Для визначення невідомих параметрів λ_j^k, як і раніше, отримуємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь, а невідомі коефіцієнти a_s^k у формулі (45) знаходимо з умови

$$w_k(x_i) = z_k(x_i) - z_{k-i}(x_i) = 0, \quad (46)$$

де $x_i \in [a,b], i = \overline{1,n}$ — вузли колокації.

Висновки. Можна показати, що справедливим є наступне твердження.

Теорема 4. У випадку сумісності задачі (1)–(3) послідовні наближення $\{\tilde{y}_k(x)\}$, побудовані згідно методу (41)–(46), будуть при деякому n збігатися до точного розв'язку цієї задачі, причому швидкість збіжності зростатиме із збільшенням n. При $w_k(x) \equiv 0$, як частковий випадок, отримаємо ітеративний метод (33)–(40).

Список використаних джерел:

1. Вайникко Г. М. О сходимости и устойчивости метода коллокации / Г. М. Вайникко // Дифер. уравнения. — 1965. — Вып. 1, № 2. — С. 244–254.
2. Лучка А. Ю. Проекционно-итеративные методы решения линейных дифференциальных и интегральных уравнений / А. Ю. Лучка. — К. : Наук. думка, 1980. — 264 с.
3. Лучка А. Ю. Интегральные уравнения и методы их решения / А. Ю. Лучка // Кибернетика и систем. анализ. — 1996. — № 3. — С. 82–96.
4. Поселюжна В. Б. Колокаційно-ітеративний метод розв'язування диференціальних та інтегральних рівнянь / В. Б. Поселюжна, Л. М. Семчишин. — Тернопіль : ТНЕУ, 2013. — 203 с.

THE CLOCATION-ITERATIVE METHOD OF SOLVING INTEGRO-FUNCTIONAL EQUATIONS WITH RESTRICTIONS

Integro-functional equations are widely used in various fields of science and science (in particular, to such equations with a deviation of the argument as a neutral type and with a delay).

In some cases, solving these equations is known additional information. Therefore, it is important not only the solution of this equation but also the establishment of compatibility conditions of the corresponding

problem, that is, one needs to find out if the desired solution of the problem with the additional conditions is consistent.

A set of scientific papers is devoted to the establishment of compatibility conditions of problems of this type with respect to different types of operator equations and the development of methods for constructing their solutions [1–4].

The article deals with one type of integro-functional equation with condition and restrictions on the desired function, which are integral in nature. The terms of the compatibility of the original problem are formulated. With regard to the values included in the given task, it is required that they satisfy a number of necessary conditions. It is shown that under these conditions the initial problem will be equivalent to some Fredholm integral equation of a second kind with a completely continuous operator and additional conditions on the desired solution.

In addition to the main task also considered ancillary task — a task with management, when in the case of compatibility, an additional, adjusting value is introduced. The terms of compatibility of the original problem are formulated and substantiated.

In the paper, the iterative and colocation-iterative methods of constructing approximate solutions of the original problem with constraints are also presented and grounded. The algorithm of these methods and sufficient conditions of their convergence are indicated. At the same time, we use the fact that the initial problem in the fulfillment of certain conditions is equivalent to an integral equation with constraints. The presented methods of constructing approximate solutions of the integro-functional equation with additional conditions can be successfully implemented on the computer by creating the corresponding programs.

Key words: *approximate solution, additional conditions, restrictions, compatibility conditions, auxiliary problem, integro-functional equations, integral equation, iterative method, collocation-iterative method, inverse operator.*

Отримано: 22.11.2018