negative, tehn lexicographic minimal if formed as $s-1$ first and $k-s+1$ (k is the dimension of space) last elements of multiset which are in nondecreasing order. For problems with linear-fractional function we obtain the method of forming solution of lexicographic combinatorial problem on arrangements, if any minimal (for minimization problems) or any maximal (for maximization problems) of objective function on given set of arrangements is known. In this case ordering of components of the extremal is carried out taking into account ordering for nonincreasing of coefficients of special linear function.

Key words: *combinatorial optimization, Euclidean problems of lexicographic combinatorial optimization, optimization problems on arrangements.*

Одержано 31.01.2019

УДК 512.61:519.61
DOI: 10.32626/2308-5878.2019-19.11-17

Є. Ф. Галба, д-р фіз.-мат. наук,
Н. А. Варенюк, канд. фіз.-мат. наук,
Н. І. Тукалевська, канд. фіз.-мат. наук

Інститут кібернетики імені В. М. Глушкова НАН України, м. Київ

ЗВАЖЕНЕ СИНГУЛЯРНЕ РОЗВИНЕННЯ МАТРИЦЬ ТА МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ ЗВАЖЕНОЇ ПСЕВДОІНВЕРСІЇ З ВИРОДЖЕНИМИ ВАГАМИ

На основі зваженого сингулярного розвинення матриць з виродженими вагами отримано зображення зважених псевдообернених матриць з виродженими вагами та їх розвинення в матричні степеневі ряди і матричні степеневі добутки. Отримано граничні зображення зважених псевдообернених матриць, на основі яких побудовано та досліджено регуляризовані методи обчислення зважених нормальних псевдорозв'язків з виродженими вагами.

Ключові слова: *зважене сингулярне розвинення матриць з виродженими вагами, зважені псевдообернені матриці.*

Вступ. Вперше сингулярне розвинення матриць отримано у монографії [1]. У роботах [2, 3] отримано зважене сингулярне розвинення матриць з додатно-означеними вагами. У ряді робіт (див. [4, 5] та наявну там бібліографію) отримано зважене сингулярне розвинення матриць з виродженими вагами на основі ортогональних, зважених ортогональних та зважених псевдоортогональних матриць. У цих роботах визначені достатні умови існування запропонованих варіантів зваженого сингулярного розвинення матриць з виродженими вагами, а у роботі [4] визначено необхідні та достатні умови, при яких існує побудоване зважене сингулярне розвинення матриць з виродженими вагами на основі ортогональних матриць.

У роботі [6] вперше дано визначення одного із варіантів зважених псевдообернених матриць з виродженими вагами і визначені необхідні та достатні умови існування та єдиності розглянутого варіанта зважених псевдообернених матриць. У ряді робіт (див. [5, 7] та наявну там бібліографію) досліджені інші варіанти зважених псевдообернених матриць з виродженими вагами. Визначені необхідні та достатні умови існування та єдиності розглянутих зважених псевдообернених матриць та встановлено їх зв'язок із зваженими нормальними псевдорозв'язками.

У представленій статті використовується зважене сингулярне розвинення матриць з виродженими вагами, запропоноване та досліджене у роботі [4], для встановлення властивостей, розглянутих в роботі [7] зважених псевдообернених матриць з виродженими вагами. Отримано розвинення зважених псевдообернених матриць з виродженими вагами в матричні степеневі ряди і матричні степеневі добутки. Отримано многочленні граничні зображення цих матриць, на основі яких побудовано та досліджено регуляризовані методи обчислення зважених нормальних псевдорозв'язків з виродженими вагами.

Позначення, визначення. Зазначимо, що в подальшому скрізь припускається дійсність використовуваних скалярів, векторів, матриць та просторів. Позначимо R^n — n-вимірний векторний простір над полем дійсних чисел, де вектори є матриці розміру $n \times 1$. Нехай H — додатно-означена або ж додатно-напіввизначена матриця. $R^n(H)$ позначатимемо евклідів простір у випадку додатно-означеної метрики або ж псевдоевклідів у випадку невід'ємної метрики, що введена скалярним добутком $(u, v)_H = (Hu, v)_E$, де $(u, v)_E = u^T v$. Норму (напівнорму) в $R^n(H)$ введемо формулою $\|u\|_H = (u, u)_H^{1/2}$. У випадку додатно-напіввизначеної матриці H через $\bar{R}^n(H) \subset R^n(H)$ і $\bar{R}^n(H_{EE}^+) \subset R^n(H_{EE}^+)$ позначатимемо підпростір векторів u, що задовольняють умову $HH_{EE}^+ u = H^{1/2} H_{EE}^{+1/2} u = u$, де позначено $H_{EE}^{+1/2} = (H^{1/2})_{EE}^+$, H_{EE}^+ — псевдообернена матриця Мура–Пенроуза до матриці H, а E — одинична матриця.

Зазначимо, що напівнорми $\|\cdot\|_H$, $\|\cdot\|_{H_{EE}^+}$ для векторів у $R^n(H)$, $R^n(H_{EE}^+)$ будуть нормами в $\bar{R}^n(H)$, $\bar{R}^n(H_{EE}^+)$ [7].

Визначимо норму прямокутної матриці. Нехай $A \in R^{m\times n}$, а $H \in R^{m\times m}$ і $V \in R^{n\times n}$ — додатно-напіввизначені матриці, x — довільний вектор із R^n. Припускаємо, що виконуються умови $rk(HA) =$

$= rk(A)$, $rk(AV) = rk(A)$. Для множини матриць A, що задовольняють ці умови, норму введемо співвідношенням

$$\|A\|_{HV} = \sup_{x \neq 0} \frac{\left\|H^{1/2} AVx\right\|_{E_m}}{\|x\|_{E_n}}. \tag{1}$$

Нехай $A \in R^{m \times n}$, $X \in R^{n \times m}$, а $B \in R^{m \times m}$ і $C \in R^{n \times n}$ — симетричні додатно-напіввизначені матриці. Тоді зважена псевдообернена до A матриця в роботі [7] визначається як матриця $X = A^+_{BC}$, що задовольняє умови

$$AXA = A,\ XAX = X,\ (BAX)^T = BAX,\ (CXA)^T = CXA. \tag{2}$$

У роботі [7] визначені необхідні та достатні умови існування єдиного розв'язку системи матричних рівнянь (2) з виродженими вагами.

Теорема 1. Для того, щоб система матричних рівнянь (2) з виродженими вагами мала єдиний розв'язок $X = A^+_{BC}$, необхідно та достатньо виконання умов

$$rk(BA) = rk(A), \quad AC^+_{EE}C = A. \tag{3}$$

Нехай

$$Ax = f,\ x \in R^n,\ f \in R^m, \tag{4}$$

— система лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР) з $A \in R^{m \times n}$.

У роботі [7] встановлено зв'язок між зваженими псевдооберненими матрицями з виродженими вагами, визначеними умовами (2), (3) і зваженими нормальними псевдорозв'язками.

Теорема 2. Вектор $x^+ = A^+_{BC} f$, де матриця A^+_{BC} визначена умовами (2), (3), є в $\bar{R}^n(C)$ зваженим нормальним псевдорозв'язком СЛАР (4) з додатно-напіввизначеними вагами B і C, а саме, єдиним розв'язком задачі: знайти

$$\min_{x \in \bar{R}^n(C) \cap \Omega} \|x\|_C, \quad \Omega = Arg \min_{x \in R^n} \|Ax - f\|_B. \tag{5}$$

Зважене сингулярне розвинення та зважене псевдообернення матриць. В роботі [4] отримано зважений сингулярний розклад матриць с виродженими вагами на основі ортогональних матриць. Визначено необхідні і достатні умови існування цього розвинення.

Теорема 3. Нехай $A \in R^{m \times n}$ і виконуються умови

$$B^+_{EE} BA = A,\ AC^+_{EE}C = A, \tag{6}$$

тоді:

1) для матриці A існують ортогональні матриці $U \in R^{m \times m}$ і $V \in R^{n \times n}$ такі, що

$$U^T B^{1/2} A C_{EE}^{+1/2} V = \Sigma = \begin{cases} \left\| diag(\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_r, 0, ..., 0) \mathrm{O}_m^{n-m} \right\|, \ m \le n \\ \left\| \begin{matrix} diag(\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_r, 0, ..., 0) \\ \mathrm{O}_{m-n}^n \end{matrix} \right\|, \ m \ge n \end{cases}$$

і

$$A = B_{EE}^{+1/2} U \Sigma V^T C^{1/2}, \tag{7}$$

де r — ранг матриці A, стовпчики матриці U — ортонормовані в $R^m(E)$ власні вектори матриці $B^{1/2} A C_{EE}^{+} A^T B^{1/2}$, стовпчики матриці V — ортонормовані в $R^n(E)$ власні вектори матриці $C_{EE}^{+1/2} A^T B A C_{EE}^{+1/2}$, σ_i, $i = 1,\ldots, r$ — квадратні корені із ненульових власних значень матриці $B^{1/2} A C_{EE}^{+} A^T B^{1/2}$, $\mathrm{O}_k^l \in R^{k \times l}$ — нульова матриця;

2) умови (6) є необхідними і достатніми для існування зваженого сингулярного розвинення матриці A вигляду (7).

Отримано розвинення зважених псевдообернених матриць на основі зваженого сингулярного розвинення матриць.

Теорема 4. Зважена псевдообернена матриця для матриці A, визначена умовами (2), при виконанні умов (6) має розклад

$$A_{BC}^{+} = C_{EE}^{+1/2} V \Sigma_{EE}^{+} U^T B^{1/2}, \tag{8}$$

де матриці V, U, B, C визначені в теоремі 3, а матриця Σ_{EE}^{+} — псевдообернена матриця Мура–Пенроуза до матриці Σ, визначеної в теоремі 3.

Розвинення в матричні степеневі ряди і добутки зважених псевдообернених матриць з виродженими вагами. На основі зваженого сингулярного розвинення зважених псевдообернених матриць з виродженими вагами (див. теореми 3, 4) отримано і досліджено [4] розвинення в матричні степеневі ряди і добутки з від'ємними показниками степенів зважених псевдообернених матриць, визначених умовами (2), (6).

Теорема 5. Для довільної матриці $A \ne 0 \in R^{m \times n}$, симетричних додатно-напіввизначених матриць $B \in R^{m \times m}$ і $C \in R^{n \times n}$, що задовольняють умови (2), (6), і для дійсного числа $0 < \delta < \infty$ має місце наступний розклад зважених псевдообернених матриць, визначених умовами (2), (6), в матричні степеневі ряди

$$A_{BC}^{+} = \sum_{k=1}^{\infty} \delta^{k-1} (C_{EE}^{+} A^T B A + \delta E)^{-k} C_{EE}^{+} A^T B, \tag{9}$$

причому,

$$\left\| A_{BC}^{+} - A_{\delta, p}^{+} \right\|_{C B_{EE}^{+1/2}} \le \sigma_*^{-1} \delta^p (\delta + \sigma_*^2)^{-p}, \tag{10}$$

де $A^{+}_{\delta,p} = \sum_{k=1}^{p} \delta^{k-1}(C^{+}_{EE}A^{T}BA + \delta E)^{-k}C^{+}_{EE}A^{T}B, \quad p = 1, 2, \dots, \quad \sigma_{*}$ — мінімальний ненульовий діагональний елемент матриці Σ, визначеної в теоремі 3.

При виконанні припущень теореми 5 маємо наступний розклад зваженої псевдооберненої матриці з виродженими вагами в матричний степеневий добуток

$$A^{+}_{BC} = \prod_{k=0}^{\infty}\{E + \delta^{2^k}(C^{+}_{EE}A^{T}BA + \delta E)^{-(2^k)}\}(C^{+}_{EE}A^{T}BA + \delta E)^{-1}C^{+}_{EE}A^{T}B. \quad (11)$$

Позначимо

$$A^{+}_{\delta,n} = \prod_{k=0}^{n-1}\{E + \delta^{2^k}(C^{+}_{EE}A^{T}BA + \delta E)^{-(2^k)}\}(C^{+}_{EE}A^{T}BA + \delta E)^{-1}C^{+}_{EE}A^{T}B, \; n = 1, 2...$$

Тоді в силу оцінки (10) отримаємо

$$\left\| A^{+}_{BC} - A^{+}_{\delta,n} \right\|_{CB^{+1/2}_{EE}} \le \sigma_{*}^{-1}\delta^{2^n}(\delta + \sigma_{*}^{2})^{-(2^n)}. \quad (12)$$

Граничні зображення зважених псевдообернених матриць і регуляризація задач. Із оцінки (10) випливає, що для довільного $p = 1, 2, \dots$ маємо наступне граничне представлення зваженої псевдооберненої матриці:

$$A^{+}_{BC} = \lim_{\delta \to +0} \sum_{k=1}^{p} \delta^{k-1}(C^{+}_{EE}A^{T}BA + \delta E)^{-k}C^{+}_{EE}A^{T}B, \quad (13)$$

а із оцінки (12) для довільного $n = 1, 2, \dots$ маємо

$$A^{+}_{BC} = \lim_{\delta \to +0} \prod_{k=0}^{n-1}\{E + \delta^{2^k}(C^{+}_{EE}A^{T}BA + \delta E)^{-(2^k)}\}(C^{+}_{EE}A^{T}BA + \delta E)^{-1}C^{+}_{EE}A^{T}B. \quad (14)$$

Розвинення зважених псевдообернених матриць у матричні степеневі ряди і добутки можна використовувати для побудови регуляризованих ітераційних методів їх обчислення [4].

На основі граничних представлень зважених псевдообернених матриць можна також запропонувати регуляризовані задачі для обчислення зважених нормальних псевдорозв'язків. Згідно з граничним представленням (13) наближення до розв'язку задачі (5) при достаньо малому δ можна отримати розв'язуючи СЛАР

$$(C^{+}_{EE}A^{T}BA + \delta E)^{p-m}x = \sum_{k=1}^{p} \delta^{k-1}(C^{+}_{EE}A^{T}BA + \delta E)^{p-m-k}C^{+}_{EE}A^{T}Bf, \quad (15)$$

де $m = 0, 1, \dots, p-1$.

Оцінку похибки наближення розв'язку задачі (5) розв'язком однієї із систем (15) дає наступна теорема.

Теорема 6. Нехай x^{+} — розв'язок задачі (5), а $x_{\delta,p}$ — розв'язок однієї із систем (15), тоді має місце оцінка

$$\left\| x^{+} - x_{\delta,p} \right\|_C \le \sigma_*^{-1} \delta^p (\delta + \sigma_*^2)^{-p} \left\| f \right\|_B, \qquad (16)$$

де σ_* — мінімальний ненульовий діагональний елемент матриці Σ, визначеної в теоремі 3.

На основі формули (14) наближення до розв'язку задачі (5) при досить малому δ можна отримати розв'язуючи СЛАР

$$(C_{EE}^{+} A^T BA + \delta E)^{n-m} x =$$
$$= \prod_{k=0}^{n-1} \{ (C_{EE}^{+} A^T BA + \delta E)^{n-m-1} + \delta^{2^k} (C_{EE}^{+} A^T BA + \delta E)^{n-m-(2^k)-1} \} C_{EE}^{+} A^T Bf, \qquad (17)$$

де $m = 0,1,...,n-1$.

Оцінку похибки наближення розв'язку задачі (5) розв'язком систем (17) дає наступна теорема.

Теорема 7. Нехай x^{+} — розв'язок задачі (5), а $x_{\delta,n}$ — розв'язок однієї із систем (17), тоді має місце оцінка

$$\left\| x^{+} - x_{\delta,n} \right\|_C \le \sigma_*^{-1} \delta^{2^n} (\delta + \sigma_*^2)^{-(2^n)} \left\| f \right\|_B.$$

Висновки. У роботі встановлено зв'язок зваженого сингулярного розвинення матриць з виродженими вагами із зваженими псевдооберненими матрицями з виродженими вагами. Досліджено фундаментальні властивості зважених псевдообернених матриць з виродженими вагами. Побудовано регуляризовані методи обчислення зважених нормальних псевдорозв'язків з виродженими вагами. Перспективними з даного напряму є дослідження зважених псевдообернених матриць з індефінітними ваговими матрицями.

Список використаних джерел:

1. Forsythe G., Moler C. Computer solution of linear algebraic systems. Englewood Cliffs, N.J. : Prentice-Hall, 1967. 148 p.
2. Van Loan C.F. Generalizing the singular value decomposition. SIAM *J. Numer. Anal.* 1976. Vol. 13, № 1. P. 76–83.
3. Галба Е. Ф. Взвешенное сингулярное разложение и взвешенное псевдообращение матриц. *Укр. мат. журн.* 1996. 48, № 10. С. 1426–1430.
4. Сергиенко И. В., Галба Е. Ф., Дейнека В. С. Необходимые и достаточные условия существования взвешенного сингулярного разложения матриц с вырожденными весами. *Укр. мат. журн*. 2015. Вип. 67. № 3. С. 406–426.
5. Сергиенко И. В., Галба Е. Ф. Взвешенная псевдоинверсия с вырожденными весами. *Кибернетика и системный анализ*. 2016. № 5. С. 56–80.
6. Ward J. F., Boullion T. L., Lewis T. O. Weighted pseudoinverses with singular weights. *SIAM J. Appl. Math.* 1971. Vol. 21. № 3. P. 480–482.
7. Галба Е.Ф., Дейнека В.С., Сергиенко И.В. Взвешенные псевдообратные матрицы и взвешенные нормальные псевдорешения с вырожденными весами. *Журн. вычисл. математики и мат. физики.* 2009. Вип. 49. № 8. С. 1347–1363.

WEIGHTED SINGULAR-VALUED DECOMPOSITION OF MATRICES AND METHODS OF SOLVING PROBLEMS WEIGHTED PSEUDOINVERSE WITH SINGULAR WEIGHTS

Weighted pseudoinverse matrices with singular weights and their expansions into matrix power series and matrix power products are obtained based on weighted singular-valued decomposition of matrices with singular weights. Boundary representations of weighted pseudoinverse matrices with singular weights are obtained. Regularization methods for the calculation of weighted normal pseudosolutions with singular weights are constructed and investigated.

Key words: *weighted singular-valued decomposition of matrices with singular weights, weighted pseudoinverse of matrices.*

Одержано 31.02.2019

UDC 330.341
DOI: 10.32626/2308-5878.2019-19.17-21

J.-F. Emmenegger, Dr.,
D. Chable, Dipl. math.,
H. A. Nour Eldin, Prof. Dr.,
H. Knolle, Dr. math.

University of Fribourg, Switzerland

SRAFFA AND LEONTIEF REVISITED. MATHEMATICAL METHODS AND MODELS OF A CIRCULAR ECONOMY (BOOK PRESENTATION)

The main purpose of the present book is to reveal, elucidate and illustrate the mathematical background of Sraffa's theory didactically in detail with the means of modern *matrix algebra* and the corresponding fundamental theorems. Our book is also a contribution to the increasing call for alternative approaches to the understanding of the realities of today economic activity.

Key words: *economics, productive Leontief model, Frobenius number.*

Economics[1] *is a decision-based and number-based science.*
«Currency and market decisions in a decision-based economy» [1]
«All what we are doing should be based theoretically».
Andrei Broder, scientist, Google (~2017)

---

[1] The Webster New Collegiate Dictionary, p. 260, defines the term «Economics» as follows: *«The science that investigates the conditions and laws affecting the production, distribution and consumption of wealth, or material means of satisfying human desires; political economy».*