УДК 518.9
DOI: 10.32626/2308-5878.2019-19.65-71

А. С. Макаренко, д-р физ.-мат. наук, профессор

Национальный технический университет Украины
«Киевский политехнический институт имени Игоря Сикорского», г. Киев

НОВЫЕ ПОДХОДЫ К СОКРАЩЕНИЮ ИСКУССТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ В ЧИСЛЕННЫХ РЕШЕНИЯХ. АНТИДИФФУЗИЯ, АНТИДИСПЕРСИЯ И ЛАНГОЛЬЕРЫ

Две наиболее известные ошибки — это искусственное сглаживание решения и колебания в решениях вблизи мест с большими производными решений (вблизи фронтов решения). Некоторые методы улучшения численных решений эволюционных уравнений предложены на основе теоретических соображений. В качестве первых примеров предложены искусственная вязкость и искусственная дисперсия для разностных схем газовой динамики. Предлагается новый класс инструментов для улучшения численных решений «лангольеры». «Лангольеры» — это специальные операторы разностей, которые должны применяться на каждом временном шаге после запуска оригинальных разностных схем. Конструкция «лангольеров» позволяет снизить диссипативные и дисперсионные ошибки схем. Примерами являются антидиффузионные, антидисперсионные и специальные схемы.

Ключевые слова: *численные схемы, дисперсия, дисперсия, негладкие растворы, антидисперсия, «Langoliers», нелинейные задачи.*

Вступление. Хорошо известно, что разностные схемы для приближенных решений эволюционных уравнений обычно имеют некоторые ошибки в пределах теоретической точности схем [1–4]. Две наиболее известные ошибки — это искусственное сглаживание решения и колебания в решениях вблизи мест с большими производными решений (вблизи фронтов решения). Для предотвращения таких эффектов предложено множество специальных инструментов: искусственная вязкость в схемах [1], искусственная дисперсия в схемах [3, 5, 6], антидиффузионные [7], ENO (по существу не-колебательные) схемы [8] и т. д. Но проблема остается открытой, особенно в разработке специальных схем.

Из-за усложнения уравнений, которые следует использовать для моделирования развивающихся сред и систем в гидродинамике, газодинамике, плазме, реологии, проблема разработки более точных разностных схем очень важна. Для достижения этой цели необходимо знать особенности поведения числовых схем, признаки «артефактов» в численных решениях и лучшее теоретическое понимание разностных схем как объектов.

Поэтому тут некоторые методы улучшения численных решений эволюционных уравнений предлагаются на основе теоретических соображений. В случае линейных уравнений предлагаемые инструменты могут повысить порядок точности. В качестве первых примеров предложены искусственная вязкость и искусственная дисперсия для разностных схем газовой динамики. Предлагается новый класс инструментов для улучшения численных решений «лангольеры». Конструкция «лангольеров» позволяет снизить диссипативные и дисперсионные ошибки схем. Таким образом, «лангольеры» — это реализация новой идеи повышения точности (с использованием дополнительного шага по времени), которая является вспомогательной для идеи использования пространственно расширенного шаблона. Примерами являются антидиффузионные, антидисперсионные и специально построенные разностные схемы.

Различные иллюстративные примеры таких инструментов рассматриваются для уравнений газовой динамики и для волнового уравнения. Также в качестве примеров рассмотрены некоторые вычисления новых многомасштабных задач: гиперболическая модификация уравнения Бюргерса и взрывные решения.

1. Диссипация и дисперсия конечно-разностных схем. Термины «диссипация» и «дисперсия» разностных схем имеют строгий смысл в случае, когда исходные уравнения в частных производных являются линейными и имеют постоянные коэффициенты. В таком случае разностные гармоники разностной схемы (или гармоника непрерывного аналога разностной схемы) являются адекватным инструментом для исследования свойств численных схем. Такой подход хорошо известен и предлагается в любом учебнике по численным методам (например, см. [1–3, 9]).

Для каждой проблемы или процесса результаты анализа имеют конкретный вид. Но общая схема исследований остается прежней, то есть анализ гармоник и их дисперсионного соотношения проводится для начального условия и для метода его аппроксимации. Поэтому в дальнейшем мы проиллюстрируем схему методов, а также средств улучшения на простейшем примере — уравнении переноса или адвекции.

Как пример, мы рассмотрим задачу Коши для уравнения переноса:

$$Lu = \frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \; a = \mathrm{const} \tag{1}$$

с начальными условиями. Для иллюстрации рассмотрим также общий класс явных численных схем для уравнения (1)

$$\Lambda y = \frac{y_j^{n+1} - y_j^n}{\tau} + \sum_{l=-m_1}^{m_2} a_i y_{j+l}^n = 0 \; . \tag{2}$$

Для проведения анализа гармоник схемы (2) рассмотрим решения схем специального вида (числовая гармоника):

$$y_j^n = q_k^n \exp(ikx_j)\,. \tag{3}$$

Коэффициент перехода может быть представлен в виде также как

$$q_k = \rho_k \exp(i\varphi_k)\,. \tag{4}$$

В формуле (4) $\rho_k = \mathrm{mod}\, q_k = [(\mathrm{Re}\, q_k)^2 + (\mathrm{Im}\, q_k)^2]^{1/2}$ модуль коэффициента перехода $\varphi_k = -\arg q_k = \mathrm{arctg}(-\mathrm{Im}\, q_k / \mathrm{Re}\, q_k)$. Назовем $v_k = q_k / k\tau$ фазовую скорость k-й гармоники. Вводятся непрерывные аналоги модуля для коэффициента перехода $\rho(\zeta) = a\varphi(\zeta)/\gamma\zeta$, от аргумента ζ, такого, что $\rho(\zeta_k) = \rho_k$, а также фазовой скорости $v(\zeta_k) = v_k$, где $\zeta_k = kh$. Рассмотрим численные схемы, для которых

$$\begin{aligned} &\rho(\zeta) = 1 - \omega(\zeta),\ 0 \le \omega(\zeta) \le 2,\ \zeta \le 1, \\ &\omega(\zeta) = c\zeta^s + O(\zeta^{s+2}),\ c = \mathrm{const},\ s = 2p. \end{aligned} \tag{5}$$

Из работ Рихтмайера [4] известно, что такая схема имеет s-й порядок диссипации. Согласно [10] схема имеет m-й порядок дисперсии, если дисперсионная функция может быть записана в виде

$$\upsilon(\zeta) = a[1 + \theta\zeta^m + O(\zeta^{m+2})]),\ \theta = \mathrm{const}\,. \tag{6}$$

Теперь воспользуемся некоторым результатом из [11]. Там характер схемы (коэффициент перехода схемы) был представлен в виде

$$q(\zeta) = \exp[-i\gamma\zeta + \Psi(\zeta)]\,. \tag{7}$$

Тогда s интерпретируется как порядок диссипации, а r как порядок аппроксимации. Можно получить очень важную корреляцию между порядком аппроксимации, диссипацией и дисперсией схемы:

$$r = \min(s, m+1) - 1\,. \tag{8}$$

Очень важный вывод состоит в том, что порядок аппроксимации может быть определен либо порядком диссипации, либо порядком дисперсии. Отметим, что порядок аппроксимации также определяет порядок сходимости (в зависимости от гладкости решений). Из такого анализа можно обнаружить, что, например, для схем четного порядка схемы имеют четный порядок аппроксимации, а скорость сходимости определяется дисперсионными эффектами. Это означает, что большие нефизические колебания, которые обычно наблюдаются в схемах четного порядка аппроксимации при вычислении негладких решений, обусловлены именно дисперсией разностных гармоник. Отметим, что в работах [10, 12–14] рассмотрены другие уравнения и многомерный случай. Применение результатов по порядку диссипации и дисперсии позволяет понять «артефакты» в численных решениях эволюционных уравнений и предложить новые инструменты для их подавления или уменьшения.

2. Некоторые существующие инструменты для уменьшения «артефактов» в расчетах. Здесь опишем конструкцию некоторых более или менее известных инструментов для улучшения качества численных решений и дадим описание их механизмов.

Выбор новой схемы с возрастающей точностью. Первый подход к уменьшению «артефактов» заключается в использовании другой схемы с повышенной точностью. Но обычно это дорого и сложно в теоретических аспектах, особенно для моделирования по нелинейным уравнениям в многомерных случаях. Далее обсудим методы улучшения «базовых» оригинальных схем с помощью специальных инструментов.

Метод искусственной вязкости. В соответствии с этим подходом к разностной схеме для подавления искусственных колебаний следует добавить специальные члены путем добавления нефизической вязкости [1, 3, 9] и много других работ.

Искусственная дисперсия. Особые члены следует добавить в разностную схему для подавления искусственных колебаний путем добавления нефизической дисперсии [3, 5, 6].

Анти-диффузия. Идея антидиффузии развита, возможно, со времен работ Бориса Дж. и Д. Бука [1, 7, 15]. В антидиффузии специальный оператор фильтрации применяется к числовому решению после выполнения шага условной схемы для уменьшения колебаний путем применения специальных правил к решению. Показано, что действие такого фильтра эквивалентно некоторой части искусственной сглаживающей вязкости. Антидиффузия уже имеет множество применений, особенно в газовой динамике. Но трудности приложений заключаются в нелинейном характере фильтра.

3. Новые инструменты для улучшения численных схем. Здесь мы кратко опишем некоторые инструменты для улучшения решений, которые имеют в качестве базы концепции из раздела 2.

Композитные схемы высшего порядка. Исследования фазовой скорости и переходных модулей показывают, что такие функции могут иметь как положительную, так и отрицательную дисперсию (то есть гармоника разностной схемы может быть медленнее, чем гармоника исходного дифференциального уравнения); также переходные модули измеряют уровень уменьшения (увеличения) амплитуды гармоники и могут быть меньше или больше, чем в гармонике исходного уравнения. Таким образом, последовательное применение двух схем с различными свойствами для перехода с одного временного уровня на следующий уровень эквивалентно прикладной составной схеме с различными свойствами [16].

Анти-дисперсия. Цель антидисперсии состоит в том, чтобы уменьшить искусственную дисперсию численных схем и обеспечить применение специального разностного оператора, который имеет дисперсию, противоположную дисперсии базовой разностной схемы [17]. В качестве такого оператора полезно взять приближение простейших дифференциальных уравнений с необходимой дисперсией.

'Langoliers. Полезно ввести специальное название для нового класса инструментов, которое следует применять после применения базовой схемы на каждом временном шаге расчета. Мы назвали его «лангольерами», потому что такие инструменты применяются в каждой точке пространственной сетки разностной схемы на заданном временном уровне, и действие таких «лангольеров» заключается в «съедании» «искусственных» дефектов численного решения в каждой точке решения. После применения базовой схемы решение имеет много искусственных колебаний (если истинное решение — ступенчатая функция). Применение «Langolier» существенно уменьшает количество ошибок. Антидиффузионный фильтр можно рассматривать как символ «лангольер» типа «анти-вязкость». Также могут существовать другие случаи проектирования "лангольеров". Мы можем использовать не один «Langolier» между временными уровнями, а последовательность разных «Langoliesr». Например, как следует из теории дисперсии и диссипации схем, мы можем для линейных уравнений теоретически получить любой порядок аппроксимации составных «базовых схем» + серии специально построенных «лангольеров». Одна из конструкций состоит из «лангольеров» «антидисперсионного» и «антидиффузионного» характера (но, конечно, возрастающего порядка диссипации или дисперсии и, следовательно, увеличивающейся структуры).

4. Нелинейный случай. Как мы уже отмечали, вышеупомянутые подходы уже были разработаны и проверены в случае некоторых уравнений (линейное уравнение переноса, волновое уравнение, уравнение Кадомцева–Петвиашвили). Но и опыт численного решения нелинейных уравнений ведет к заключению о применимости инструментов выше. Ключевой подход заключается в применении двух идей: 1) линеаризации нелинейного уравнения вокруг «базового» решения для исходного нелинейного уравнения и 2) идеи «замороженных» коэффициентов полученного линеаризованного уравнения [1–3, 9]. Тогда анализ гармоник должен проводиться локально. В таком случае коэффициенты таких инструментов должны зависеть от значений решений в данной точке в данный момент времени. Результаты такого анализа для случая нелинейного уравнения Клайна–Гордона опубликованы в [13]. Другой интересный пример применения предложенной концепции к нелинейным уравнениям описан в [16]. Предложенный подход также весьма перспективен для численных расчетов коллапсов, взрывных решений или решений с особенностями. Область применения «лангольеров» во время вычислений может быть сосредоточена вблизи точек сингулярностей.

Выводы. Таким образом, в статье описаны специальные методы и теория их применения для уменьшения искусственных ошибок типа «расплывания» и «колебаний» при расчете решений эволюционных уравнений. Очень важно, что предлагаемые средства также пригодны для вычисления решений односторонних физических процессов с памятью, потому что эволюционные уравнения с памятью входят компонентом в математической постановка соответствующих математических задач. Кроме того, предлагаемые методы становятся особенно перспективными в связи с современной разработкой средств для параллельных вычислений (GRID-вычислений) решений. Это связано с тем, что «лангольеры» можно использовать параллельно в каждом узле числовой решетки, что приводит к повышению точности всех методов аппроксимации. Обратим внимание на то, что методы глубокого обучения могут быть использованы для построения «лангольеров».

Список использованной литературы:

1. Roache P. J. Computational Fluid Dynamics [Russian translation]. Moscow : Mir, 1980
2. Kalitkin N. N. Numerical methods [in Russian], Moscow : Nauka, 1990.
3. Samarskii A. A., Popov Yu. P. Difference Methods for Solving Problems of Gas Dinamics. [in Russian]. Moscow : Nauka, 1980.
4. Richtmyer R. D., Morton K. W. Difference methods for initial — value problems. N.Y. : Wiley and Sons. 1967.
5. Mukhin S. I., Popov S. B., Popov Yu. P. U.S.S.R. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*. Springer Translation. 1983. Vol. 23. 45 p.
6. Sengupta T., Dipankar A., Sagaut P., *J. Comput. Physics.* 2007. Vol. 226. 1211 p.
7. Book D. L., Boris J. P., Hain K. *J. of Comput. Phys.* 1975. Vol. 18. 248 p.
8. Harten A., Engquist B., Osher S., Chakrabarthy S. *J. Comput. Physics.* 1987. Vol. 71. 231 p.
9. Shokin Yu. I., Yanenko N. N. Differential Approximation Method [in Russian]. Novosibirsk : Nauka, 1985.
10. Moskalkov M. N. Numerical Analysis [in Russian], Kiev : Int. of Cybernetics, 1978. Vol. 75.
11. Brenner P., Thomee V. *Math, Scandinavia.* 1970. Vol. 27.
12. Nikolskii S. M. Approximation of functions of several variables and imbedding theorems [in Russian], M. : Nauka, 1977.
13. Makarenko A. S. *Chisl. Met. Mech. Sploshn. Sredy* [in Russian]. 1982. Vol. 13. 81 p.
14. Makarenko A. S., Moskalkov M. N. *Chisl. Met. Mech. Sploshn. Sredy* [in Russian]. 1981. Vol. 12. 64 p.
15. Bokanowski O., Martin S., Munos R., Zidan H. *Applied Numerical Mathematics.* 2006. Vol. 56. 1147 p.
16. Makarenko A. S., Moskalkov M. N. Vychisl. Prikl. Matem. [in Russian]. Kiev : Kiev Univ, 1980. Issue 41.

17. Makarenko A., Moskalkov M. U.S.S.R. *Computational Mathematics and Mathematical Physics.* Springer Translation. 1983. Vol. 23. 999 p.

NEW APPROACHES FOR REDUCING ARTIFICIAL OSCILLATIONS IN NUMERICAL SOLUTIONS. ANTI-DIFFUSION, ANTI-DISPERSION AND LONGOLIERS

Abstract. Two most known errors is the artificial smoothing of the solution and oscillations in the solutions near the places with high derivatives of the solutions (near the sharp fronts of the solution). Some methods of improving numerical solutions of evolution equations are proposed on the base of theoretical considerations. The artificial viscosity and artificial dispersion for difference schemes of gas dynamics are proposed as the first examples. A new class of tools for improving numerical solutions is proposed — «Langoliers». «Langoliers» are special difference operators which should be applied at each time steps after the running of original difference schemes. The design of «Langoliers» allows reducing the dissipative and dispersive errors of schemes. The examples are anti-diffusion, anti-dispersion and specially constructed difference schemes.

Key words: *numerical schemes; dispersion; dissipation; non-smooth solutions, anti-dispersion; «Langoliers»; non-linear problems.*

Получено 15.02.2019

УДК 517.946
DOI: 10.32626/2308-5878.2019-19.71-77

В. В. Маринець, д-р фіз.-мат. наук,
О. І. Когутич, магістр

ДВНЗ «Ужгородський національний університет», м. Ужгород

ПРО ОДИН ПІДХІД ДОСЛІДЖЕННЯ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ КВАЗІЛІНІЙНОГО РІВНЯННЯ ГІПЕРБОЛІЧНОГО ТИПУ З РОЗРИВНОЮ ПРАВОЮ ЧАСТИНОЮ

Будується конструктивний швидкозбіжний двосторонній метод дослідження та наближеного розв'язання крайової задачі для квазілінійного хвильового рівняння на площині з розривною правою частиною в області із складною структурою краю. Встановлюються достатні умови існування функцій порівняння, регулярного або іррегулярного розв'язку розглядуваної крайової задачі, його єдиності та знакосталості.

Ключові слова: *«вільні» криві, іррегулярний розв'язок, функції порівняння, умови узгодження.*

Вступ. Крайові задачі для квазілінійних рівнянь гіперболічного типу з неперервними правими частинами в різних областях із складною структурою краю розглядались в роботах [1–3], в яких встановлено до-