6. Демьянов В. Ф., Малоземов В. Н. Введение в минимакс. Москва : Наука, 1972. 368 с.

SOLUTION OF THE PROBLEM OF RESTORING DISCONTINUOUS FUNCTIONS BY THE MINIMAX

The article suggests a method for approximating a function of one and two variables with discontinuities of the first kind by a discontinuous approximation spline. The experimental data are the one-sided boundaries of the given nodes. To solve this problem in this paper, we use the minimax method.

Key words: *discontinuous functions, discontinuous spline, approximation, interpolation, minimax.*

Одержано 14.02.2019

УДК 519.1
DOI: 10.32626/2308-5878.2019-19.104-111

В. І. Петренюк, канд. фіз.-мат. наук, доцент

Центральноукраїнський національний технічний університет, м. Кропивницький

СТРУКТУРА 20-ТИ 9-ТИ ВЕРШИННИХ ГРАФІВ-ОБСТРУКЦІЇ ТОРА

Досліджено структуру решти 9-ти вершинних графів-обструкцій для тору.

Ключові слова: *граф-обструкція, тор, φ-перетворення графів.*

Вступ. Основні визначення та позначення взято з [1]. У роботі [2] запропоновано спосіб побудови графів-обструкцій обмеженого орієнтованого роду як φ-образу двох графів, один з яких має бути квазізіркою, з'єднаних шляхом ототожнення пар вершин, для випадку несуттєвості порядку ототожнення зазначених пар точок; тобто один із підграфів породжених підмножинами точок допускатиме перестановку довільної пари тачок з'єднання, наприклад, є повним. Цей підхід може видавати такі графи, які набуватимуть статус обструкцій після стискання в точку усіх лишніх ребер-променів квазізірки, саме так побудовані зазначені графи. Однак не всі графи-обструкції для тору можливо отримати цим способом. Однією з причин відсутності лишніх ребер є наявність двостороннього доступу до деяких точок із тих пар точок, що підлягають ототожненню в точку-вершину графа.

Задача полягатиме у завершенні розпочатої в [4] роботи по вивченню структури 9-ти вершинних графів-обструкцій для тору, наведених у [3] для використання при побудові n-вершинних, $n > 9$, графів-обструкцій для тору.

Лема 1. Виконуються наступні твердження:

1) D_{32} є φ-образом графів $K_6 \setminus K_2^1$ та квазізірки H з центром $K_{2,3}$, де $K_6^0 \setminus K_2^1 = \{i'\}_1^6$, $K_6^1 \setminus K_2^1 = K_6^1 \setminus \{(1',3'),(2',5')\}$, $H^0 = \{i''\}_1^6 \cup \{a,b,v\}$, $H^1 = K_{2,3}^1 \cup \{(2'',a),(b,3''),(b,1''),(b,5'')\}$, при перетворенні заданому формулою: $\varphi(K_6 \setminus K_2^1 + H, \sum_{i=1}^{6}(i' \dot{+} i'')) \to (D_{32}, \{i\}_{i=1}^6)$ та виконаному шляхом ототожнення усіх пар (i',i'') вершин з множин $M' = \{i'\}_1^6$ та $M'' = \{i''\}_1^6$;
2) D_{33} — граф-обструкція для тору є φ-образом графів K_5 та $H \cup St_3(b)$, де H -квазізірка з центром $K_{2,3}$, $K_5^0 = \{i'\}_1^5$, $H^1 = K_{2,3}^1 \cup \{(1'',a),(v,3''),(c,5'')\}$, $H^0 = \{i''\}_1^5 \cup \{a,c,v\}$, $St_3(b)$ — проста зірка з центром b, $St_3^0(b) = \{i''\}_1^3$, при перетворенні заданому наступною формулою: $\varphi(K_5 + H \cup St_3(b), \sum_{i=1}^{5}(i' \dot{+} i'')) \to (D_{33}, \{i\}_{i=1}^5)$ та виконаному шляхом ототожнення усіх пар (i',i'') вершин з множин $M' = \{i'\}_1^5$ та $M'' = \{i''\}_1^5$;
3) D_{34} є φ-образом графів $K_6 \setminus K_3^1$ та H, де $K_6^0 = \{i'\}_1^6$, $K_6(\{i''\}_{i=4}^6) = \overline{K_3}$, $H^0 = \{i''\}_1^6 \cup \{a,b,c\}$, $K_6(\{i''\}_{i=}^3) = K_3$, $H^1 = K_5^1 \setminus$ $\setminus \{(c,1''),(c,4'')\} \cup \{(c,6''),(1'',6''),(d,1''),(2'',b),(3'',a),(5'',c)\}$, де вершина $6''$ розділяє ребро $(c,1'')$ графа $K_5 \setminus (c,4'')$, при перетворенні заданому: $\varphi(K_6 \setminus K_3^1 + H, \sum_{i=1}^{6}(i' \dot{+} i'')) \to (D_{34}, \{i\}_{i=1}^6)$ шляхом ототожнення усіх пар (i',i'') з множин приєднання $M' = \{i'\}_1^6$, $M'' = \{i''\}_1^6$;
4) D_{35} φ-образ графів $K_6 \setminus (K_3^1 + K_2^1)$ та H, де $K_6^0 = \{i'\}_1^6$, $K_6(\{i''\}_{i=4}^6) = \overline{K_3}$, $K_6(\{i''\}_{i=}^3) = K_3 \setminus (4',5')$, $H^0 = \{i''\}_1^6 \cup \{a,b,v\}$, $H^1 = K_{2,3}^1 \cup \{(b,2''),(4'',v),(3'',a),(5'',v)\}$, при перетворенні заданому: $\varphi(K_6 \setminus (K_3^1 + K_2^1) + H, \sum_{i=1}^{6}(i' \dot{+} i'')) \to (D_{35}, \{i\}_{i=1}^6)$ ототожненням усіх пар (i',i'') з множин приєднання $M' = \{i'\}_1^6$, $M'' = \{i''\}_1^6$.

Лема 2.

1) D_{36} — обструкція для тору є φ-образом графів $K_6 \setminus K_3^1$ та H, де $K_6^0 = \{i'\}_1^6$, $K_6(\{i''\}_{i=4}^6) = \overline{K_3}$, $K_6(\{i''\}_{i=}^3) = K_3$, $H^0 = \{i''\}_1^6 \cup \{a,b,v\}$, $H^1 = K_4^1 \setminus \{(a,v)\} \cup \{(1'',a),(v,1''),(4'',b),(5'',b),(2'',a),(3'',v)\}$, де вершина $1''$ розділяє ребро (a,v) графа K_4, при перетворенні заданому наступною формулою: $\varphi(K_6 \setminus K_3^1 + H, \sum_{i=1,}^{6}(i' \dot{+} i'')) \to (D_{36}, \{i\}_{i=1}^6)$ шляхом ототожнення усіх пар (i',i'') вершин з множин приєднання $M' = \{i'\}_1^6$, $M'' = \{i''\}_1^6$;

2) D_{37} — обструкція для тору є φ-образом графів $K_{3,3}$ та H, де $K_{3,3}^0 = \{i'\}_1^6$, $K_{3,3}(\{i''\}_{i=4}^6) = \overline{K_3}$, $K_{3,3}(\{i''\}_{i=1}^3) = K_3$, $H^1 = K_4^1 \cup \cup\{(5'',a), \cup\{(5'',a),(a,4''),(2'',b),(5'',b),(2'',c),(4'',c),(a,1''),(a,3'')\}$, $H^0 = \{i''\}_1^6 \cup \ \cup\{a,b,c\}$, $H\{a,b,c,6''\} = K_4$, де вершини $5'',4'',2''$ розділяють ребра $(a,b),(c,b),(a,c)$ графа K_4 (із трьома кратними ребрами), при перетворенні заданому: $\varphi(K_{3,3} + +H, \sum_{i=1,}^{6}(i' \dot{+} i'')) \to (D_{37}, \{i\}_{i=1}^6)$ шляхом ототожнення усіх пар (i',i'') вершин з множин приєднання $M' = \{i'\}_1^6$, $M'' = \{i''\}_1^6$;

3) D_{38} — граф-обструкція для тору є φ-образом графів K_5, $K_5^0 = \{i'\}_1^7$, де вершини $6',7'$ розділяють ребро $(4',5')$, та H, де H — квазізірка з центром $K_5 \setminus e$, $H^0 = \{i''\}_2^5 \cup \{a,7'',6'',v\}$, $H(\{a,5'',6'',7'',4'',v\}) \cong K_4$, $H^1 = K_5^1 \setminus \{(v,6''),(a,7'')\} \cup \{(3'',a),(v,4''),(6'',4''),(a,5''),(7'',5'')\}$, при перетворенні заданому: $\varphi(K_5 + +H, \sum_{i=2}^{7}(i' \dot{+} i'')) \to (D_{38}, \{i\}_{i=2}^7)$ та виконаному шляхом ототожнення усіх пар (i',i'') вершин з $M' = \{i'\}_2^7$ та $M'' = \{i''\}_2^7$;

4) D_{39} є φ-образом графів K_5, $K_5^0 = \{i'\}_1^5$, та H, де H — квазізірка із центром C_4 — простим циклом довжини 4, де $C_5^1 = \{(a,b),(v,b),(a,c),(c,v)\}$, $H^1 = C_5^1 \cup \{(5'',a),(5'',b),(4'',a),(4'',b),(v,1''),(v,3''),(c,1''),(c,3''),(v,2''),(b,2'')\}$, $H^0 = \{i''\}_1^5 \cup C_4^0$ при перетворенні за-

даному формулою: $\varphi(K_5+H,\sum\limits_{i=1}^{5}(i'\dot{+}i'')) \to (D_{39},\{i\}_{i=1}^{5})$ та виконаному шляхом ототожнення усіх пар (i',i'') з множин $M'=\{i'\}_1^5$ та $M''=\{i''\}_1^5$.

Лема 3.

1) D_{40} — обструкція для тору є φ-образом графів $K_{3,3}$ та H, де $K_{3,3}^0=\{i'\}_1^6$, $H^1=3K_4^1$, $H^0=\{i''\}_1^6\cup\{a,b,c\}$, причому кожна пара графів K$_4$ матиме тільки одну спільну вершину з множини $\{a,b,c\}$, де $H\{a,b,c\}=K_3$, при перетворенні заданому наступною формулою: $\varphi(K_{3,3}+H,\sum\limits_{i=1,}^{6}(i'\dot{+}i'')) \to (D_{40},\{i\}_{i=1}^{6})$ шляхом ототожнення усіх пар (i',i'') вершин з множин приєднання $M'=\{i'\}_1^6$, $M''=\{i''\}_1^6$;
2) D_{41} є φ-образ графів K_5 та H, де $H^0=\{i''\}_1^5\cup\{a,b,c,v\}$, $K_5^0=\{i'\}_1^5$, $H^1=K_5^1\setminus(v,2'')\cup\{(a,5''),(c,5''),(a,4''),(c,4''),(b,3''),(c,3''),(a,1''),(b,1'')\}$, H — квазізірка з центром $K_{1,3}$, який на множині вершин $\{i''\}_1^4\cup\{a,b,c,v\}$ породжує підграф гомеоморфний $K_5\setminus(v,2'')$, при перетворенні заданому наступною формулою: $\varphi(K_5+H,\sum\limits_{i=1,}^{5}(i'\dot{+}i'')) \to (D_{41},\{i\}_{i=1}^{5})$ шляхом ототожнення усіх пар (i',i'') вершин з множин приєднання $M'=\{i'\}_1^5$, $M''=\{i''\}_1^5$;
3) D_{42} — граф-обструкція для тору є φ-образом графів K_5, $K_5^0=\{i'\}_1^5$, та H, де H — квазізірка з центром C_4 — простим циклом довжини 4, який на вершинах $a,b,c,v,2''$ породжує підграф гомеоморфний K_4, де $C_4^1=\{(a,b),(c,b),(a,v),(c,v)\}$, $H^0=$ $=\{i''\}_1^5\cup C_4^0$, $H^1=K_4^1\cup\{(1'',a),(1'',b),(3'',v),(3'',b),(v,4''),(a,4''),(c,5'')\}$, при перетворенні заданому формулою: $\varphi(K_5+H,\sum\limits_{i=1}^{5}(i'\dot{+}i'')) \to$ $\to(D_{42},\{i\}_{i=1}^{5})$ та виконаному шляхом ототожнення усіх пар (i',i'') з множин $M'=\{i'\}_1^5$ та $M''=\{i''\}_1^5$;
4) D_{43} — обструкція для тору є φ-образом графів K_5 та H, де $H^0=$ $=\{i''\}_1^5\cup\{a,b,c,v\}$, $H^1=K_5^1\setminus(1'',2'')\cup\{(a,4''),(c,4''),(b,3''),(v,5'')\}$,

$K_5^0 = \{i'\}_1^5$, H — квазізірка з центром C_4, який на множині вершин $\{i''\}_1^2 \cup \{a,b,c,v\}$ породжує підграф гомеоморфний $K_5 \setminus (1'', 2'')$, при перетворенні заданому формулою: $\varphi(K_5 + H, \sum_{i=1,}^{5} (i' \underset{\bullet}{+} i'')) \to (D_{43}, \{i\}_{i=1}^5)$ шляхом ототожнення усіх пар (i', i'') вершин з множин приєднання $M' = \{i'\}_1^5$, $M'' = \{i''\}_1^5$.

Лема 4. Виконуються наступні твердження:

1) D_{44} — обструкція для тору є φ-образом графів $K_{3,3}$ та H, де $H^0 = \{i''\}_1^6 \cup \{a,b,c\}$, $H^1 = K_4^1 \setminus (a,c) \cup \{(a,1''),(c,1''),(a,5''),(b,5''),$ $(a,3''),(b,3''),(c,2''),(b,2''),$ $(c,4''),(b,4'')\}$, $K_{3,3}^0 = \{i'\}_1^6$, де $H\{a,b,c,6'',1''\} \cong K_4$, причому вершина $1''$ розділяє ребро (a,c), при перетворенні заданому наступною формулою: $\varphi(K_{3,3} + H, \sum_{i=1,}^{6} (i' \underset{\bullet}{+} i'')) \to (D_{44}, \{i\}_{i=1}^6)$ шляхом ототожнення усіх пар (i', i'') вершин з множин приєднання $M' = \{i'\}_1^6$, $M'' = \{i''\}_1^6$;

2) D_{45} — обструкція для тору є φ-образом графів $K_6 \setminus K_3^1$ та H, де $H^0 = \{i''\}_1^5 \cup \{a,v,c\}$ $H = St_5(a) + St_5(c) + St_3(v)$, $H^1 = St_5^1(a) \cup$ $\cup St_5^1(c) \cup St_3^1(v)$, $K_6^0 = \{i'\}_1^6$, при перетворенні заданому наступною формулою: $\varphi(K_6 \setminus K_3^1 + H, \sum_{i=1,}^{6} (i' \underset{\bullet}{+} i'')) \to (D_{45}, \{i\}_{i=1}^6)$ шляхом ототожнення усіх пар (i', i'') вершин з множин приєднання $M' = \{i'\}_1^6$, $M'' = \{i''\}_1^6$;

3) D_{46} — обструкція для тору є φ-образом графів K_5 та H, де $H^0 = \{i''\}_1^5 \cup \{a,b,c'',v\}$, $K_5^0 = \{i'\}_1^5 \cup \{c'\}$, вершина c' розділяє ребро $(1',3')$, $H^1 = K_5^1 \setminus \{(1'',3'')\} \cup K_4^1 \cup \{(a,4''),(a,5'')\}$, $H\{2'',3'',c'',v\} =$ $= K_4$ $H\{1'',3'',v,a,b,c''\} = K_5 \setminus (1'',3'')$, $H(\{4'',5'',a,b,c''\}) = K_{2,3}$, H — квазізірка з центром на множині вершин $\{a,b,v\}$ породжує підграф гомеоморфний K_3, при перетворенні заданому формулою: $\varphi(K_5 + H, \sum_{i=1}^{5} (i' \underset{\bullet}{+} i''), (c' + c'')) \to (D_{47}, \{i\}_{i=1}^5, c)$ шляхом ототож-

жнення усіх пар $(i',i")$ вершин з множин приєднання $M'=\{i'\}_1^5$, $M"=\{i"\}_1^5$, та пари $(c'c")$;

4) D_{47} — обструкція для тору є φ-образом графів K_5 та H, де $H^0=\{i"\}_1^5\cup\{a,b,c,v\}$, $K_5^0=\{i'\}_1^5$, $H^1=K_{3,3}^1\cup K_{2,3}^1$, $K_{3,3}^0=\{1",3",v,\}\cup$ $\cup\{a,b,c\}$, $H\{1",3",v,\}=H\{a,b,c\}=\overrightarrow{K_3}$, $H(\{4",5",a,b,c\})=K_{2,3}$ — квазізірка з центром на множині вершин $\{a,b,c,v\}$ породжує підграф гомеоморфний $K_{1,3}$, при перетворенні заданому наступною формулою: $\varphi(K_5+H,\sum\limits_{i=1,}^{5}(i'\dot{+}i"))\to(D_{47},\{i\}_{i=1}^5)$ шляхом ототожнення усіх пар $(i',i")$ вершин з множин приєднання $M'=\{i'\}_1^5$, $M"=\{i"\}_1^5$.

Лема 5. Виконуються наступні твердження:

1) D_{48} є φ-образом $K_6\setminus K_{1,2}^1$ та H, де $K_{3,3}^0\setminus K_{1,2}^1=\{i'\}_1^6$, $H^0=\{i"\}_{1,i\neq2}^6\cup\{a,b,b"\}$, вершина b' розділяє $(2',6')$, $H^1=K_5^1\setminus$ $\setminus(5",6")\cup\{(a,1"),(b,1"),(a,5"),(a,4"),(c",3")\}$, де $H\{a,b,c",6",5"\}\cong$ $\cong K_5\setminus(5",6")$, при перетворенні заданому формулою: $\varphi((K_6\setminus K_{1,2}^1)+H,(\sum\limits_{i=1,i\neq2}^{6}(i'\dot{+}i"),(b'+b")))\to(D_{48},(\{i\}_{i=1,i\neq2}^6,b)))$ та виконаному шляхом ототожнення усіх пар $(i',i")$ вершин з множин $M'=\{i'\}_1^6$, $M"=\{i"\}_1^6$ та $(b',b")$ в b, причому вершина $2'$ стане вершиною 2;

2) D_{49} є φ-образом графів $K_6\setminus 2K_2^1$ та H, де $K_6\setminus 2K_2^1=\{i'\}_1^6$, $K_6^1\setminus 2K_2^1=K_6^1\setminus\{(4',6'),(2',5')\}$, $H^0=\{i"\}_1^6\cup\{a,b,c\}$, $H(\{i"\}_1^2\cup\{a,b\})=$ $=K_4$, $H(\{1",2",4",6"c\})=St_4(c)$, $H^1=K_4^1\cup St_4^1(c)\cup\{(a,6"),(b,3"),$ $(a,4"),(a,5")\}$, при перетворенні заданому формулою: $\varphi((K_6\setminus 2K_2^1)+H,\sum\limits_{i=1}^{6}(i'\dot{+}i"))\to(D_{49},\{i\}_{i=1}^6))$ та виконаному шляхом ототожнення усіх пар $(i',i")$ вершин з множин $M'=\{i'\}_1^6$, $M"=\{i"\}_1^6$;

3) D_{50} — φ-образ графів K_6 та H, де $K_6^0 = \{i'\}_1^6$, $H^0 = \{i''\}_1^6 \cup \{a,b,c\}$, $H(\{i''\}_4^5 \cup \{c,b\}) = K_4$, $H(\{1'',6'',4'',5''a\}) = St_4(a)$, $H^1 = K_4^1 \cup St_4^1(a) \cup$ $\cup\{(c,2''),(b,3'')\}$, при перетворенні заданому формулою: $\varphi(K_6 + H, \sum_{i=1}^{6}(i' \dot{+} i'')) \to (D_{50}, \{i\}_{i=1}^6))$ та виконаному шляхом ототожнення усіх пар (i', i'') вершин з множин $M' = \{i'\}_1^6$, $M'' = \{i''\}_1^6$;
4) D_{51} — обструкція для тору є φ-образом графів K_5 та H, де $H^0 = \{i''\}_1^5 \cup \{a,b,c,v\}$, $K_5^0 = \{i'\}_1^5$, $H^1 = H_1^1 \cup H_2^1 \cup \{(b,1''),(v,3'')\}$, $H_1^0 = \{4'',5'',c,b,v\}$, $H_2^1 = \{2'',4'',5'',a,c\}$, $H_1 = H(\{4'',5'',c,b,v\}) =$ $= K_5 \setminus (4'',5'')$, $H_2 = H(\{2'',4'',5'',a,c\}) = K_5 \setminus (4'',5'')$, причому H_2 має з K_5 спільний ланцюг довжини 2 на вершинах $\{4'',5'',c\}$, де H — квазізірка з центром на множині вершин $\{a,b,c,v\}$ на якій породжує підграф $K_4 \setminus K_{1,2}$, при перетворенні заданому наступною формулою: $\varphi(K_5 + H, \sum_{i=1}^{5}(i' \dot{+} i'')) \to (D_{51}, \{i\}_{i=1}^5)$ шляхом ототожнення усіх пар (i', i'') вершин з множин приєднання $M' = \{i'\}_1^5$, $M'' = \{i''\}_1^5$;

Із вищенаведених лем 1–5 випливатиме ***основний результат.***

Теорема. Кожна граф-обструкція роду 2 $D_{32}, ..., D_{51}$ [5] на 9-ти вершинах є результатом φ-перетворення трьох зв'язних графів X, Y, Z, які задовольняють одному з наступних випадків:

1) граф Y гомеоморфний K_5 чи $K_{3,3}$ (можливо із кількома додатковими ребрами) вкладений в тор σ, граф Z відсутній, а інший граф X є або площинним 2-мінімальним відносно множини точок приєднання до графа Y на недвоклітці $\sigma \setminus Y$ із нульовими характеристиками θ та $\partial\theta$ для множини точок приєднання до графа Y, або площинним 3-мінімальним на s недвоклітці тора, $s \in \sigma_1 \setminus Y$, із характеристиками θ, $\partial\theta$, де $\theta = 1$ чи $\partial\theta = 1$, для множини точок приєднання графа X до графа Y;
2) граф Y один з графів K_5 чи $K_{3,3}$, можливо без ребра, вкладений в тор σ, а інший граф X роду 1 є 2-мінімальним відносно множини точок приєднання на недвоклітці $\sigma \setminus Y$ із нульовими характеристиками θ, $\partial\theta$ множини точок приєднання графа X до графа Y, граф Z відсутній;

3) граф Y містить частину гомеоморфну K_5 чи $K_{3,3}$ (можливо із кількома додатковими ребрами) вкладений в тор σ, граф Z — проста зірка, граф X є площинною квазізіркою із центральним графом M на двох вершинах, яка не є 2-мінімальним графом на недвоклітці s, $s \in \sigma \setminus Y$, причому існує, принаймні одна, пара вершин простої зірки Z, сформована із елементів множини приєднання графа X до графа Y, що розділяє на ∂s пару кінцевих вершин з множини приєднання графа X до графа Y.

Список використаних джерел:

1. Хоменко М. П. φ-перетворення графів. Київ, 1971. 378 с.
2. Петренюк В. І. Построение графов-обструкций ограниченного ориентируемого рода. *XVI Международная конференция «Проблемы теоретической кибернетики».* Нижний Новгород, 2011. С. 363–368.
3. Hur Suhjin. The Kuratowski covering conjecture for graphs of order less than 10. PhD dissertation, Ohio State University, 2008.
4. Петренюк В. І. Структура 28-ми 9-ти вершинних графів-обструкцій тора. *Математичне та комп'ютерне моделювання.* Серія фізико-математичних наук. Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка. 2017. Т. 16. С. 145–151.

STRUCTURE OF 20 9-VERTECES GRAPHS OBSTRUCTIONS FOR TORUS

Structure all 9-verteces graphs obstructions for torus was found.

Key words: *structure, 9-verteces graph obstructions, torus, φ-transformation.*

Одержано 14.01.2019