УДК 517.9
DOI: 10.32626/2308-5878.2019-19.112-118

О. О. Покутний, д-р фіз.-мат. наук
Інститут математики НАН України, м. Київ

ГОМОКЛІНІЧНИЙ ХАОС ТА РІВНЯННЯ НАВ'Є–СТОКСА

У роботі розглядається збурена система рівнянь Нав'є–Стокса, яка переписується у вигляді операторно-диференціального рівняння. З допомогою отриманих апріорних оцінок для відповідного оператора встановлено властивість експоненціальної дихотомії для породжуючого однорідного рівняння. Отримано необхідні та достатні умови існування обмежених на всій осі розв'язків породжуючого лінійного однорідного рівняння. Відповідна множина розв'язків представляється з допомогою побудованого оператора Гріна. Для нелінійної системи рівнянь Нав'є–Стокса введено операторне рівняння для породжуючих елементів. З допомогою операторного рівняння для породжуючих елементів отримано необхідну умову біфуркації розв'язків рівняння Нав'є–Стокса. Необхідно знайти такий обмежений на всій осі розв'язок системи рівнянь, який перетворюється у породжуючий обмежений розв'язок відповідного однорідного рівняння, коли $\varepsilon = 0$. У роботі отримано достатню умову існування обмеженого на всій осі розв'язку системи рівнянь Нав'є–Стокса. Побудовано ітеративні алгоритмі типу Ньютона–Канторовіча для його знаходження. З допомогою представлення встановлено оцінки відповідних розв'язків у просторах інтегровних функцій.

Ключові слова: *рівняння Нав'є–Стокса, гомоклінічний хаос, псевдообернений за Муром–Пенроузом оператор.*

Вступ. Добре відомо, що поняття експоненціальної дихотомії відіграє важливу роль у якісній теорії диференціальних рівнянь.

Слід відзначити деякі роботи присвячені отриманню умов існування обмежених розв'язків для різного класу диференціальних рівнянь у скінченновимірному та нескінченновимірному просторах [1–4].

Поняття експоненціальної дихотомії на додатній та від'ємній півосях дає можливість отримати умови за виконання яких відповідний оператор є Фредгольмовим. Це добре відома лема Палмера [4]. У даній роботі наведено ідея методу який застосовується для дослідження питання існування обмежених на всій осі розв'язків збуреної системи типу Нав'є–Стокса.

Постановка задачі. Розглянемо питання стосовно існування обмежених розв'язків для систем рівнянь Нав'є–Стокса. Розглянемо однорідне рівняння вигляду

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}-\mu\Delta u(x,t)+\varepsilon\sum_{i=1}^{3}\left(u_i(x,t)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x_i}+\frac{\partial u_i(x,t)}{\partial x_i}u(x,t)\right)=0, \qquad (1)$$

або у розширеному вигляді

$$\frac{\partial u_j(x,t)}{\partial t}-\mu\Delta u_j(x,t)+\varepsilon\sum_{i=1}^{3}\left(u_i(x,t)\frac{\partial u_j(x,t)}{\partial x_i}+\frac{\partial u_i(x,t)}{\partial x_i}u_j(x,t)\right)=0,\ j=1,2,3$$

зі стандартними крайовими умовами:

$$divu=0,\ \ u\,|_{\partial\Omega}=0.$$

Розглянемо множину гладких скінченновимірних соленоїдальних векторів. Замкненість цієї множини за нормою $L_2(\Omega)$ позначимо *H*, а за нормою $H^1(\Omega)$ *E*. Припустимо, що *P* — проектор з $L_2(\Omega)$ на *H* [5].

Позначимо

$$F(u(x,t))=-\mu\Delta u(x,t)+\varepsilon\sum_{i=1}^{3}\left(u_i(x,t)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x_i}+\frac{\partial u_i(x,t)}{\partial x_i}u(x,t)\right)=0.$$

Тоді

$$A(t)h(x,t)=F'(u(x,t))h(x,t)=-\mu\Delta h(x,t)+\varepsilon\sum_{i=1}^{3}[u_i(x,t)\frac{\partial h(x,t)}{\partial x_i}+$$

$$+h_i(x,t)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x_i}]+\varepsilon\sum_{i=1}^{3}[\frac{\partial h_i(x,t)}{\partial x_i}u(x,t)+\frac{\partial u_i(x,t)}{\partial x_i}h(x,t)].$$

Розглянемо таку форму

$$(A(t)h(\cdot,t),\overline{h}(\cdot,t))_{L_2(\Omega)}=\mu(\nabla h(\cdot,t),\nabla\overline{h}(\cdot,t))_{L_2(\Omega)}+$$

$$+\varepsilon\sum_{i=1}^{3}[(u_i(\cdot,t)\frac{\partial h(\cdot,t)}{\partial x_i},\overline{h}(\cdot,t))_{L_2(\Omega)}+(h_i(\cdot,t)\frac{\partial u(\cdot,t)}{\partial x_i},\overline{h}(\cdot,t))_{L_2(\Omega)}+$$

$$+(\frac{\partial h_i(\cdot,t)}{\partial x_i}u(\cdot,t),\overline{h}(\cdot,t))_{L_2(\Omega)}+(\frac{\partial u_i(\cdot,t)}{\partial x_i}h(\cdot,t),\overline{h}(\cdot,t))_{L_2(\Omega)}].$$

Інтегруючи частинами та враховуючи крайові умови можемо отримати таку оцінку знизу (взявши супремум по *t*)

$$\sup_{t\in R_+}\frac{\mu}{2}\|\nabla h(\cdot,t)\|^2_{L_2(\Omega)}+\frac{\mu k}{2}\sup_{t\in R_+}\|h(\cdot,t)\|^2_{L_2(\Omega)}-$$

$$-3c_1\varepsilon\sup_{t\in R_+}\|h(\cdot,t)\|^2_{L_2(\Omega)}-c_2\varepsilon\sup_{t\in R_+}\|h(\cdot,t)\|^2_{L_2(\Omega)}-$$

$$-c_3\varepsilon\sup_{t\in R_+}\|h(\cdot,t)\|^2_{L_2(\Omega)}-c_4\varepsilon\sup_{t\in R_+}\|h(\cdot,t)\|^2_{L_2(\Omega)},$$

де

$$c_1=\sup_{(x,t)\in\Omega\times(0,+\infty)}\max_{i=1,2,3}|u_i(x,t)|,$$

$$c_2 = \sqrt{3} \sup_{(x,t)\in\Omega\times(0,+\infty)} \max_{i,j=1,2,3} \left| \frac{\partial u_j(x,t)}{\partial x_i} \right|,$$

$$c_3 = \sup_{(x,t)\in\Omega\times(0,+\infty)} \max_{j=1,2,3} | u_j(x,t) |,$$

$$c_4 = \sum_{i=1}^{3} \sup_{(x,t)\in\Omega\times(0,+\infty)} \left| \frac{\partial u_i(x,t)}{\partial x_i} \right|.$$

Таким чином для достатньо малого ε справедлива така нерівність

$$\sup_{t\in R_+} (A(t)h(\cdot,t), \overline{h}(\cdot,t))_{L_2(\Omega)} \geq L \sup_{t\in R_+} \| h(\cdot,t) \|^2_{W_2^1(\Omega)},$$

де L — додатна стала. Аналогічні оцінки можна отримати для від'ємної напівосі. Звідси випливає, що спектр оператора A не перетинається з уявною віссю. Таким чином неоднорідну крайову задачу можна записати у такому вигляді:

$$\begin{aligned} &u_t(t,\varepsilon) + A(t)u(t,\varepsilon) + \varepsilon F_1(u(t,\varepsilon)) = \\ &= u_t(t,\varepsilon) + F'(u(t,\varepsilon))u(t,\varepsilon) + \varepsilon F_1(u(t,\varepsilon)) = f(t). \end{aligned} \tag{2}$$

Тут

$$F_1(u(t,\varepsilon)) = -\sum_{i=1}^{3} \left(u_i(x,t)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x_i} + u(x,t)\frac{\partial u_i(x,t)}{\partial x_i}\right).$$

Таким чином, коли $\varepsilon = 0$, розглянута крайова задача допускає експоненціальну дихотомію та можна застосувати добре розвинену теорію напівгруп до дослідження питання існування обмежених на всій осі розв'язків. Дослідимо більш детально розглянуту задачу.

Лінійний випадок. Породжуюче рівняння. Розглянемо лінійну задачу у тому випадку, коли $\varepsilon = 0$:

$$\frac{du_0(t)}{dt} = A(t)u_0(t) + f(t), \tag{3}$$

де вектор-функція $f(t)$ діє з R у простір Гільберта

$$W_2^1(\Omega),\ f(t) \in BC(R, W_2^1(\Omega)),$$

$$BC(R, W_2^1(\Omega)) := \{ f(\cdot) : R \to W_2^1(\Omega),\ f(\cdot) \in C(R, W_2^1(\Omega)),$$

$||| f ||| = \sup_{t\in R} \| f(t) \|_{W_2^1(\Omega)} < \infty\}$ — банахів простір функцій, неперервних та обмежених на R із значенням у соболєвському просторі $W_2^1(\Omega)$. Нехай $T(t, s)$ — еволюційний оператор [6, 7], асоційований з однорідним рівнянням, що є експоненціально дихотомічним [7, 8] на півосях з проекторнозначними функціями $P(t)$, $Q(t)$. Основний результат для лінійної задачі наступний.

Теорема 1. Нехай $T(t, s)$ сильно неперервний еволюційний оператор однорідного рівняння. Припустимо, що виконано такі умови:

1) $T(t, s)$ є експоненціально дихотомічним на півосях з проекторнозначними оператор-функціями $P(t)$, $Q(t)$, відповідно;
2) оператор $D = P(0) - (I - Q(0))$ є узагальнено-оборотним [9–11].

Тоді:

1) для того, щоб існували обмежені на всій осі розв'язки рівняння, необхідно та достатньо, щоб $f \in BC(R, B)$ задовольняла умові

$$\int_{-\infty}^{+\infty} H(t) f(t) dt = 0, \tag{4}$$

де $H(t) = P_{N(D^*)} P(0) T(0, t)$;

2) за виконання умови (4), розв'язки рівняння (3) мають такий вигляд:

$$u_0(t, c) = T(t, 0) P(0) P_{N(D)} c + (G[f])(t, 0),\ c \in B, \tag{5}$$

де

$$(G[f])(t, s) =$$

$$= \begin{cases} \int_s^t T(t,\tau)P(\tau) f(\tau)d\tau - \int_t^{+\infty} T(t,\tau)(I - P(\tau)) f(\tau)d\tau + \\ +T(t,s)P(s)D^{-}[\int_s^{+\infty} T(s,\tau)(I - P(\tau)) f(\tau)d\tau + \int_{-\infty}^{s} T(t,\tau)Q(\tau) f(\tau)d\tau], t \geq s, \\ \int_{-\infty}^{t} T(t,\tau)Q(\tau) f(\tau)d\tau - \int_t^s T(t,\tau)(I - Q(\tau)) f(\tau)d\tau + \\ +T(t,s)(I - Q(s))D^{-}[\int_s^{+\infty} T(s,\tau)(I - P(\tau)) f(\tau)d\tau + \int_{-\infty}^{s} T(t,\tau)Q(\tau) f(\tau)d\tau], s \geq t. \end{cases}$$

узагальнений оператор Гріна задачі про обмежені на всій осі розв'язки, $P_{N(D)} = I - D^{-}D, P_{N(D^*)} = I - DD^{-}$ — проектори на ядро та коядро оператора D [11].

Нелінійний випадок. Будемо шукати обмежений розв'язок рівняння (2), який при $\varepsilon = 0$ перетворюється у розв'язок породжуючого рівняння (3) $u(t, 0) = u_0(t)$. Ця задача може бути розв'язана за допомогою операторного рівняння:

$$F(c) = \int_{-\infty}^{+\infty} H(t) F_1(u_0(t, c)) dt = 0. \tag{6}$$

Теорема 2. (необхідна умова). Припустимо, що однорідне рівняння є експоненціально-дихотомічним на півосях з проекторнозначними оператор-функціями $P(t)$, $Q(t)$ відповідно, а нелінійне рівняння (2) має обмежений розв'язок який при $\varepsilon = 0$ перетворюється у один з розв'язків породжуючого рівняння (3) з елементом $c = c^0$: $u(t,0) = u_0(t,c^0)$. Тоді елемент c^0 повинен задовольняти рівняння для породжуючих елементів (6).

Достатню умову можна отримати з допомогою оператора

$$B_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} H(t)A_1(t)T(t,0)P(0)P_{N(D)}dt\colon B \to B,\ A_1(t) = F_1^{(1)}(v)\,|_{v=u_0,\varepsilon=0}$$

(похідна Фреше).

Теорема 3. (достатня умова). Припустимо, що однорідне рівняння є експоненціально-дихотомічним на півосях з проекторнозначними оператор — функціями $P(t)$, $Q(t)$ відповідно. Нехай для оператора B_0 виконано такі умови:

1) оператор B_0 узагальнено-оборотний;
2) $P_{N(B_0{}^*)}P_{N(D^*)}P(0) = 0$.

Тоді, для довільного елемента $c = c^0$, який задовольняє рівняння для породжуючих елементів (6), існує принаймні один обмежений розв'язок нелінійного рівняння (2). Його можна знайти за допомогою такого ітераційного процесу

$$\bar{y}_{k+1}(t,\varepsilon) = \varepsilon G[Z(u_0(\tau,c^0) + y_k, \tau, \varepsilon)](t,0),$$

$$c_k = -B_0^- \int_{-\infty}^{+\infty} H(t)\{A_1(t)\bar{y}_k(t,\varepsilon) + R(y_k(t,\varepsilon),t,\varepsilon)\}dt,$$

$$y_{k+1}(t,\varepsilon) = T(t,0)PP_{N(D)^c k} + \bar{y}_{k+1}(t,\varepsilon),$$

$$u_k(t,\varepsilon) = u_0(t,c^0) + y_k(t,\varepsilon), k = 0,1,2,\ldots, y_0(t,\varepsilon) = 0,$$

$$u(t,\varepsilon) = \lim_{k\to\infty} u_k(t,\varepsilon).$$

Доведення проводиться аналогічним чином як у роботі [8].

Зауваження. Слід зазначити, що з теорем 2, 3 випливає наявність складної поведінки у крайової задачі для збуреної системи Нав'є–Стокса. А саме, за умов дихотомії (які випливають з отриманих оцінок), у системі спостерігається гомоклінічний хаос.

Оцінки розв'язків. Згідно представлення

$$y(t,\varepsilon) = T(t,0)P(0)P_{N(D)^c} + \bar{y}(t,\varepsilon),$$

справедливі такі оцінки

$$\| y(t,\varepsilon)\|_{L_2(\Omega)} \le \| T(t,0)P(0)P_{N(D)^c}\|_{L_2(\Omega)} + \|\bar{y}(t,\varepsilon)\|_{L_2(\Omega)} \le$$

$$\le Me^{-\alpha t}\| P_{N(D)^c}\|_{L_2(\Omega)} + \varepsilon \| G[F_1(u_0+y)](t,0)\|_{L_2(\Omega)}\,.$$

$$\| G[F_1(u_0+y)(t,0)] \|_{L_2(\Omega)} \le \| G \|_{L_2(\Omega)} \| F_1 \|_{L_2(\Omega)} \| u_0(t,c^0)+y(t,\varepsilon) \|_{L_2(\Omega)} \le$$
$$\le \| G \|_{L_2(\Omega)} \| F_1 \|_{L_2(\Omega)} \| u_0(t,c^0) \|_{L_2(\Omega)} + \| G \|_{L_2(\Omega)} \| F_1 \|_{L_2(\Omega)} \| y(t,\varepsilon) \|_{L_2(\Omega)} .$$

Таким чином справедлива така оцінка

$$\| y(t,\varepsilon) \|_{L_2(\Omega)} \le Me^{-\alpha t} \frac{\| P_{N(D)^c} \|_{L_2(\Omega)}}{1-\varepsilon \| G \|_{L_2(\Omega)} \| F_1 \|_{L_2(\Omega)}} +$$
$$+\varepsilon \frac{\| G \|_{L_2(\Omega)} \| F_1 \|_{L_2(\Omega)} \| u_0(t,c^0) \|_{L_2(\Omega)}}{1-\varepsilon \| G \|_{L_2(\Omega)} \| F_1 \|_{L_2(\Omega)}} .$$

Висновки. Розглянуто умови біфуркації розв'язків збуреної системи рівнянь Нав'є–Стокса на всій осі. За допомогою побудованого узагальненого оператора Гріна у лінійному породжуючому випадку отримано оцінки норми розв'язку у просторі інтегровних функцій.

Список використаних джерел:

1. Baskakov A. G. Invertibility and the fredholm property of difference operators. *Mathematical notes*. 2000. 6 (67). P. 690–698.
2. Baskakov A. G. On differential and difference Fredholm operators. *Reports of Mathematics.* 2007. 2 (76). P. 669–672.
3. Boichuk A. A. Solutions of weakly nonlinear differential equations bounded on the whole line. *Nonlinear Oscillations.* 1999. 1 (2). P. 3–10.
4. Palmer K. J. Exponential dichotomies and transversal homoclinic points. *Journ. of Diff. Eq*. 1984. 55. P. 225–256.
5. Levitan B. M., Gikov V. V. Almost periodic functions and differential equations. M.: MGU, 1978. 205 p.
6. Krein S. G. Linear differential equations in the Banach space. M. : Science, 1967. 464 p.
7. Henry D. Geometric theory of semilinear parabolic equations. M. : World, 1985. 376 p.
8. Pokutnyi A. A. Bounded solutions of linear and weakly nonlinear differential equations in Banach space with unbounded linear part. *Diff. Eq.* 2012. 6(48). P. 803–813.
9. Moore E. H. On the Reciprocal of the General Algebraic Matrix (Abstract). *Bull. Amer. Math. Soc*. 1920. 26. P. 394–395.
10. Penrose R. A. Generalized Inverse for Matrices. *Proc. Cambridge Philos. Soc.* 1955. 51. P. 406–413.
11. Boichuk A. A., Samoilenko A. M. Generalized Inverse Operators and Fredholm Boundary-Value Problems 2nd ed. Berlin/Boston : Walter De Gruyter GmbH, 2016. 296 p.

HOMOCLINIC CHAOS AND NAVIER STOKES EQUATIONS

In this paper we consider a perturbed system of Navier–Stokes equations, which is rewritten in the form of an operator-differential equation. Using the obtained a priori estimates for the corresponding operator, the property of the exponential dichotomy for a generating homogeneous equation is established.

The necessary and sufficient conditions for the existence of solutions of a generating linear homogeneous equation bounded on the entire axis are obtained. The corresponding set of solutions is represented by the constructed Green operator. For a nonlinear Navier–Stokes equation, we introduce the operator equation for generating elements. Using the operator equation for the generating elements, we obtain the necessary condition for the bifurcation of the solutions of the Navier–Stokes equation. It is necessary to find such a solution of the system of equations that is bounded on the entire axis, which transforms into a generating bounded solution of the corresponding homogeneous equation when $\varepsilon = 0$. In this paper we obtain a sufficient condition for the existence of a solution of the Navier–Stokes equation bounded on the entire axis. An iterative Newton-Kantorovich type algorithm for its finding was constructed. With the help of representation, estimates of the corresponding solutions in the spaces of integrable functions are established.

Key words: *Navier–Stokes equation, homoclinic chaos, Moore–Penrose pseudoinverse operator.*

Одержано 24.01.2019

УДК 519.7
DOI: 10.32626/2308-5878.2019-19.118-124

О. Д. Поліщук, канд. фіз.-мат. наук

Інститут прикладних проблем механіки і математики
імені Я. С. Підстригача НАН України, м. Львів

ЦЕНТРАЛЬНІСТЬ У СКЛАДНИХ МЕРЕЖАХ ТА ПОСЕРЕДНИЦТВО У МЕРЕЖЕВИХ СИСТЕМАХ

Аналізуються концепції центральності та впливу вузлів складних мереж для визначення їх важливості у структурі системи. Вводяться поняття міри, області та потужності посередництва вузлів та ребер мережі для ідентифікації їх важливості у процесі функціонування мережевих систем. Ці показники кількісно виражають ступінь сприяння відповідного елемента рухові потоків у системі та визначають втрати, які її очікують у разі блокування цього вузла або ребра чи цілеспрямованої атаки на нього. Аналогічні поняття посередництва вводяться для визначення функціональної важливості окремих підсистем мережевих систем. Наводяться приклади практичного застосування отриманих результатів.

Ключові слова: *складна мережа, мережева система, центральність, посередництво.*

Вступ. Однією з основних концепцій теорії складних мереж є так звана центральність (centrality) вузла, яка дозволяє визначати його важливість у мережі: найбільш впливові особи у соціальних мережах,

