УДК 519.85
DOI: 10.32626/2308-5878.2019-19.161-167

П. І. Стецюк, д-р фіз.-мат. наук,
О. М. Хом'як, канд. фіз.-мат. наук
Інститут кібернетики імені В. М. Глушкова НАН України, м. Київ

ПРО УСЕРЕДНЕННЯ ЧИСЕЛ ТА ЛІНІЙНИХ СПЛАЙНІВ

Розглядаються задачі безумовної мінімізації опуклих функцій для знаходження мінімальних за L_p-нормою лінійних сплайнів для випадків $p \geq 1$ та $1 \leq p \leq 2$. Вони побудовані по аналогії з подібними задачами для знаходження числа, яке за L_p-нормою мінімально відрізняється від m заданих чисел $a_1, \dots, a_m$. Якщо $p \geq 1$, то використовується негладка функція, а якщо $1 < p \leq 2$ — гладка функція. Показано, що при певному виборі параметра p оптимізаційні задачі породжують відомі методи — метод найменших квадратів, метод найменших модулів та мінімаксний чебишевський метод. Наведено властивості розв'язків задач при $1 < p \leq 2$.

Ключові слова: *L_p-норма, опукла функція, негладка функція, метод найменших модулів, метод найменших квадратів.*

Вступ. Обробка експериментальних даних для отримання достовірних результатів на основі проведених вимірювань — задача, з якою сучасний вчений та інженер зустрічаються майже повсякденно. Серед методів обробки експериментальних даних слід відмітити метод найменших модулів [1], використання якого доцільно в тих випадках, коли розподіл помилок вимірювань підпорядкований закону Лапласа, та метод найменших квадратів [2], який використовується, коли розподіл помилок вимірювань підпорядкований закону Гаусса. Меншого поширення набули методи, в яких мінімізується L_p-норма вектора $y = (y_1, \dots, y_m)^T$, яка визначена як: $\|y\|_p = (\sum_{i=1}^{m} |y_i|^p)^{1/p}$, де $p \geq 1$ — скалярний параметр.

У статті розглянемо оптимізаційні задачі для знаходження числа, яке за L_p-нормою мінімально відрізняється від m заданих чисел $a_1, \dots, a_m$, та використаємо цю техніку для знаходження мінімального за L_p-нормою лінійного сплайна. Покажемо, що при певному виборі параметра p оптимізаційні задачі породжують відомі методи обробки експериментальних даних, та дослідимо властивості цих методів для p — такого, що $1 \le p \le 2$.

1. Про L_p -усереднення чисел. Нехай задано m чисел $a_1, \dots, a_m$. Потрібно знайти таке число a_p^*, яке за L_p -нормою мінімально відрізняється від чисел $a_1, \dots, a_m$. Умовимось його називати L_p -усередненим числом, або для зручності усередненим числом. Знаходженню числа a_p^* відповідає задача безумовної мінімізації опуклої негладкої функції: знайти

$$a_p^* = \underset{a \in R}{\operatorname{argmin}} \left\{ f_p(a) = \left(\sum_{i=1}^{m} \left| a - a_i \right|^p \right)^{1/p} \right\}, \qquad (1)$$

де $p \in R$ — скалярний параметр такий, що $p \ge 1$. Умова $p \ge 1$ забезпечує опуклість функції $f_p(a)$.

Задача (1) завжди має розв'язок, але не обов'язково він є єдиним. Так, наприклад, якщо $p = 1$ та $m = 2$, то задача (1) є задачею мінімізації функції $f_1(a) = |a - a_1| + |a - a_2|$. Її оптимальним розв'язком є $a_1^* = \lambda a_1 + (1 - \lambda) a_2$, де $0 \le \lambda \le 1$, a_1 та a_2 — довільні числа. При цьому мінімальне значення функції буде рівним $f_1(a_1^*) = |a_2 - a_1|$. Цей випадок для $a_1 = 1$ та $a_2 = 2$ показано на рис. 1, звідки легко бачити, що мінімальне значення функції $f_1(a) = |a - 1| + |a - 2|$ досягається у кожній із точок інтервалу [1, 2]. Їм відповідає мінімальне значення функції $f_1^* = 1$.

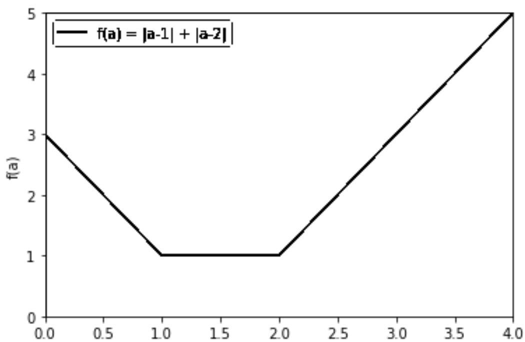

Рис. 1. *Графік функції* $f_1(a) = |a - 1| + |a - 2|$

Якщо $p = 1$, то аналогічна ситуація має місце і для чотирьох чисел $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 3$ та $a_4 = 6$ (див. рис. 2). Тут задача (1) є задачею мінімізації функції $f_1(a) = |a-1| + |a-2| + |a-3| + |a-6|$, оптимальним розв'язком якої є $a_1^* = 2\lambda + 3(1-\lambda) = 3 - \lambda$, де $0 \le \lambda \le 1$. При цьому мінімальне значення функції $f_1(a_1^*) = 6$.

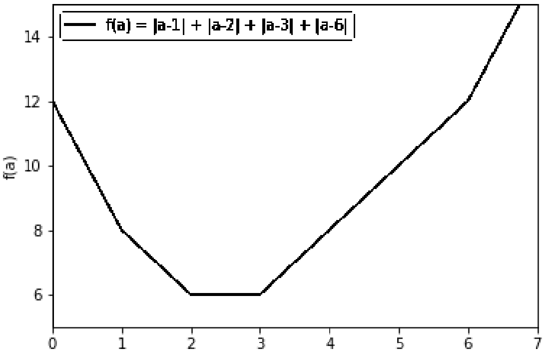

Рис. 2. *Графік функції* $f_1(a) = |a-1| + |a-2| + |a-3| + |a-6|$

Залежно від значень параметра p із задачі (1) витікають три її часткові випадки, що тісно пов'язані з відомими методами обробки експериментальних даних. Якщо $p = 1$, то отримуємо функцію

$$f_1(a) = |a - a_1| + \ldots + |a - a_m|, \qquad (1')$$

якій відповідає метод найменших модулів (МНМ), тобто у задачі (1) мінімізуються сумарні абсолютні величини відхилень невідомого числа a від заданих чисел $a_1, \ldots, a_m$. Якщо $p = 2$, то отримаємо функцію

$$f_2(a) = \sqrt{(a - a_1)^2 + \ldots + (a - a_m)^2}, \qquad (1'')$$

якій з точністю до кореня квадратного відповідає метод найменших квадратів (МНК), тобто у задачі (1) мінімізуються сумарні квадрати відхилень невідомого числа a від заданих чисел $a_1, \ldots, a_m$. Якщо $p = \infty$, то отримаємо функцію

$$f_\infty(a) = \max_{i=1,\ldots,m} \{|a - a_i|\}, \qquad (1''')$$

якій відповідає мінімаксний (чебишевський) метод, тобто у задачі (1) мінімізується максимальна серед абсолютних величин m відхилень невідомого числа a від заданих чисел $a_1, \ldots, a_m$. Отже, кожному з наведених значень параметра p відповідає свій метод розв'язання задачі (1) — МНМ ($p=1$), МНК ($p=2$), або мінімаксний (чебишевський) метод ($p=\infty$).

2. Властивості L_p -усереднених чисел. Розглянемо їх для значень $1\le p\le 2$, коли задачу (1) можна спростити, опустивши знак степеня $1/p$. В результаті отримаємо таку задачу мінімізації опуклої функції: знайти

$$a_p^* = \underset{a\in R}{\operatorname{argmin}}\left\{F_p(a)=\sum_{i=1}^{m}\left|a-a_i\right|^p\right\}, \qquad (2)$$

де p — скалярний параметр, такий що $1\le p\le 2$. Тут $F_p(a)$ — опукла функція, яка є негладкою тільки при $p=1$. При цьому мінімальні значення функції $f_p^*(a_p^*)$ в задачі (1) та функції $F_p^*(a_p^*)$ у задачі (2) зв'язані співвідношенням $F_p^*(a_p^*)=(f_p^*(a_p^*))^p$.

На відміну від того, що для задачі (1) обов'язково використовувати тільки методи мінімізації негладких опуклих функцій [3], для розв'язання задачі (2) підійдуть методи мінімізації гладких опуклих функцій. Окрім того, якщо $p>1$, то функція $F_p(a)$ є строго опуклою, тобто для неї виконується умова

$$f(\lambda x+(1-\lambda)y)<\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y),\quad \forall x\ne y,\, 0<\alpha<1. \qquad (2')$$

Якщо $p=1$, то задача (2) відповідає МНМ та зводиться до задачі лінійного програмування. Якщо $p=2$, то задача (2) відповідає МНК та є задачею мінімізації квадратичної функції

$$F_2(a)=(a-a_1)^2+\ldots+(a-a_m)^2 . \qquad (2'')$$

При цьому оптимальні значення функцій в задачах (1) і (2) зв’язані співвідношенням $F_2^*(a_2^*)=(f_2^*(a_2^*))^2$.

Лема 1. Якщо p — таке, що $1<p\le 2$, то задача (2) має єдиний розв’язок.

Доведення. Проведемо його методом від супротивного. Нехай a^* та a^{**} — два неспівпадаючі розв'язки задачі (2), яким відповідає оптимальне значення цільової функції $F_p^*=F_p(a^*)=F_p(a^{**})$.

Функція $F_p(a)$ при $1<p\le 2$ є строго опуклою, тому, враховуючи (2′), для $F_p(a^{***})$ — значення функції $F_p(a)$ в точці $a^{***}=\lambda a^*+(1-\lambda)a^{**}$ справедливі співвідношення

$$F_p(a^{***}) = F_p(\lambda a^* + (1-\lambda)a^{**}) <$$
$$< \lambda F_p(a^*) + (1-\lambda)F_p(a^{**}) = \lambda F_p^* + (1-\lambda)F_p^* = F_p^*,$$

з яких випливає нерівність $F_p(a^{***}) < F_p^*$. Вона суперечить тому, що a^* та a^{**} розв'язки задачі (2), так як в точці a^{***} значення функції $F_p(a^{***})$ є меншим за мінімальне значення F_p^*. Лема 1 доведена.

Зазначимо, що при $p = 2$ задача (2) має аналітичний розв'язок $a_2^* = (a_1 + \ldots + a_m)/m$ — середнє арифметичне чисел $a_1, \ldots, a_m$, який випливає із мінімізації квадратичної функції (2′′).

3. Про L_p-усереднення лінійних сплайнів. Оптимізаційні задачі (1) та (2) використаємо для пошуку лінійного сплайна, який мінімально за L_p-нормою відрізняється від m лінійних сплайнів $y^1, \ldots, y^m$, які визначені значеннями $y_1^i, \ldots, y_n^i$, $i = 1, \ldots, m$ в одних і тих же базових точках $x_1 < \ldots < x_n$ інтервалу $[x_1, x_n]$. Невідомими у задачах будуть значення $y = (y_1, \ldots, y_n)^T$.

Якщо $p \ge 1$, то знаходженню мінімального за L_p-нормою лінійного сплайна y_p^* буде відповідати задача безумовної мінімізації опуклої негладкої функції: знайти

$$y_p^* = \underset{y \in R^n}{\operatorname{argmin}} \left\{ f_p(y) = \left(\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} \left| y_j - y_j^i \right|^p \right)^{1/p} \right\}. \tag{3}$$

Тут умова $p \ge 1$ гарантує опуклість функції $f_p(y_1, \ldots, y_n)$ від n змінних.

Для значень $1 \le p \le 2$ задачу (3) можна спростити, аналогічно тому, як це було зроблено для задачі (2). Спрощеній задачі для знаходження мінімального за L_p-нормою лінійного сплайна y_p^* відповідає така задача мінімізації опуклої функції: знайти

$$y_p^* = \underset{y \in R^n}{\operatorname{argmin}} \left\{ F_p(y) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} \left| y_j - y_j^i \right|^p \right\}, \tag{4}$$

де p — скалярний параметр, такий що $1 \le p \le 2$. Тут $F_p(y)$ — сепарабельна опукла функція, яка є негладкою тільки при $p = 1$. При цьому мінімальні значення функції $f_p^*(y_p^*)$ в задачі (3) та функції $F_p^*(y_p^*)$ у задачі (4) зв'язані співвідношенням $F_p^*(y_p^*) = (f_p^*(y_p^*))^p$.

Лема 2. Якщо p — таке, що $1 < p \le 2$, то задача (4) має єдиний розв'язок.

Доведення. Враховуючи, що функція $F_p(y)$ є сепарабельною за невідомими $y_1, \dots, y_n$, то задачу (4) можна переформулювати як таку задачу мінімізації строго опуклої функції: знайти

$$y_p^* = \sum_{j=1}^{n} \underset{y_j \in R^1}{\operatorname{argmin}} \left\{ F_p(y_j) = \sum_{i=1}^{m} \left| y_j - f_i^j \right|^p \right\}, \qquad (4')$$

де p — скалярний параметр — такий, що $1 < p \le 2$. Застосовуючи до останньої n раз лему 1, отримаємо, що задача (4) має єдиний розв'язок. Лема 2 доведена.

При $p = 2$ аналогічно, як і у випадку задачі (2), задача (4) має аналітичний розв'язок $y_2^* = (y^1 + \dots + y^m) / m$ — середнє арифметичне m лінійних сплайнів $y^1, \dots, y^m$.

Висновки. В роботі розглянуто задачі безумовної мінімізації опуклих функцій для знаходження мінімальних за L_p-нормою лінійних сплайнів, використовуючи при цьому оптимізаційні задачі для знаходження числа, яке за L_p-нормою мінімально відрізняється від m заданих чисел $a_1, \dots, a_m$. У випадку, якщо $p \ge 1$, у задачах використовується негладка функція, а у випадку, якщо $1 < p \le 2$ — гладка функція. Якщо задачі (3) та (4) доповнити обмеженнями на властивості лінійного сплайна на окремих ділянках інтервалу (монотонність, опуклість, увігнутість, кривина), то можна автоматизувати вибір сплайн функцій для інтерполяції чи апроксимації кривих ліній гладкими функціями необхідної степені гладкості. Це може бути використано для побудови аеродинамічних профілів з заданими властивостями (кривина, ізогеометрія і т. п.).

Отримані в результаті оптимізаційні задачі можна ефективно розв'язувати за допомогою сучасних модифікацій r-алгоритмів — субградієнтних методів з розтягом простору в напрямку різниці двох послідовних субградієнтів [3, 4]. Використання методів мінімізації негладких функцій дає можливість будувати негладкі цільові функції, що значно розширює набір критеріїв оптимальності профілів, та включати негладкі функції в обмеження оптимізаційної задачі.

Матрично-векторні операції r-алгоритмів роблять їх перспективними в системах паралельних та розподілених обчислень. Наявні бібліотеки стандартних програм для паралельних матрично-векторних операцій дозволяють за короткий термін адаптувати алгоритми для ефективного розв'язання оптимізаційних задач для лінійних сплайнів з використанням векторних процесорів на основі графічних прискорювачів (GPU).

Робота виконана за фінансової підтримки НАН України (проект № 0118U005227) та Volkswagen Foundation (грант No 90 306).

Список використаних джерел:

1. Мудров В. И., Кушко В. Л. Метод наименьших модулей. М. : Знание, 1971. 64 с.
2. Зоркальцев В. И. Метод наименьших квадратов: геометрические свойства, альтернативные подходы, приложения. Новосибирск : Наука, 1995. 220 с.
3. Шор Н. З. Методы минимизации недифференцируемых функций и их приложения. Киев : Наук. думка, 1979. 200 с.
4. Стецюк П. И. Теория и программные реализации *r*-алгоритмов Шора. *Кибернетика и системный анализ*. 2017. № 5. С. 43–57.

ON AVERAGING NUMBERS AND LINEAR SPLINES

Problems of unconstrained minimization of convex functions for finding the minimal linear splines in L_p -norm for cases $p \ge 1$ and $1 \le p \le 2$ are considered. They are constructed analogically with similar problems for finding a number that is different minimally in L_p -norm from the m given numbers $a_1, \dots, a_m$. If $p \ge 1$, then the non-smooth function is used, and if $1 < p \le 2$ then the smooth function is used. It is shown, that with a certain choice of parameter p , the optimization problems generate the known methods: the method of least squares, the method of least absolute deviations, and the Chebyshev minimax method. The properties of solutions of problems with $1 < p \le 2$ are given.

Key words: *L_p -norm, the convex function, the non-smooth function, the method of least absolute deviations, the method of least squares.*

Одержано 15.02.2019