

УДК 519.6

DOI: 10.32626/2308-5878.2019-19.193-198

**Т. В. Чистякова**, канд. фіз.-мат. наук,

**П. С. Єршов**, аспірант

Інститут кібернетики імені В. М. Глушкова НАН України, м. Київ

## **ПРО ВИБІР РОЗРЯДНОСТІ ОБЧИСЛЕНЬ В ІНТЕЛЕКТУАЛЬНІЙ СИСТЕМІ ОБРОБКИ МАТРИЦЬ**

Описується модель прийняття рішень щодо вибору необхідного алгоритму та розрядності обчислень в інтелектуальній системі обробки матриць для достовірного розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь на багатоядерному комп'ютері з графічними процесорами.

**Ключові слова:** *гібридний комп'ютер, інтелектуальна система, система лінійних алгебраїчних рівнянь, підвищена розрядність.*

**Вступ.** Багато науково-технічних задач зводяться до розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР) великої розмірності з наближеними даними та невизначеними математичними властивостями. Для ефективного розв'язування таких великих задач необхідно використовувати сучасні потужні комп'ютери, наприклад, багатоядерні комп'ютери з графічними прискорювачами (гібридні комп'ютери). Вихідні дані математичних моделей більшості прикладних задач задаються наближено, тому в результаті заокруглень вхідних комп'ютерних даних задач відповідні комп'ютерні моделі можуть мати зовсім інші математичні властивості і результати розв'язування. Крім того, комп'ютерні методи розрахунку математичних моделей у свою чергу мають також наближений характер і вносять додаткові похибки в отримані машинні результати. Таким чином, проблема достовірності містить два природних аспекти: достовірність математичної моделі, яка описує прикладну задачу, і достовірність комп'ютерного розв'язку математичної моделі.

Похибку у розв'язку математичної задачі, яка обумовлена похибкою в заданні вихідних даних, називають спадковою похибкою. Якщо спадкова похибка розв'язку математичної задачі велика, то отриманий математичний розв'язок може не мати фізичного змісту, тобто такий розв'язок не буде містити в собі розв'язок фізичної задачі. Тому не всяка математична модель (математична задача з наближено заданими вихідними даними) буде містити розв'язок, що має фізичний зміст. Таким чином, виникає проблема визначення області дії математичної моделі, адже спадкову похибку не можна виправити математичними

методами розв'язування задачі. Для зменшення спадкової похибки необхідно або підвищити точність задання вихідних даних або переформулювати задачу щодо інших параметрів. Обчислювальна похибка для прямих методів виникає внаслідок заокруглень у ході реалізації алгоритму розв'язування математичної задачі в комп'ютері. Одним із способів мінімізації помилок, пов'язаних із заокругленням у комп'ютері даних та результатів обчислень, а також втратою точності через обмеженість представлення чисел в сучасних комп'ютерах, є подальше збільшення розрядності комп'ютерних обчислень [1].

Таким чином, необхідні нові підходи до створення програмного забезпечення на гібридні комп'ютери, які б забезпечували достовірним комп'ютерним розв'язком задачі при ефективному використанні обчислювальних ресурсів гібридних комп'ютерів.

**Функціональні можливості інтелектуальної системи для обробки матриць.** Пропонується інтелектуальна система для достовірного розв'язування СЛАР на багатоядерному комп'ютері з графічними процесорами, яка здатна самостійно досліджувати математичні властивості комп'ютерних моделей задач та приймати рішення щодо ефективного їх розв'язування. При створенні такої інтелектуальної системи передбачена обробка трьох її складових (дані про задачу, ознаки та властивості, алгоритми).

Дані вводяться в комп'ютер за допомогою інтелектуального інтерфейсу: вид матриці, порядок матриці, кількість правих частин тощо. Передбачено розв'язування задач з матрицями різного виду (щільними, стрічковими, розрідженими довільної структури).

Ознаки та властивості. До них відносяться математичні властивості комп'ютерної моделі задачі, які визначено в результаті дослідження за розробленою технологією.

Алгоритми. Передбачено набір гібридних алгоритмів ефективних методів розв'язування СЛАР з різними матрицями — додатно визначеними, невиродженими, погано обумовленими, виродженими.

На основі проведених досліджень вхідних даних та аналізу результатів досліджень інтелектуальна система приймає рішення щодо вирішення таких питань:

- визначення оптимальної кількості процесорів та побудова ефективної топології міжпроцесорних зв'язків гібридного комп'ютера;
- дворівневе розпаралелення обчислень на необхідних обчислювальних ресурсах центрального процесора та графічних процесорів;
- автоматичне визначення необхідної розрядності обчислень;
- аналіз достовірності комп'ютерних результатів.

**Технологія дослідження та розв'язування СЛАР.** Розглянемо технологію розв'язування лінійних систем з наближеними даними,

яку реалізовано інтелектуальній системі, на прикладі розв'язування СЛАР із щільними несиметричними квадратними матрицями.

Дослідження та розв'язування СЛАР виду  $Ax = b$  розпочинається з обчислення оцінки числа обумовленості матриці на подвійній розрядності в ході реалізації гібридного алгоритму  $LU$ -розвинення матриці за схемою [2, 3]:

$$A \cong LU \quad \|A\|_1 = \max_j \sum_{i=1}^n |a_{ij}|, \quad Uw = e, \quad L^T y = w, \quad Lv = y, \quad Uz = v,$$

$$\text{cond}A = \|A\|_1 \|z\|_1 / \|y\|_1, \quad \|z\|_1 = \sum_{i=1}^n |z_i|, \quad \|y\|_1 = \sum_{i=1}^n |y_i|.$$

Якщо матриця системи виявилася в комп'ютері невиродженою, то розв'язування задачі продовжується на подвійній розрядності з оцінками достовірності результатів: оцінка близькості машинного розв'язку до математичного та оцінка спадкової похибки.

Верхня межа відносної спадкової похибки обчислюється за формулою:

$$E_{\text{спадкова}} = \frac{\|x - \tilde{x}\|}{\|\tilde{x}\|} \leq \text{cond}A \times \frac{\varepsilon_A + \varepsilon_b}{1 - \varepsilon_b},$$

де  $\tilde{x}$  — точний розв'язок системи з точно заданими вихідними даними;  $x$  — точний розв'язок системи з наближено заданими вихідними даними;  $\varepsilon_A$ ,  $\varepsilon_b$  — максимальні відносні похибки елементів матриці та правої частини СЛАР відповідно.

Характеристикою близькості машинного розв'язку до математичного є оцінка обчислювальної похибки розв'язку. Для її обчислення використовується один крок процедури ітераційного уточнення розв'язку.

Ітераційне уточнення розв'язку системи  $Ax = b$  реалізується за схемою [2]:

$$\begin{aligned} x^{(0)} &= x, \\ r^{(s)} &= b - Ax^{(s)}, \\ A \times \Delta x^s &+ r^{(s)}, \\ Ax^{(s+1)} &= x^{(s)} + \Delta x^{(s)}, \quad s = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Обчислення нев'язки  $r_i^{(s)}$  виконується на підвищеній розрядності (на регістрах процесора, де розрядність на декілька знаків більша у порівнянні з основною подвійною розрядністю).

Оцінка обчислювальної похибки розв'язку визначається за формулою:

$$E_{\text{обчис.}} < \frac{\|\Delta x_1\|}{\|x_2\|},$$

де  $x_1$  — обчислений розв'язок системи,  $x_2$  — наближення до точного розв'язку, яке отримано за один крок ітераційного уточнення.

Якщо значення  $\text{cond}A$  задовольняє в комп'ютері умові:

$$1.0 + 1.0/\text{cond}A = 1.0, \quad (1)$$

то матриця вважається виродженою у межах подвійної точності. В цьому випадку розв'язування автоматично продовжується з використанням розрядності обчислень 128. По закінченню обчислювального процесу видається отриманий вектор розв'язку системи.

Якщо матриця СЛАР, яка введена в комп'ютер, не кваліфікується за (1) як вироджена, але

$$\varepsilon_A \times \text{cond}A \geq 1,$$

( $\varepsilon_A$  — максимальна відносна похибка елементів матриці), то така матриця СЛАР в комп'ютері виявляється виродженою у межах подвійної точності задання її елементів, тому не можна гарантувати достовірність обчисленого розв'язку. Оскільки навіть при введенні в комп'ютер точно заданих елементів СЛАР здійснюється їх заокруглення, тому  $\varepsilon_A$  присвоюються значення *macheps* — найменшого числа з плаваючою комою, для якого в комп'ютері виконується умова [4]:

$$1 + \text{macheps} > 1.$$

В цьому випадку розв'язування автоматично продовжується з використанням підвищеної розрядності обчислень, наприклад 128. Оцінка обчислювальної похибки розв'язку системи отримується за формулою:

$$E_{\text{обчис.}} = \text{cond}A \times \text{macheps}.$$

**Демонстраційна задача.** Дослідити та розв'язати в інтелектуальній системі СЛАУ виду  $Ax = b$ , де

$$A = (a_{ij}), \quad i, j = 1 \div n, \quad n = 3w + 1, \quad w = 1, 2, \dots$$

$$a_{ii} = n - i, \quad a_{ij} = n + 1 - \max(i, j).$$

Тобто щільна симетрична матриця  $A$  має вигляд:

$$A = \begin{pmatrix} n-1 & n-1 & n-2 & \dots & 2 & 1 \\ n-1 & n-2 & n-2 & \dots & 2 & 1 \\ n-2 & n-2 & n-3 & \dots & 2 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Елементи правої частини системи обчислюються за формулами:

$$b = \{b_i\}_1^n, \quad b_i = n - i, \quad \text{якщо } i \leq 2;$$

$$b_i = n + 1 - i, \quad \text{якщо } i > 2.$$

Точний розв'язок системи:

$$x = (0 \ 1 \ 0 \ \dots \ 0)^T, \text{ порядок системи: } n = 1000.$$

**Лістинг протоколу дослідження та розв'язування задачі**

PROBLEM:

solving of the linear algebraic system  
with a symmetric positive defined matrix

Data:

```
- number of matrix's rows           = 1000
- number of matrix's columns        = 1000
- number of the right-hand side
  of the systems                     = 1
- maximum relative error
  of the matrix elements              =
0.000000e+00
- maximum relative error
  of elements of the right-hand sides =
0.000000e+00
```

Process of investigating and solving

Double precision

METHOD:

Choletsky decomposition

RESULTS:

!!! THE MATRIX IS NOT POSITIVE DEFINED !!!

METHOD:

Gauss elimination with partial pivoting

RESULTS:

!!! THE MATRIX IS MACHINE-SINGULAR !!!

PRECISION: 128

SOLUTION

first 4 components of solution are:

0 1 0 0

Computational error in the solution: 0.000000e+00

The vector of solution are successfully stored in  
the file result.out

**Висновки.** Розглянуто інтелектуальну систему для дослідження та розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь з використанням підвищеної розрядності обчислень та аналізом достовірності комп'ютерних результатів. Забезпечується не тільки гарантія досто-

вірності результатів, але також звільнення користувачів від проблем розпаралелення обчислень на складній гібридній архітектурі.

#### Список використаних джерел:

1. Nikolaevskaja E. A., Khimich A. N., Chistyakova T. V. Programming with Multiple Precision. Springer-Verlag. Studies in Computational Intelligence. Berlin, Heidelberg. 2012. Vol. 397 233 p.
2. Молчанов И. Н. Машинные методы решения прикладных задач. Алгебра, приближение функций. Киев : Наук. думка, 1987. 285 с.
3. Химич А. Н., Молчанов И. Н., Попов А. В. и др. Параллельные алгоритмы решения задач вычислительной математики. Киев : Наук. думка, 2008. 248 с.
4. Форсайт Дж., Малькольм М., Моулер К. Машинные методы математических вычислений. М. : Мир, 1980. 275 с.

### ABOUT CHOICE OF DETERMINATION OF THE CALCULATIONS IN THE INTELLECTUAL MATRIX PROCESSING SYSTEM

The decision-making model for choosing the required algorithm and the digit capacity of calculations in a intelligente system for the reliable solution of linear algebraic equations systems on a multi-core computer with graphic processors is described.

**Key words:** *hybrid computer, intelligente system, a system of linear algebraic equations, increased bit depth.*

Одержано 17.02.2019