УДК 517.946
DOI: 10.32626/2308-5878.2019-20.26-40

І. М. Конет, д-р фіз.-мат. наук, професор,
Т. М. Пилипюк, канд. фіз.-мат. наук

Кам'янець-Подільський національний університет
імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський

ПАРАБОЛІЧНІ КРАЙОВІ ЗАДАЧІ В НЕОБМЕЖЕНОМУ КУСКОВО-ОДНОРІДНОМУ КЛИНОВИДНОМУ СУЦІЛЬНОМУ ЦИЛІНДРІ

У пропонованій статті методом класичних інтегральних і гібридних інтегральних перетворень у поєднанні з методом головних розв'язків (матриць впливу та матриць Гріна) вперше побудовано єдині точні аналітичні розв'язки параболічних крайових задач математичної фізики в необмеженому за змінною z кусково-однорідному за радіальною змінною r клиновидному за кутовою змінною φ суцільному циліндрі.

Розглянуто випадки задання на гранях клина крайових умов Діріхле і Неймана та їх можливих комбінацій (Діріхле–Неймана, Неймана–Діріхле).

Для побудови розв'язків досліджуваних крайових задач застосовано скінченне інтегральне перетворення Фур'є щодо кутової змінної, інтегральне перетворення Фур'є на декартовій осі щодо аплікатної змінної та гібридне інтегральне перетворення типу Ганкеля 1-го роду на сегменті полярної осі з n точками спряження щодо радіальної змінної.

Послідовне застосування інтегральних перетворень за геометричними змінними дозволяє звести тривимірні початково-крайові задачі спряження до задачі Коші для звичайного лінійного неоднорідного диференціального рівняння 1-го порядку, єдиний розв'язок якої виписано в замкнутому вигляді.

Застосування обернених інтегральних перетворень відновлює в явному вигляді розв'язки розглянутих задач через їх інтегральне зображення.

Ключові слова: *параболічне рівняння, початкові та крайові умови, умови спряження, інтегральні перетворення, гібридні інтегральні перетворення, головні розв'язки.*

Вступ. Теорія крайових задач для диференціальних рівнянь з частинними похідними, зокрема рівнянь математичної фізики, — важливий розділ сучасної теорії диференціальних рівнянь, який в наш час інтенсивно розвивається. Її актуальність обумовлена як значимістю її результатів для розвитку багатьох розділів математики, так і численними застосуваннями її досягнень при дослідженні різноманітних математичних моделей різних процесів і явищ фізики, механіки, хімії, біології, медицини, економіки, екології, техніки, новітніх технологій.

Вагомі результати з теорії задачі Коші та крайових задач для рівнянь параболічного типу одержано у відомих працях Городецького В. В. [2], Житарашу М. В., Ейдельмана С. Д. [6], Загорського Т. Я. [7], Івасишена С. Д. [8], Ладиженської О. А., Солоннікова В. А., Уральцевої Н. М. [14], Ландіса Є. М. [15], Матійчука М. І. [16], Пукальського І. Д. [18], Фрідмана А. [22], Ейдельмана С. Д. [24] та інших вітчизняних і зарубіжних математиків.

Добре відомо, що складність досліджуваних крайових задач суттєво залежить як від властивостей коефіцієнтів рівнянь (різні види вироджeностей і особливостей коефіцієнтів), так і від геометричної структури області (гладкість межі, наявність кутових точок, обмеженість, необмеженість тощо), в якій розглядається задача. На цей час досить детально вивчено властивості розв’язків і розвинуто різноманітні методи побудови розв’язків (точні та наближені) крайових задач для лінійних, квазілінійних і деяких нелінійних рівнянь різних типів (еліптичних, параболічних, гіперболічних) в однозв'язних областях (однорідних середовищах), які обумовлені згаданими вище властивостями коефіцієнтів рівнянь і геометрією області, та побудовано функціональні простори коректності задач в сенсі Адамара.

Водночас багато важливих прикладних задач термомеханіки, теплофізики, дифузії, теорії пружності, теорії електричних кіл, теорії коливань, механіки деформівного твердого тіла приводять до крайових і мішаних задач для диференціальних рівнянь з частинними похідними різних типів не тільки в однорідних середовищах, коли коефіцієнти рівнянь є неперервними, але й в неоднорідних і кусково-однорідних середовищах, коли коефіцієнти рівнянь є кусково-неперервними функціями чи, зокрема, кусково-сталими [4, 5, 19].

Відомо, що крім методу відокремлення змінних (методу Фур'є) та його узагальнень, одним з важливих і ефективних методів вивчення лінійних крайових і мішаних задач для диференціальних рівнянь з частинними похідними в однорідних середовищах є метод інтегральних перетворень, який дає можливість побудувати в аналітичному вигляді точні розв’язки розглянутих задач через їх інтегральне зображення.

У той же час для досить широкого класу лінійних крайових задач у кусково-однорідних середовищах ефективним методом побудови їх розв'язків виявився метод гібридних інтегральних перетворень, що породжені відповідними гібридними диференціальними операторами, коли на кожній компоненті зв’язності кусково-однорідного середовища розглядаються або ж різні диференціальні оператори, або ж диференціальні оператори того ж самого вигляду, але з різними наборами коефіцієнтів [3, 9–12].

У цій статті, яка є логічним продовженням [13], за допомогою методу інтегральних і гібридних інтегральних перетворень у поєднанні з методом головних розв'язків побудовано інтегральні зображення єдиних точних аналітичних розв'язків параболічних початково-крайових задач математичної фізики в необмеженому кусково-однорідному клиновидному суцільному циліндрі.

Постановка задачі. Розглянемо задачу побудови обмеженого на множині

$$D = \{(t, r, \varphi, z) : t > 0; r \in I_n^+ = \bigcup_{j=1}^{n+1} I_j \equiv \bigcup_{j=1}^{n+1} (R_{j-1}; R_j), R_0 > 0, R_{n+1} = R < +\infty; \varphi \in (0; \varphi_0), 0 < \varphi_0 < 2\pi; z \in (-\infty; +\infty)\}$$

класичного розв'язку лінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними параболічного типу 2-го порядку [17]

$$\frac{\partial u_j}{\partial t} - \left[a_{rj}^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{a_{\varphi j}^2}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + a_{zj}^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] u_j + \chi_j^2 u_j = f_j(t, r, \varphi, z);\ r \in I_j;\ j = \overline{1, n+1} \tag{1}$$

з початковими умовами

$$u_j(t, r, \varphi, z)\big|_{t=0} = g_j(r, \varphi, z); \quad r \in I_j; \quad j = \overline{1, n+1}, \tag{2}$$

крайовими умовами

$$\left.\frac{\partial^s u_j}{\partial z^s}\right|_{z=-\infty} = 0; \quad \left.\frac{\partial^s u_j}{\partial z^s}\right|_{z=+\infty} = 0; \quad s = 0,1; \quad j = \overline{1, n+1}, \tag{3}$$

$$\left.\frac{\partial^s u_1}{\partial r^s}\right|_{r=0} = 0; \quad \left.\left(\alpha_{22}^{n+1} \frac{\partial}{\partial r} + \beta_{22}^{n+1} \right) u_{n+1}\right|_{r=R} = g(t, \varphi, z);\ s = 0,1; \tag{4}$$

одними з крайових умов на гранях клина [13]

$$u_j\big|_{\varphi=0} = g_{1j}(t, r, z); \quad u_j\big|_{\varphi=\varphi_0} = w_{1j}(t, r, z); \quad j = \overline{1, n+1}, \tag{5}$$

$$u_j\big|_{\varphi=0} = g_{2j}(t, r, z); \quad \left.\frac{\partial u_j}{\partial \varphi}\right|_{\varphi=\varphi_0} = -w_{2j}(t, r, z); \quad j = \overline{1, n+1}, \tag{6}$$

$$\left.\frac{\partial u_j}{\partial \varphi}\right|_{\varphi=0} = g_{3j}(t, r, z); \quad u_j\big|_{\varphi=\varphi_0} = w_{3j}(t, r, z); \quad j = \overline{1, n+1}, \tag{7}$$

$$\left.\frac{\partial u_j}{\partial \varphi}\right|_{\varphi=0} = g_{4j}(t, r, z); \quad \left.\frac{\partial u_j}{\partial \varphi}\right|_{\varphi=\varphi_0} = -w_{4j}(t, r, z); \quad j = \overline{1, n+1} \tag{8}$$

та умовами спряження [12]

$$\left[\left(\alpha_{j1}^{k}\frac{\partial}{\partial r}+\beta_{j1}^{k}\right)u_k-\left(\alpha_{j2}^{k}\frac{\partial}{\partial r}+\beta_{j2}^{k}\right)u_{k+1}\right]\Bigg|_{r=R_k}=0;\ j=1,2;\ k=\overline{1,n},\quad (9)$$

де a_{rj}, $a_{\varphi j,}$ a_{zj}, χ_j, α_{js}^k, β_{js}^k — деякі сталі;

$$c_{jk}=\alpha_{2j}^k\beta_{1j}^k-\alpha_{1j}^k\beta_{2j}^k\neq 0;\ c_{1k}\cdot c_{2k}>0;\ \alpha_{22}^{n+1}\geq 0,\ \ \beta_{22}^{n+1}\geq 0;\ \alpha_{22}^{n+1}+\beta_{22}^{n+1}\neq 0;$$

$$f(t,r,\varphi,z)=\{f_1(t,r,\varphi,z),f_2(t,r,\varphi,z),\dots,f_{n+1}(t,r,\varphi,z)\};$$

$$g(r,\varphi,z)=\{g_1(r,\varphi,z),g_2(r,\varphi,z),\dots,g_{n+1}(r,\varphi,z)\};$$

$$g(t,\varphi,z),\ g_{pj}(t,r,z),\ w_{pj}(t,r,z);\ (p=\overline{1,4};\ j=\overline{1,n+1})$$

— задані дійсні обмежені неперервні функції;

$$u(t,r,\varphi,z)=\{u_1(t,r,\varphi,z),u_2(t,r,\varphi,z),\dots,u_{n+1}(t,r,\varphi,z)\}$$

— шукана неперервно диференційовна за змінною t і двічі неперервно диференційовна за геометричними змінними (r,φ,z) функція.

Зауважимо, що:

1) у випадку $\chi_j\equiv 0$ $(j=\overline{1,n+1})$ рівняння (1) є класичним тривимірним неоднорідним рівнянням теплопровідності (дифузії) для ортотропного середовища у циліндричній системі координат;
2) якщо $\alpha_{11}^k=0$, $\beta_{11}^k=1$; $\alpha_{12}^k=0$, $\beta_{12}^k=1$; $\alpha_{21}^k=\lambda_1^k$, $\beta_{21}^k=0$; $\alpha_{22}^k=\lambda_2^k$, $\beta_{22}^k=0$, де λ_1^k, λ_2^k — коефіцієнти теплопровідності, то умови спряження (9) збігаються з умовами ідеального теплового (термічного) контакту;
3) якщо $\alpha_{11}^k=b_k$, $\beta_{11}^k=1$; $\alpha_{12}^k=0$, $\beta_{12}^k=1$; $\alpha_{21}^k=\lambda_1^k$, $\beta_{21}^k=0$; $\alpha_{22}^k=\lambda_2^k$, $\beta_{22}^k=0$, де b_k — коефіцієнти термоопору, то умови спряження (9) збігаються з умовами неідеального теплового контакту.

Отже, у зазначених випадках 1, 2 (або 1, 3) розглянута параболічна крайова задача математичної фізики моделює процеси теплопровідності в необмеженому кусково-однорідному клиновидному суцільному циліндрі.

Основна частина. Припустимо, що розв'язки параболічних початково-крайових задач спряження (1)–(4), (5), (9); (1)–(4), (6), (9); (1)–(4), (7), (9); (1)–(4), (8), (9) існують і задані й шукані функції задовольняють умови застосовності залучених нижче прямих та обернених інтегральних і гібридних інтегральних перетворень [12, 20, 21].

Згідно з [21] визначимо скінченні пряме $F_{m,ik}$ та обернене $F_{m,ik}^{-1}$ інтегральні перетворення Фур'є щодо кутової змінної $\varphi\in(0;\varphi_0)$ за формулами:

$$F_{m,ik}[f(\varphi)] = \int_0^{\varphi_0} f(\varphi)U_{m,ik}(\varphi)d\varphi \equiv f_{m,ik}, \tag{10}$$

$$F_{m,ik}^{-1}[f_{m,ik}] = \frac{2}{\varphi_0}\sum_{m=0}^{\infty}\varepsilon_m^{ik} f_{m,ik}U_{m,ik}(\varphi) \equiv f(\varphi), \tag{11}$$

де

$$U_{m,11}(\varphi) = \sin(\beta_{m,11}\varphi); \;\; \beta_{m,11} = \frac{\pi m}{\varphi_0};$$

$$U_{m,12}(\varphi) = \sin(\beta_{m,12}\varphi); \;\; \beta_{m,12} = \frac{\pi(2m+1)}{2\varphi_0};$$

$$U_{m,21}(\varphi) = \cos(\beta_{m,21}\varphi); \;\; \beta_{m,21} = \beta_{m,12};$$

$$U_{m,22}(\varphi) = \cos(\beta_{m,22}\varphi); \;\; \beta_{m,22} = \beta_{m,11};$$

$$\varepsilon_0^{ik} = 0; \;\; \varepsilon_m^{ik} = 1 \text{ при } ik = 11, 12, 21; \;\; m = 1, 2, 3, \ldots;$$

$$\varepsilon_0^{22} = \frac{1}{2}; \;\; \varepsilon_m^{22} = 1 \text{ при } m = 1, 2, 3, \ldots .$$

При цьому для інтегрального оператора $F_{m,ik}$ виконується тотожність

$$F_{m,ik}\left[\frac{d^2 f}{d\varphi^2}\right] = -\beta_{m,ik}^2 f_{m,ik} + \Phi_{m,ik}; \;\; i, k = 1, 2, \tag{12}$$

де

$$\Phi_{m,11}(f) = \frac{\pi m}{\varphi_0}\left[f(0) + (-1)^{m+1} f(\varphi_0)\right];$$

$$\Phi_{m,12}(f) = \frac{\pi(2m+1)}{2\varphi_0} f(0) + (-1)^m \left.\frac{df}{d\varphi}\right|_{\varphi=\varphi_0};$$

$$\Phi_{m,21}(f) = -\left.\frac{df}{d\varphi}\right|_{\varphi=0} + (-1)^m \frac{\pi(2m+1)}{2\varphi_0} f(\varphi_0);$$

$$\Phi_{m,22} = -\left.\frac{df}{d\varphi}\right|_{\varphi=0} + (-1)^m \left.\frac{df}{d\varphi}\right|_{\varphi=\varphi_0}.$$

Інтегральний оператор $F_{m,ik}$, який діє за формулою (10), внаслідок тотожності (12) тривимірним початково-крайовим задачам спряження (1)–(4), (5), (9); (1)–(4), (6), (9); (1)–(4), (7), (9); (1)–(4), (8), (9) ставить у відповідність задачу побудови обмеженого на множині $D' = \left\{(t, r, z) : t > 0; r \in I_n^+; z \in (-\infty; +\infty)\right\}$ класичного розв'язку двовимірних диференціальних рівнянь параболічного типу 2-го порядку

$$\frac{\partial u_{jm,ik}}{\partial t}-\left[a_{rj}^2\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}-\frac{\nu_{jm,ik}^2}{r^2}\right)+a_{zj}^2\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right]u_{jm,ik}+\chi_j^2 u_{jm,ik}= \tag{13}$$
$$=G_{jm,ik}(t,r,z);\ r\in I_j;\ j=\overline{1,n+1}$$

з початковими умовами

$$u_{jm,ik}(t,r,z)\big|_{t=0}=g_{jm,ik}(r,z);\ r\in I_j;\ \ j=\overline{1,n+1}, \tag{14}$$

крайовими умовами

$$\left.\frac{\partial^s u_{jm,ik}}{\partial z^s}\right|_{z=-\infty}=0;\ \left.\frac{\partial^s u_{jm,ik}}{\partial z^s}\right|_{z=+\infty}=0;\ \ s=0,1;\ \ j=\overline{1,n+1}, \tag{15}$$

$$\left.\frac{\partial^s u_{1m,ik}}{\partial r^s}\right|_{r=0}=0;\ \left.\left(\alpha_{22}^{n+1}\frac{\partial}{\partial r}+\beta_{22}^{n+1}\right)u_{n+1m,ik}\right|_{r=R}=g_{m,ik}(t,z) \tag{16}$$

та умовами спряження

$$\left.\left[\left(\alpha_{j1}^p\frac{\partial}{\partial r}+\beta_{j1}^p\right)u_{pm,ik}-\left(\alpha_{j2}^p\frac{\partial}{\partial r}+\beta_{j2}^p\right)u_{p+1,m,ik}\right]\right|_{r=R_p}=0; \tag{17}$$
$$j=1,2;\ \ p=\overline{1,n},$$

де $\nu_{jm,ik}=a_{rj}^{-1}a_{\varphi j}\beta_{m,ik}$;

$$G_{jm,ik}(t,r,z)=f_{m,ik}(t,r,z)+a_{\varphi j}^2 r^{-2}\Phi_{m,ik}(t,r,z).$$

Застосуємо до двовимірної початково-крайової задачі спряження (13)–(17) інтегральне перетворення Фур'є на декартовій осі $(-\infty;+\infty)$ щодо змінної z [20]:

$$F\left[g(z)\right]=\int_{-\infty}^{+\infty}g(z)\exp(-i\sigma z)dz\equiv\tilde{g}(\sigma),\ \ i=\sqrt{-1}, \tag{18}$$

$$F^{-1}[\tilde{g}(\sigma)]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\tilde{g}(\sigma)\exp(i\sigma z)d\sigma\equiv g(z), \tag{19}$$

$$F\left[\frac{d^2g}{dz^2}\right]=-\sigma^2F[g(z)]\equiv-\sigma^2\tilde{g}(\sigma). \tag{20}$$

Інтегральний оператор F, який діє за формулою (18), внаслідок тотожності (20) крайовій задачі (13)–(17) ставить у відповідність задачу побудови обмеженого на множині $D''=\left\{(t,r):t>0;r\in I_n^+\right\}$ класичного розв'язку одновимірних диференціальних рівнянь B -параболічного типу 2-го порядку

$$\frac{\partial \tilde{u}_{jm,ik}}{\partial t} - a_{rj}^2 B_{\nu_{jm,ik}}[\tilde{u}_{jm,ik}] + \left(a_{zj}^2\sigma^2 + \chi_j^2\right)\tilde{u}_{jm,ik} = \tilde{G}_{jm,ik}(t,r,\sigma);\quad r \in I_j;\ j = \overline{1,n+1} \tag{21}$$

з початковими умовами

$$\tilde{u}_{jm,ik}(t,r,\sigma)\Big|_{t=0} = \tilde{g}_{jm,ik}(r,\sigma);\ \ r \in I_j;\ \ \ j = \overline{1,n+1}, \tag{22}$$

крайовими умовами

$$\left.\frac{\partial^s \tilde{u}_{1m,ik}}{\partial r^s}\right|_{r=0} = 0;\ \left(\alpha_{22}^{n+1}\frac{\partial}{\partial r} + \beta_{22}^{n+1}\right)\tilde{u}_{n+1,m,ik}\Big|_{r=R} = \tilde{g}_{m,ik}(r,\sigma) \tag{23}$$

та умовами спряження

$$\left.\left[\left(\alpha_{j1}^p\frac{\partial}{\partial r} + \beta_{j1}^p\right)\tilde{u}_{pm,ik} - \left(\alpha_{j2}^p\frac{\partial}{\partial r} + \beta_{j2}^p\right)\tilde{u}_{p+1,m,ik}\right]\right|_{r=R_0} = 0;\quad j = 1,2;\ p = \overline{1,n}, \tag{24}$$

де $B_{\nu_{jm,ik}} = \dfrac{\partial^2}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r} - \dfrac{\nu_{jm,ik}^2}{r^2}$ — класичний диференціальний оператор Бесселя.

До одновимірної початково-крайової задачі спряження (21)–(24) застосуємо скінченне гібридне інтегральне перетворення типу Ганкеля 1-го роду на кусково-однорідному сегменті I_n^+ з n точками спряження щодо радіальної змінної r [12]:

$$H_{sn}\left[f(r)\right] = \int_0^R f(r)V(r,\lambda_s)\sigma(r)rdr \equiv \tilde{f}(\lambda_s), \tag{25}$$

$$H_{sn}^{-1}\left[\tilde{f}(\lambda_s)\right] = \sum_{s=1}^{\infty}\tilde{f}(\lambda_s)\frac{V(r,\lambda_s)}{\left\|V(r,\lambda_s)\right\|^2} \equiv f(r), \tag{26}$$

$$\begin{aligned} H_{sn}\left[B_{(m,ik)}[f(r)]\right] &= -\lambda_s^2\tilde{f}(\lambda_s) - \sum_{k=1}^{n+1}\gamma_k^2\int_{R_{k-1}}^{R_k} f(r)V_k(r,\lambda_s)\sigma_k rdr + \\ &+ a_{n+1}^2 R\sigma_{n+1}\left(\alpha_{22}^{n+1}\right)^{-1}V_{n+1}(R,\lambda_s)\left(\alpha_{22}^{n+1}\frac{df}{dr} + \beta_{22}^{n+1}f\right)\Big|_{r=R}. \end{aligned} \tag{27}$$

У формулах (25)–(27) беруть участь, виписані в [12], спектральна функція $V(r,\lambda_s)$, вагова функція $\sigma(r)$ та гібридний диференціальний оператор Бесселя

$$B_{(m,ik)} = \sum_{j=1}^{n} a_j^2\theta(r - R_{j-1})\theta(R_j - r)B_{\nu_{jm,ik}},$$

де $\theta(x)$ — одинична функція Гевісайда.

Запишемо диференціальні рівняння (21) та початкові умови (22) у матричній формі

$$\begin{bmatrix} \left(\frac{\partial}{\partial t} - a_1^2 B_{\nu_{1m,ik}} + q_1^2(\sigma)\right)\tilde{u}_{1m,ik}(t,r,\sigma) \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} - a_2^2 B_{\nu_{2m,ik}} + q_2^2(\sigma)\right)\tilde{u}_{2m,ik}(t,r,\sigma) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} - a_{n+1}^2 B_{\nu_{n+1,m,ik}} + q_{n+1}^2(\sigma)\right)\tilde{u}_{n+1,m,ik}(t,r,\sigma) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{G}_{1m,ik}(t,r,\sigma) \\ \tilde{G}_{2m,ik}(t,r,\sigma) \\ \dots\dots\dots \\ \tilde{G}_{n+1,m,ik}(t,r,\sigma) \end{bmatrix}, \quad (28)$$

$$\left.\begin{bmatrix} \tilde{u}_{1m,ik}(t,r,\sigma) \\ \tilde{u}_{2m,ik}(t,r,\sigma) \\ \dots\dots\dots \\ \tilde{u}_{n+1,m,ik}(t,r,\sigma) \end{bmatrix}\right|_{t=0} = \begin{bmatrix} \tilde{g}_{1m,ik}(r,\sigma) \\ \tilde{g}_{2m,ik}(r,\sigma) \\ \dots\dots\dots \\ \tilde{g}_{n+1,m,ik}(r,\sigma) \end{bmatrix}, \quad (29)$$

де $q_j^2(\sigma) = a_{zj}^2\sigma^2 + \chi_j^2;\quad j = \overline{1, n+1}.$

Інтегральний оператор H_{sn}, який діє за формулою (25), зобразимо у вигляді операторної матриці-рядка

$$H_{sn}[\cdots] = \Bigg[\int_0^{R_1} \cdots V_1(r,\lambda_s)\sigma_1 r dr \quad \int_{R_1}^{R_2} \cdots V_2(r,\lambda_s)\sigma_2 r dr \quad \cdots \quad \int_{R_{n-1}}^{R_n} \cdots V_n(r,\lambda_s)\sigma_n r dr \quad \int_{R_n}^{R} \cdots V_{n+1}(r,\lambda_s)\sigma_{n+1} r dr \Bigg] \quad (30)$$

і застосуємо за правилом множення матриць до задачі (28), (29). Внаслідок тотожності (27) одержуємо задачу Коші для звичайних диференціальних рівнянь 1-го порядку

$$\sum_{j=1}^{n+1}\left(\frac{d}{dt} + \lambda_s^2 + \gamma_j^2 + q_j^2(\sigma)\right)\tilde{\tilde{u}}_{jm,ik}(t,\lambda_s,\sigma) = \sum_{j=1}^{n+1}\tilde{\tilde{G}}_{jm,ik}(t,\lambda_s,\sigma) + $$
$$+ a_{n+1}^2 R\sigma_{n+1}\left(\alpha_{22}^{n+1}\right)^{-1} V_{n+1}(R,\lambda_s)\tilde{g}_{m,ik}(t,\sigma), \quad (31)$$

$$\left.\sum_{j=1}^{n+1}\tilde{\tilde{u}}_{jm,ik}(t,\lambda_s,\sigma)\right|_{t=0} = \sum_{j=1}^{n+1}\tilde{\tilde{g}}^1_{jm,ik}(\lambda_s,\sigma), \quad (32)$$

де $\tilde{\tilde{u}}_{jm,ik}(t,\lambda_s,\sigma) = \int_{R_{j-1}}^{R_j} \tilde{u}_{jm,ik}(t,r,\sigma)V_j(r,\lambda_s)\sigma_j r dr;$

$$\tilde{\tilde{G}}_{jm,ik}(t,\lambda_s,\sigma) = \int\limits_{R_{j-1}}^{R_j} \tilde{G}_{jm,ik}(t,r,\sigma)V_j(r,\lambda_s)\sigma_j r dr;$$

$$j = \overline{1, n+1},$$

$$\tilde{\tilde{g}}_{jm,ik}(\lambda_s,\sigma) = \int\limits_{R_{j-1}}^{R_j} \tilde{g}_{jm,ik}(r,\sigma)V_j(r,\lambda_s)\sigma_j r dr,$$

$$j = \overline{1, n+1}.$$

Припустимо, не зменшуючи загальності розв'язку задачі, що $\max\left\{q_1^2(\sigma), q_2^2(\sigma), ..., q_{n+1}^2(\sigma)\right\} = q_1^2(\sigma)$ і покладемо всюди $\gamma_j^2 = q_1^2(\sigma) - -q_j^2(\sigma)$; $j = \overline{1, n+1}$. Задача Коші (31), (32) набуває вигляду

$$\frac{d\tilde{\tilde{u}}_{m,ik}}{dt} + \Delta^2(\lambda_s,\sigma)\tilde{\tilde{u}}_{m,ik} = \\ = \tilde{\tilde{G}}_{m,ik}(t,\lambda_s,\sigma) + a_{n+1}^2 R\sigma_{n+1}\left(\alpha_{22}^{n+1}\right)^{-1} V_{n+1}(R,\lambda_s)\tilde{g}_{m,ik}(t,\sigma), \tag{33}$$

$$\tilde{\tilde{u}}_{m,ik}(t,\lambda_s,\sigma)\Big|_{t=0} = \tilde{\tilde{g}}_{m,ik}(\lambda_s,\sigma), \tag{34}$$

де $\tilde{\tilde{u}}_{m,ik}(t,\lambda_s,\sigma) = \sum\limits_{j=1}^{n+1}\tilde{\tilde{u}}_{jm,ik}(t,\lambda_s,\sigma);$

$$\tilde{\tilde{G}}_{m,ik}(\lambda_s,\sigma) = \sum_{j=1}^{n+1}\tilde{\tilde{G}}_{jm,ik}(\lambda_s,\sigma); \quad \tilde{\tilde{g}}_{m,ik}(\lambda,\sigma) = \sum_{j=1}^{n+1}\tilde{\tilde{g}}^1_{jm,ik}(\lambda,\sigma);$$

$$\Delta^2(\lambda_s,\sigma) = \lambda_s^2 + a_{z1}^2\sigma^2 + \chi_1^2.$$

Безпосередньо перевіряється, що єдиним розв'язком задачі Коші (33), (34) є функція

$$\tilde{\tilde{u}}_{m,ik}(t,\lambda_s,\sigma) = N(t,\lambda_s,\sigma)\tilde{\tilde{g}}_{m,ik}(\lambda_s,\sigma) + \int\limits_0^t N(t-\tau,\lambda_s,\sigma)\times \\ \times\left[\tilde{\tilde{G}}_{m,ik}(\tau,\lambda_s,\sigma) + a_{n+1}^2 R\sigma_{n+1}\left(\alpha_{22}^{n+1}\right)^{-1} V_{n+1}(R,\lambda_s)\tilde{g}_{m,ik}(t,\sigma)\right]d\tau, \tag{35}$$

де розв'язуюча функція (функція Коші)

$$N(t,\lambda_s,\sigma) = \exp(-\Delta^2(\lambda_s,\sigma)t).$$

Оскільки суперпозиція операторів H_{sn} та H_{sn}^{-1} є одиничним оператором ($H_{sn} \circ H_{sn}^{-1} = H_{sn}^{-1} \circ H_{sn} = I$), то оператор H_{sn}^{-1}, як обернений до оператора (30), зобразимо у вигляді операторної матриці-стовпця

$$H_{sn}^{-1}[\cdots] = \begin{bmatrix} \sum\limits_{s=1}^{\infty} \cdots \dfrac{V_1(r,\lambda_s)}{\|V(r,\lambda_s)\|^2} \\ \sum\limits_{s=1}^{\infty} \cdots \dfrac{V_2(r,\lambda_s)}{\|V(r,\lambda_s)\|^2} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \sum\limits_{s=1}^{\infty} \cdots \dfrac{V_{n+1}(r,\lambda_s)}{\|V(r,\lambda_s)\|^2} \end{bmatrix} \tag{36}$$

і застосуємо за правилом множення матриць до матриці-елемента $\left[\tilde{\tilde{u}}_{m,ik}(t,\lambda_s,\sigma)\right]$, де функція $\tilde{\tilde{u}}_{m,ik}(t,\lambda_s,\sigma)$ визначена за формулою (35). Одержимо єдиний розв'язок одновимірної початково-крайової задачі спряження (21)-(24):

$$\begin{aligned} \tilde{u}_{jm,ik}(t,r,\sigma) &= \sum_{s=1}^{\infty} N(t,\lambda_s,\sigma)\tilde{\tilde{g}}_{m,ik}(\lambda_s,\sigma)\frac{V_j(r,\lambda_s)}{\|V(r,\lambda_s)\|^2} + \\ &+\sum_{s=1}^{\infty}\int_0^t N(t-\tau,\lambda_s,\sigma)\tilde{\tilde{G}}_{m,ik}(\tau,\lambda_s,\sigma)d\tau\frac{V_j(r,\lambda_s)}{\|V(r,\lambda_s)\|^2} + \\ &+a_{n+1}^2 R\sigma_{n+1}\left(\alpha_{22}^{n+1}\right)^{-1}\sum_{s=1}^{\infty}\int_0^t N(t-\tau,\lambda_s,\sigma)V_{n+1}(R,\lambda_s)\times \\ &\times\tilde{g}_{m,ik}(\tau,\sigma)\frac{V_j(r,\lambda_s)}{\|V(r,\lambda_s)\|^2};\ \ j=\overline{1,n+1}. \end{aligned} \tag{37}$$

Застосувавши послідовно до функцій $\tilde{u}_{jm,ik}(t,r,\sigma)$, визначених формулами (37), обернені оператори F^{-1} та $F_{m,ik}^{-1}$, і виконавши нескладні перетворення, одержуємо функції

$$\begin{aligned} u_{j,ik}(t,r,\varphi,z) &= \sum_{p=1}^{n+1}\int_0^t\int_{R_{p-1}}^{R_p}\int_0^{\varphi_0}\int_{-\infty}^{+\infty} E_{jp}^{ik}(t-\tau,r,\rho,\varphi,\alpha,z-\xi)f_p(\tau,\rho,\alpha,\xi)\times \\ &\times\sigma_p\rho\,d\xi\,d\alpha\,d\rho\,d\tau + \sum_{p=1}^{n+1}\int_{R_{p-1}}^{R_p}\int_0^{\varphi_0}\int_{-\infty}^{+\infty} E_{jp}^{ik}(t,r,\rho,\varphi,\alpha,z-\xi)g_p(\rho,\alpha,\xi)\times \\ &\times\sigma_p\rho\,d\xi\,d\alpha\,d\rho + \sum_{p=1}^{n+1}a_{\varphi p}^2\int_0^t\int_{R_{p-1}}^{R_p}\int_{-\infty}^{+\infty} Q_{jp}^{ik}(t,\tau,r,\rho,\varphi,z,\xi)\sigma_p\rho^{-1}d\xi\,d\rho\,d\tau + \\ &+\int_0^t\int_0^{\varphi_0}\int_{-\infty}^{+\infty} W_{jr,ik}(t-\tau,r,\varphi,\alpha,z-\xi)g(\tau,\alpha,\xi)d\xi\,d\alpha\,d\tau;\quad j=\overline{1,n+1}, \end{aligned} \tag{38}$$

які визначають єдині розв'язки параболічних початково-крайових задач спряження (1)–(4), (5), (9); (1)–(4), (6), (9); (1)–(4), (7), (9); (1)–(4), (8), (9) при відповідних значеннях ik (11, 12, 21, 22).

У формулах (38) застосовано компоненти

$$E_{jp}^{ik}(t,r,\rho,\varphi,\alpha,z)=\frac{2}{\pi\varphi_0}\sum_{m=0}^{\infty}\varepsilon_m^{ik}K_{jp}^{m,ik}(t,r,\rho,z)U_{m,ik}(\varphi)U_{m,ik}(\alpha)$$

матриці впливу (функції впливу), функції Гріна

$$Q_{jp}^{ik}(t,\tau,r,\rho,\varphi,z,\xi)=\frac{2}{\pi\varphi_0}\sum_{m=0}^{\infty}\varepsilon_m^{ik}K_{jp}^{m,ik}(t-\tau,r,\rho,z-\xi)\Phi_{m,ik}(\tau,\rho,\xi)U_{m,ik}(\varphi)$$

та компоненти

$$W_{jr,ik}(t,r,\varphi,\alpha,z)=a_{n+1}^2R\sigma_{n+1}\left(\alpha_{22}^{n+1}\right)^{-1}E_{j,n+1}^{ik}(t,r,R,\varphi,\alpha,z)$$

радіальної матриці Гріна (радіальні функції Гріна) відповідних початково-крайових задач спряження, де

$$K_{jp}^{m,ik}(t,r,\rho,z)=\sum_{s=1}^{\infty}\int_0^{+\infty}N(t,\lambda_s,\sigma)\cos(\sigma z)d\sigma\,\frac{V_j(r,\lambda_s)V_k(\rho,\lambda_s)}{\|V(r,\lambda_s)\|^2}.$$

Проаналізуємо формули (38) в залежності від типу крайових умов на гранях необмеженого кусково-однорідного клиновидного суцільного циліндра. Розглянемо, наприклад, випадок крайових умов (6). У цьому випадку функції Гріна

$$Q_{jp}^{12}(t,\tau,r,\rho,\varphi,z,\xi)=\frac{2}{\varphi_0^2}\sum_{m=1}^{\infty}K_{jp}^{m,12}(t-\tau,r,\rho,z-\xi)\times$$

$$\times\left[\frac{\pi(2m+1)}{2\varphi_0}g_{2p}(\tau,\rho,\xi)+(-1)^{m+1}w_{2p}(\tau,\rho,\xi)\right]\sin\frac{\pi(2m+1)\varphi}{2\varphi_0}.$$

Визначимо тангенціальні функції Гріна, породжені крайовими умовами (6), за формулами:

$$W_{jp,1}^{12}(t,\tau,r,\rho,\varphi,z,\xi)=\frac{1}{\varphi_0^2}\sum_{m=1}^{\infty}(2m+1)K_{jp}^{m,12}(t-\tau,r,\rho,z-\xi)\sin\frac{\pi(2m+1)\varphi}{2\varphi_0},$$

$$W_{jp,2}^{12}(t,\tau,r,\rho,\varphi,z,\xi)=\frac{2}{\pi\varphi_0}\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m+1}K_{jp}^{m,12}(t-\tau,r,\rho,z-\xi)\sin\frac{\pi(2m+1)\varphi}{2\varphi_0}.$$

Тоді розв'язок задачі спряження (1)–(4), (6), (9) можемо записати у вигляді

$$u_{j,12}(t,r,\varphi,z)=\sum_{p=1}^{n+1}\int_0^t\int_{R_{p-1}}^{R_p}\int_0^{\varphi_0}\int_{-\infty}^{+\infty}E_{jp}^{12}(t-\tau,r,\rho,\varphi,\alpha,z-\xi)f_p(\tau,\rho,\alpha,\xi)\times$$

$$\times\sigma_\rho\rho d\xi d\alpha d\rho d\tau+\sum_{p=1}^{n+1}\int_{R_{p-1}}^{R_p}\int_0^{\varphi_0}\int_{-\infty}^{+\infty}E_{jp}^{12}(t,r,\rho,\varphi,\alpha,z-\xi)g_p(\rho,\alpha,\xi)\times$$

$$\times\sigma_\rho \rho d\xi d\alpha d\rho + \sum_{p=1}^{n+1} a_{\varphi p}^2 \int_0^t \int_{R_{p-1}}^{R_p} \int_{-\infty}^{+\infty} [W_{jp,1}^{12}(t,\tau,r,\rho,\varphi,z,\xi) g_{2p}(\tau,\rho,\xi) +$$

$$+W_{jp,2}^{12}(t,\tau,r,\rho,\varphi,z,\xi) w_{2p}(\tau,\rho,\xi)] \sigma_p \rho^{-1} d\xi d\rho d\tau +$$

$$+\int_0^t \int_0^{\varphi_0} \int_{-\infty}^{+\infty} W_{jr,12}(t-\tau,r,\rho,\varphi,\alpha,z-\xi) g(\tau,\alpha,\xi) d\xi d\alpha d\tau; \quad j=\overline{1,n+1}.$$

З використанням властивостей функцій впливу $E_{jp}^{12}(t,r,\rho,\varphi,\alpha,z)$ і функцій Гріна $W_{jp,s}^{12}(t,\tau,r,\rho,\varphi,z,\xi)$, $(s=1,2)$, $W_{jr,12}(t,r,\rho,\varphi,\alpha,z)$ безпосередньо перевіряється, що функції $u_{j,12}(t,r,\varphi,z)$, визначені формулами (39), задовольняють рівняння (1), початкові умови (2), крайові умови (3), (4), (6) та умови спряження (9) в сенсі теорії узагальнених функцій [23].

Єдиність розв'язку (39) випливає із його структури (інтегрального зображення) та єдиності головних розв'язків (функцій впливу та функцій Гріна) параболічної початково-крайової задачі спряження (1)–(4), (6), (9).

Методами з [1, 23] можна довести, що при відповідних умовах на вихідні дані, формули (39) визначають обмежений класичний розв'язок розглянутої задачі (1)–(4), (6), (9).

Підсумком викладеного вище є така теорема.

Теорема. Якщо функції $f_j(t,r,\varphi,z)$, $g_j(r,\varphi,z)$, $g_{2j}(t,r,z)$, $w_{2j}(t,r,z)$, $(j=\overline{1,n+1})$ задовольняють умови:

1) неперервно диференційовні за змінною t і двічі неперервно диференційовані за геометричними змінними;
2) мають обмежену варіацію за геометричними змінними;
3) абсолютно сумовні за змінною z на $(-\infty;+\infty)$;
4) справджують умови спряження, а функція $g(t,\varphi,z)$ також задовольняє умови 1)-3), то параболічна початково-крайова задача спряження (1)-(4), (6), (9) має єдиний обмежений класичний розв'язок, який визначається за формулами (39).

Випадки крайових умов (5), (7) чи (8) на гранях клина $\varphi=0$, $\varphi=\varphi_0$ аналізуються аналогічно.

Зауваження. 1. У випадку $a_{rj}=a_{\varphi j}=a_{zj}\equiv a_j>0$ формули (38) визначають структури розв'язків розглянутих задач в ізотропному необмеженому кусково-однорідному клиновидному суцільному циліндрі.

2. Випадок зміни φ в межах $\varphi_1<\varphi<\varphi_2$ зводиться до розглянутого заміною $\varphi'=\varphi-\varphi_1$ $(\varphi_0\equiv\varphi_2-\varphi_1)$.

3. Параметри α_{22}^{n+1}, β_{22}^{n+1} дозволяють виділяти з формул (38) розв'язки початково-крайових задач спряження у випадках задання на радіальній поверхні $r = R$ крайові умови 1-го роду ($\alpha_{22}^{n+1} = 0$, $\beta_{22}^{n+1} = 1$), 2-го роду ($\alpha_{22}^{n+1} = 1$, $\beta_{22}^{n+1} = 0$), та 3-го роду ($\alpha_{22}^{n+1} = 1$, $\beta_{22}^{n+1} \equiv h > 0$).

4. Аналіз формул (38) в залежності від аналітичного виразу функцій $f_j(t, r, \varphi, z)$, $g_j(r, \varphi, z)$, $g_{kj}(t, r, z)$, $w_{kj}(t, r, z)$, $j = \overline{1, n+1}$, $k = \overline{1, 4}$, $g(t, \varphi, z)$ проводиться безпосередньо із загальних структур.

Висновки. Методом класичних інтегральних і гібридних інтегральних перетворень у поєднанні з методом головних розв'язків (функцій впливу та функцій Гріна) вперше побудовано єдині точні аналітичні розв'язки параболічних крайових задач у необмеженому кусково-однорідному клиновидному суцільному циліндрі. Одержані інтегральні зображення розв'язків носять алгоритмічний характер, неперервно залежать від параметрів і даних задачі й можуть бути використані як в подальших теоретичних дослідженнях, так і в практиці інженерних розрахунків математичних моделей еволюційних процесів у кусково-однорідних середовищах.

Список використаних джерел:

1. Гельфанд И. М. Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений / И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов. — М. : Физматгиз, 1958. — 274 с.
2. Городецький В. В. Граничні властивості гладких у шарі розв'язків рівнянь параболічного типу / В. В. Городецький. — Чернівці : Рута, 1998. — 225 с.
3. Громик А. П. Температурні поля в кусково-однорідних просторових середовищах / А. П. Громик, І. М. Конет, М. П. Ленюк. — Кам'янець-Подільський : Абетка-Світ, 2011. — 200 с.
4. Дейнека В. С. Модели и методы решения задач в неоднородных средах / В. С. Дейнека, И. В. Сергиенко. — К. : Наук. думка, 2001. — 606 с.
5. Дейнека В. С. Модели и методы решения задач с условиями сопряжения / В. С. Дейнека, И. В. Сергиенко, В. В. Скопецкий. — К. : Наук. думка, 1998. — 614 с.
6. Житарашу Н. В. Параболические граничные задачи / Н. В. Житарашу, С. Д. Эйдельман. — Кишинев : Штиинца, 1992. — 327 с.
7. Загорский Т. Я. Смешанные задачи для систем дифференциальных уравнений с частными производными параболического типа / Т. Я. Загорский. — Львов : Изд-во ЛГУ, 1961. — 115 с.
8. Ивасишин С. Д. Матрица Грина параболических задач / С. Д. Ивасишин. — Киев : Вища школа, 1990. — 199 с.
9. Конет І. М. Гіперболічні крайові задачі математичної фізики в кусково-однорідних просторових середовищах / І. М. Конет. — Кам'янець-Подільський : Абетка-Світ, 2013. — 120 с.

10. Конет І. М. Параболічні крайові задачі в кусково-однорідних середовищах / І. М. Конет, Т. М. Пилипюк. — Кам’янець-Подільський : Абетка-Світ, 2016. — 244 с.
11. Конет І. М. Стаціонарні та нестаціонарні температурні поля в циліндрично-кругових областях / І. М. Конет, М. П. Ленюк. — Чернівці : Прут, 2001. — 312 с.
12. Конет І. М. Параболічні крайові задачі в кусково-однорідних циліндрично-кругових середовищах / І. М. Конет, Т. М. Пилипюк. — Кам’янець-Подільський : Абетка-Світ, 2017. — 80 с.
13. Конет І. М. Параболічні крайові задачі в кусково-однорідному клиновидному циліндрично-круговому просторі з порожниною / І. М. Конет, Т. М. Пилипюк // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки : зб. наук. пр. — Кам'янець-Подільський : Кам’янець-Поділ. нац. ун-т ім. І. Огієнка, 2018. — Вип. 18. — С. 86–99.
14. Ладыженская О. А. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа / О. А. Ладыженская, В. А. Солонников, Н. Н. Уральцева. — М. : Наука, 1967. — 736 с.
15. Ландис Е. М. Уравнения второго порядка эллиптического и параболического типов / Е. М. Ландис. — М. : Наука, 1971. — 288 с.
16. Матійчук М. І. Параболічні та еліптичні крайові задачі з особливостями / М. І. Матійчук. — Чернівці : Прут, 2003. — 248 с.
17. Перестюк М. О. Теорія рівнянь математичної фізики / М. О. Перестюк, В. В. Маринець. — Київ : Либідь, 2006. — 424 с.
18. Пукальський І. Д. Крайові задачі для нерівномірно параболічних та еліптичних рівнянь з виродженостями і особливостями / І. Д. Пукальський. — Чернівці : Рута, 2008. — 253 с.
19. Сергиенко И. В. Математическое моделирование и исследование процессов в неоднородных средах / И. В. Сергиенко, В. В. Скопецкий, В. С. Дейнека. — Киев : Наук. думка, 1991. — 432 с.
20. Снеддон И. Преобразования Фурье / И. Снеддон. — М. : ИЛ, 1955. — 668 с.
21. Трантер К. Дж. Интегральные преобразования в математической физике / К. Дж. Трантер. — М. : Гостехтеориздат, 1956. — 204 с.
22. Фридман А. Уравнения с частными производными параболического типа / А. Фридман. — М. : Мир, 1968. — 428 с.
23. Шилов Г. Е. Математический анализ. Второй специальный курс / Г. Е. Шилов. — М. : Наука, 1965. — 328 с.
24. Эйдельман С. Д. Параболические системы / С. Д. Эйдельман. — М. : Наука, 1964. — 444 с.

ARABOLIC BOUNDARY VALUE PROBLEMS IN UNBOUNDED PIECEWISE-HOMOGENEOUS WEDGE-SHAPED SOLID CYLINDER

The unique exact analytical solutions of parabolic boundary value problems of mathematical physics in unbounded by variable z piecewise-homogeneous by radially variable r wedge-shaped by an angularly variable φ continuous cylinder were constructed at first time by the method of classical integral and hybrid integral transforms in combination with the method of main solutions (matrices of influence and Green matrices) in the proposed article.

The cases of assigning on the verge of the wedge the boundary conditions of Dirichlet and Neumann and their possible combinations (Dirichlet–Neumann, Neumann–Dirichlet) are considered.

Finite integral Fourier transform by an angular variable, a Fourier integral transform on a Cartesian axis by an applicative variable and a hybrid integral transform of the Hankel type of the first kind on a segment of the polar axis with *n* points of conjugation were used to construct solutions of investigated boundary value problems.

The consistent application of integral transforms by geometric variables allows us to reduce the three-dimensional initial boundary-value problems of conjugation to the Cauchy problem for a regular linear inhomogeneous 1st order differential equation whose unique solution is written in a closed form.

The application of inverse integral transforms restores explicitly the solution of the considered problems through their integral image.

Key words: *parabolic equation, initial and boundary conditions, conjugation conditions, integral transforms, hybrid integral transforms, main solutions.*

Отримано: 15.08.2019

УДК 539.3
DOI: 10.32626/2308-5878.2019-20.??-??

Р. С. Мусій, д-р. фіз.-мат. наук, професор,
А. Й. Наконечний, д-р. техн. наук, професор,
В. К. Шиндер, канд. фіз.-мат. наук,
І. В. Андрусяк, канд. фіз.-мат. наук,
О. Я. Бродяк, канд. фіз.-мат. наук

Національний університет «Львівська політехніка», м. Львів

МЕТОДИКА ПОБУДОВИ РОЗВ'ЯЗКУ ДВОВИМІРНОЇ ЗАДАЧІ ЕЛЕКТРОДИНАМІКИ ДЛЯ ЕЛЕКТРОПРОВІДНОГО ТІЛА З ПЛОСКОПАРАЛЕЛЬНИМИ МЕЖАМИ ЗА ДІЇ ЗОВНІШНЬОГО НЕСТАЦІОНАРНОГО ЕЛЕКТРОМАГНІТНОГО ПОЛЯ

Сформульовано двовимірну початково-крайову задачу електродинаміки для електропровідного неферомагнітного тіла з плоскопаралельними межами за дії зовнішнього нестаціонарного електромагнітного поля. Електромагнітне поле задане значеннями неоднорідної за поздовжньою координатою дотичної до основ тіла компоненти вектора напруженості магнітного поля на його основах. Для побудови загального розв'язку сформульованої початково-крайової задачі за такої електромагнітної дії для ключової функції — заданої компоненти вектора напруженості магнітного поля використано кубічну апроксимацію за товщинною координатою та інтегральне перетворення Фур'є за поздовжньою координатою. У результаті вихідна двовимірна початково-крайова задача на ключову функцію зведена до од-

