Finite integral Fourier transform by an angular variable, a Fourier integral transform on a Cartesian axis by an applicative variable and a hybrid integral transform of the Hankel type of the first kind on a segment of the polar axis with *n* points of conjugation were used to construct solutions of investigated boundary value problems.

The consistent application of integral transforms by geometric variables allows us to reduce the three-dimensional initial boundary-value problems of conjugation to the Cauchy problem for a regular linear inhomogeneous 1st order differential equation whose unique solution is written in a closed form.

The application of inverse integral transforms restores explicitly the solution of the considered problems through their integral image.

Key words: *parabolic equation, initial and boundary conditions, conjugation conditions, integral transforms, hybrid integral transforms, main solutions.*

Отримано: 15.08.2019

УДК 539.3
DOI: 10.32626/2308-5878.2019-20.??-??

Р. С. Мусій, д-р. фіз.-мат. наук, професор,
А. Й. Наконечний, д-р. техн. наук, професор,
В. К. Шиндер, канд. фіз.-мат. наук,
І. В. Андрусяк, канд. фіз.-мат. наук,
О. Я. Бродяк, канд. фіз.-мат. наук

Національний університет «Львівська політехніка», м. Львів

МЕТОДИКА ПОБУДОВИ РОЗВ'ЯЗКУ ДВОВИМІРНОЇ ЗАДАЧІ ЕЛЕКТРОДИНАМІКИ ДЛЯ ЕЛЕКТРОПРОВІДНОГО ТІЛА З ПЛОСКОПАРАЛЕЛЬНИМИ МЕЖАМИ ЗА ДІЇ ЗОВНІШНЬОГО НЕСТАЦІОНАРНОГО ЕЛЕКТРОМАГНІТНОГО ПОЛЯ

Сформульовано двовимірну початково-крайову задачу електродинаміки для електропровідного неферомагнітного тіла з плоскопаралельними межами за дії зовнішнього нестаціонарного електромагнітного поля. Електромагнітне поле задане значеннями неоднорідної за поздовжньою координатою дотичної до основ тіла компоненти вектора напруженості магнітного поля на його основах. Для побудови загального розв'язку сформульованої початково-крайової задачі за такої електромагнітної дії для ключової функції — заданої компоненти вектора напруженості магнітного поля використано кубічну апроксимацію за товщинною координатою та інтегральне перетворення Фур'є за поздовжньою координатою. У результаті вихідна двовимірна початково-крайова задача на ключову функцію зведена до одновимірної початково-крайової задачі за часовою змінною та поздовжньою координатою на інтегральні за товщинною координатою характеристики ключової функції. Коефіцієнти полінома, що апроксимує ключову функцію подано через вказані інтегральні характеристики ключової функції та задані її значення на основах тіла як відповідні функції часу і поздовжньої координати. З метою підвищення точності наближеного розв'язку розглядуваної задачі запропоновано також незалежну апроксимацію відповідних компонент вектора напруженості електричного поля за товщинною координатою за використання заданих крайових умов на ключову функцію. Записано системи рівнянь для визначення інтегральних характеристик цих компонент. Загальні розв'язки розглядуваної задачі на такі характеристики знайдено у вигляді згорток функцій, що описують задані граничні значення ключової функції на основах тіла та однорідні розв'язки задачі на інтегральні характеристики. Отримано розв'язок вихідної задачі електродинаміки, як за дії довільно змінного в часі і за поздовжньою координатою нестаціонарного, так і усталеного електромагнітного поля.

Ключові слова: *електропровідне тіло, плоскопаралельні межі, нестаціонарне і усталене електромагнітне поле, дотичні компоненти векторів напруженостей магнітного та електричного полів, кубічна апроксимація, інтегральні характеристики, трансформанти Фур'є.*

Вступ. Електропровідні тіла постійної товщини різної геометричної конфігурації в плані є конструктивними елементами багатьох приладів, в процесі функціонування яких вони зазнають впливу зовнішніх нестаціонарних електромагнітних полів (ЕМП) [1, с. 57–83]. Ці ЕМП внаслідок явища електромагнітної індукції створюють у таких тілах нестаціонарне ЕМП. Такі індуковані ЕМП необхідно враховувати як додаткові чинники при проектуванні і розрахунку надійності електричних машин і апаратів. Для їх розрахунку необхідно формулювати двовимірні за просторовими координатами нестаціонарні задачі електродинаміки. У літературі добре описано методи визначення індукованого у електропровідному тілі зовнішньою електромагнітною дією усталеного ЕМП. Однак, відомі методи розв'язування двовимірних нестаціонарних задач електродинаміки [1, с. 57–83], що використовують інтегральні перетворення Лапласа за часом та метод Фур'є розкладу за власними функціями за просторовими змінними дають розв'язки таких задач у вигляді двохкратних функціональних рядів за відповідними власними функціями. Ці ряди, крім того, що є громіздкими виразами, які сумуються за власними числами — коренями складних трансцендентних рівнянь, є ще погано збіжними, особливо за малих часів нестаціонарної електромагнітної дії [2, с. 91–106]. Враховуючи, що сумування таких рядів недостатньо вивчено, у даній статті запропоновано методику побудови наближеного розв’язку двовимірної не стаціонарної задачі електродинаміки для електропровідного неферомагнітного тіла з плоскопаралельними межами за дії зовнішнього ЕМП.

Ця методика використовує апроксимацію розподілу за товщинною координатою дотичної до основ електропровідного шару з плоскопаралельними межами компоненти вектора напруженості магнітного поля кубічним поліномом. На її основі знайдено загальний розв’язок двовимірної початково-крайової задачі електродинаміки, сформульованої для розглядуваного тіла стосовно цієї компоненти, за однорідної нестаціонарної електромагнітної дії.

Математична постановка задачі. Розглянемо електропровідне неферомагнітне тіло з плоскопаралельними межами товщиною $2h$, віднесене до декартової системи координат $Ox_1x_2x_3$, площина x_1Ox_2 якої співпадає з його серединною поверхнею (рис. 1).

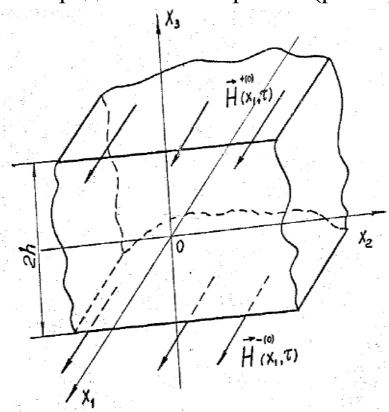

Рис. 1.

На обох основах тіла $z = \pm h$ задано значення компонент вектора напруженості зовнішнього магнітного поля $\vec{H}^{(0)}$

$$H_k^{(0)}(x_l, \pm h, \tau) = H_k^{\pm(0)}(x_l, \tau). \tag{1}$$

Тут — $H_k^{\pm(0)}(x_l, \tau)$ — задані функції часу і координат $x_l\left(l = x, y\right)$. Індекси «+» і «-» відносяться відповідно до поверхонь $z = \pm h$; x_1, x_2, x_3 — декартові координати, віднесені до півтовщини тіла h, $\tau = \dfrac{t}{\sigma\mu h^2}$ — безрозмірний характерний для електродинамічних процесів у розглядуваному тілі час, t — час, σ — коефіцієнт електропровідності, μ — магнітна проникність матеріалу тіла.

Визначення компонент $H_1(x_2, x_3, \tau)$ і $H_2(x_1, x_3, \tau)$ вектора напруженості магнітного поля в області тіла

$$\vec{H}(x_1, x_2, x_3, \tau) = \left\{H_1(x_2, x_3, \tau); H_2(x_1, x_3, \tau); 0\right\}$$

на основі співвідношень Максвела зводиться до розв'язування рівняння

$$\Delta_l H_k - \frac{\partial H_k}{\partial \tau} = 0 \tag{2}$$

при заданих крайових (1) і нульовій початковій умові

$$H_l(x_l, x_3, 0)\ \left(l = 1, 2\right). \tag{3}$$

Тут для компактності форми запису вихідних рівнянь введений оператор

$$\Delta_l = \frac{\partial^2}{\partial x_l^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2},\ \left(l = 1, 2\right),$$

аналог оператора Лапласа.

Методика розв'язування двовимірної нестаціонарної задачі електродинаміки. Побудуємо методику розв'язування сформульованої вище задачі (1)–(3). Ця методика використовує апроксимацію поліноміальним законом розподілу за товщинною координатою x_3 компонент $H_k(x_l, x_3, \tau)\ \left(l = 1, 2\right)$ вектора напруженості магнітного поля.

Розв'язок рівняння (2) для кожної зі складових $H_k(x_l, x_3, \tau)$ $\left(l = 1, 2\right)$ вектора $\vec{H}$ подамо у вигляді

$$H_k\left(x_l, x_3, \tau\right) = \sum_{i=1}^{m} a_{k(j-1)}\left(x_l, \tau\right) x_3^{j-1}. \tag{4}$$

Згідно методу запропонованого в роботі [3, с. 63–69], коефіцієнти $a_{k(j-1)}\left(x_l, \tau\right)$ апроксимаційних поліномів (4) подаємо через інтегральні характеристики складових $H_k(x_l, x_3, \tau)\ \left(l = 1, 2\right)$ вектора $\vec{H}$

$$H_{ks}\left(x_l, \tau\right) = \frac{2s-1}{2}\int_{-1}^{1} H_k\left(x_l, x_3, \tau\right) x_3^{s-1} dx_3 \tag{5}$$

і задані граничні значення $H_k^{\pm(0)}\left(x_l, \tau\right)$ цих складових на основах $\alpha_{p_3}^* = -\frac{5}{12}E_{p_2} - \frac{5}{24}(f^+ + f^-);$ тіла. Рівняння для визначення інтегральних характеристик H_{ks} одержимо, помноживши рівняння (2) на x_3^{s-1} та інтегруючи по x_3 згідно (5) з урахуванням співвідношення (4).

Приведемо систему вихідних рівнянь електродинаміки для інтегральних характеристик при наближенні функцій $H_k(x_l, x_3, \tau)\ \left(l = 1, 2\right)$

кубічним законом за координатою x_3. Тоді для визначення інтегральних характеристик E_{p_1}, отримуємо рівняння

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x_l^2}+\frac{\partial^2}{\partial \tau}\right)H_{k_1}\left(x_l,\tau\right)-3H_{k_1}\left(x_l,\tau\right)=-\frac{3}{2}\left[H_k^{+(0)}\left(x_l,\tau\right)+H_k^{-(0)}\left(x_l,\tau\right)\right] \quad (6)$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x_l^2}+\frac{\partial^2}{\partial \tau}\right)H_{k_2}\left(x_l,\tau\right)-15H_{k_2}\left(x_l,\tau\right)=-\frac{15}{2}\left[H_k^{+(0)}\left(x_l,\tau\right)+H_k^{-(0)}\left(x_l,\tau\right)\right]$$

а початкові умови запишуться виразами:

$$H_{k_1}\left(x_l,0\right)=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}H_k\left(x_l,x_3,0\right)dx_3,$$

$$H_{k_2}\left(x_l,0\right)=\frac{3}{2}\int_{-1}^{1}H_k\left(x_l,x_3,0\right)x_3dx_3, \quad (7)$$

Коефіцієнти апроксимаційного полінома (4) описуються формулами

$$\alpha_{k_0}=\frac{3}{2}H_{k_1}-\frac{1}{4}q_1;\ \ \alpha_{k_1}=\frac{5}{2}H_{k_2}-\frac{3}{4}q_2;$$

$$\alpha_{k_2}=\frac{3}{4}q_1-\frac{3}{2}H_{k_1};\ \ \alpha_{k_3}=\frac{5}{4}q_2-\frac{5}{2}H_{k_2}; \quad (8)$$

$$q_1=H_k^{+(0)}+H_k^{-(0)};\ \ q_2=H_k^{+(0)}-H_k^{-(0)}.$$

Оскільки складові $E_p(p=\overline{1,3})$ вектора $\vec{E}$ визначаються за допомогою диференціювання функцій H_k, то ступінь точності апроксимації складових E_p при фіксованій кількості членів полінома (4) знижується. Для досягнення такої ж точності функцій E_p як функцій H_k, необхідно збільшувати кількість членів апроксимаційного полінома (4), що ускладнює систему рівнянь (6) і підвищує її порядок. Тому вважається більш доцільним, так як функції E_p в силу властивостей рівнянь Максвелла також визначаються з рівняння вигляду (2), апроксимувати компоненти E_p вектора $\vec{E}$ поліномами вигляду (4), використовуючи при цьому граничні умови на функції E_p, які подаються через задані функції $H_k^{\pm(0)}\left(x_l,\tau\right)$ і мають вигляд

$$\left.\frac{\partial E_1}{\partial x_3}\right|_{x_3=\pm1}=\frac{1}{\sigma_0 h}\left(\frac{\partial^2 H_2^{\pm(0)}}{\partial x_1^2}-\frac{\partial H_2^{\pm(0)}}{\partial \tau}\right),$$

$$\left.\frac{\partial E_2}{\partial x_3}\right|_{x_3=\pm1} = \frac{1}{\sigma_0 h}\left(\frac{\partial H_1^{\pm(0)}}{\partial \tau} - \frac{\partial^2 H_2^{\pm(0)}}{\partial x_2^2}\right), \tag{9}$$

$$\left.E_3\right|_{x_3=\pm1} = \frac{1}{\sigma_0 h}\left(\frac{\partial H_2^{\pm(0)}}{\partial x_1} - \frac{\partial H_1^{\pm(0)}}{\partial x_2}\right),$$

Умови (9) отримані за допомогою співвідношень електродинаміки із граничних умов на функції H_k. При цьому коефіцієнти $a^*_{p(j-1)}(x_l,\tau)$ апроксимаційних поліномів для функцій E_p подаються через граничні умови (9) і відповідні до (5) інтегральні характеристики цих функцій, для яких при обмеженні кубічним законом зміни компонент E_p вектора $\vec{E}$ по координаті x_3 при $p=1,2$ отримуємо рівняння

$$f^{\pm} = \left.\frac{\partial E_p}{\partial x_3}\right|_{x_3=\pm1}. \tag{10}$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x_l} - \frac{\partial}{\partial \tau}\right)E_{p_2}(x_l,\tau) - \frac{5}{2}E_{p_2}(x_l,\tau) = \frac{5}{4}\left[f^{+}(x_l,\tau) + f^{-}(x_l,\tau)\right], \tag{11}$$

а для компоненти E_3 рівняння вигляду (6), де функції $H_k^{\pm(0)}$ необхідно замінити значеннями $\left.E_3\right|_{x_{3=\pm1}}$.

Коефіцієнти $\alpha^*_{p(j-1)}(x_l,\tau)$ апроксимаційного полінома для складових E_p $(p=1,2)$ вектора $\vec{E}$ описуються виразами

$$\alpha^*_{p_0} = E_{p_1} + \frac{1}{4}(f^{+} - f^{-});\quad \alpha^*_{p_1} = \frac{5}{4}E_{p_2} + \frac{1}{8}(f^{+} + f^{-});$$

$$\alpha^*_{p_2} = \frac{1}{4}(f^{+} - f^{-});\quad \alpha^*_{p_3} = -\frac{5}{12}E_{p_2} - \frac{5}{24}(f^{+} + f^{-}); \tag{12}$$

де $f^{\pm} = \left.\frac{\partial E_p}{\partial x_3}\right|_{x_3=\pm1}$.

Початкові умови на функції E_{p_1} й E_{p_2} будуть рівними

$$E_{p_1}(x_l,0) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} E_p(x_l,x_3,0)dx_3;$$

$$E_{p_2}(x_l,0) = \frac{3}{2}\int_{-1}^{1} E_p(x_l,x_3,0)x_3 dx_3. \tag{13}$$

В окремому випадку для усталеного (гармонійного в часі) зовнішнього електромагнітного поля граничні значення компонент вектора $\vec{H}$ задаються виразами

$$H_{k*}^{\pm(0)}(x_l,\tau) = H_{k*}^{\pm(0)}(x_l)\exp(i\frac{\tau}{2\delta_0^2}), \tag{14}$$

де $\delta_0 = (2\omega\sigma_0\mu h^2)^{-\frac{1}{2}}$ — параметр, що характеризує відносну до півтовщини розглядуваного тіла глибину проникання індукційних струмів. Тоді система вихідних рівнянь електродинаміки для визначення інтегральних характеристик $H_{ks*}(s=1,2)$ при наближенні функцій H_{k*} за координатою x_3 кубічним законом на підставі рівнянь (6) буде

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x_l^2} - \frac{i}{2\delta_0^2}\right)H_{k_1*}(x_l) - 3H_{k_1*}(x_l) = -\frac{3}{2}\left[H_{k*}^{+(0)}(x_l) + H_{k*}^{-(0)}(x_l)\right] \tag{15}$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x_l^2} - \frac{i}{2\delta_0^2}\right)H_{k_2*}(x_l) - 15H_{k_2*}(x_l) = -\frac{15}{2}\left[H_{k*}^{+(0)}(x_l) - H_{k*}^{-(0)}(x_l)\right], \tag{16}$$

де $H_{k*}^{\pm(0)}(x_l)$ — амплітудні значення функції $H_{k*}^{\pm(0)}(x_l,\tau)$.

Інтегральні характеристики складових E_{p1*}, E_{p2*} $(p=1,2)$ вектора $\vec{E}$ згідно зі співвідношеннями (10)–(11) задовольняють рівнянням

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x_l^2} - \frac{i}{2\delta_0^2}\right)E_{p_1*}(x_l) = \frac{1}{2}\left[f_*^+(x_l) - f_*^-(x_l)\right], \tag{17}$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x_l^2} - \frac{i}{2\delta_0^2}\right)E_{p_2*}(x_l) - \frac{5}{2}E_{p_2*}(x_l) = \frac{5}{4}\left[f_*^+(x_l) + f_*^-(x_l)\right]. \tag{18}$$

Тут функції $f_*^{\pm} = \frac{\partial E_{p*}}{\partial x_3}\Big|_{x_3=\pm1}$ подаються виразами (9), а інтегральні характеристики E_{31*}, E_{32*} знаходимо з рівнянь (15)–(16), замінюючи в них функції H_{k_1*}, H_{k_2*} на функції E_{31*}, E_{31*}, а функції $H_{k*}^{\pm(0)}$ на $E_{3*}\Big|_{x_3=\pm1}$ знаходимо з виразів (9).

Коефіцієнти $a_{k*(j-1)}(x_l)$ полінома, що апроксимує функції $H_{k*}(x_l,x_3)$ визначаються зі співвідношень (8), у яких необхідно замінити інтегральні характеристики H_{k_1}, H_{k_2} на характеристики H_{k_1*}, H_{k_2*}, а граничні значення $H_k^{\pm(0)}$ відповідно на значення $H_{k*}^{\pm(0)}$.

Коефіцієнти $a_{k*(j-1)}(x_l)$ полінома, що апроксимує функції $E_{p\,*}(x_l, x_3)$ для $p = 1, 2$, визначаються зі співвідношень (12), у яких характеристики E_{p1}, E_{p2} замінюються характеристиками E_{p1*}, E_{p2*}, а граничні значення $\left.\frac{\partial E_1}{\partial x_3}\right|_{x_3=\pm 1}$ й $\left.\frac{\partial E_2}{\partial x_3}\right|_{x_3=\pm 1}$ замінюються на граничні значення $\left.\frac{\partial E_1 *}{\partial x_3}\right|_{x_3=\pm 1}$ й $\left.\frac{\partial E_2 *}{\partial x_3}\right|_{x_3=\pm 1}$.

Коефіцієнти полінома для функції E_{3*} подаються співвідношеннями (8), у яких необхідно замінити функції H_{k1}, H_{k2} на функції E_{31*}, E_{32*} а функції $H_k^{\pm(0)}$ на функції $E_{3*}^{\pm(0)} E_{3*}\Big|_{x_3=\pm 1}$. Таким чином, розв'язування задачі по визначенню нестаціонарного електромагнітного поля в тілі із плоскопаралельними межами, тобто знаходження складових H_k і E_p векторів напруженостей магнітного і електричного полів, зводиться до розв'язування задач меншої розмірності за координатами для інтегральних характеристик H_{ks} і $E_p s$ $(s = 1, 2)$.

Функції H_{ks} й E_{ps} визначаються з отриманих систем рівнянь (5)–(6) і (10)–(11) при початкових умовах (7), (13) і відповідних умовах (по координатах x_1 і x_2) на граничних перетинах, що відповідають заданому розподілу на цих перетинах векторів напруженостей магнітного й електричного полів.

Відзначимо, що при використанні апроксимаційного полінома вище третього степеня, системи рівнянь для визначення інтегральних характеристик H_{ks} і E_{ps} стають сингулярно збуреними внаслідок великих числових значень коефіцієнтів. Це приводить до необхідності використання для їхнього розв'язування методів теорії сингулярно збурених рівнянь, що ускладнює методику одержання самого розв’язку.

Запропонована методика застосовна також і у тривимірному випадку. При цьому мають місце вище наведені співвідношення, а у вихідних рівняннях (6) і (10)–(11) необхідно оператор $\frac{\partial^2}{\partial x_l^2}$ замінити двовимірним оператором Лапласа $\Delta_1 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$.

Загальний розв’язок задачі. Для знаходження інтегральних характеристик H_{ks} $(s = 1.2)$ компоненти H_k вектора напруженості магнітного поля, що описуються системою рівнянь (6), використаємо перетворення Фур’є [4, с. 47–49] за координатою x_1. Тоді Фур’є-трансформанти функцій $H_{ks}\left(x_1,\tau\right)$ $(s=1.2)$ будуть

$$\tilde{H}_{ks}(\xi,\tau)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} H_{ks}(x_1,\tau)e^{i\xi x_1}dx_1.$$

Тут і подальшому символ «~» означає Фур’є-трансформанти функції, ξ — параметр перетворення Фур’є. Тоді, виконавши безпосереднє інтегрування по часу, з рівнянь (6) з врахуванням початкових умов (7) маємо

$$\tilde{H}_{k1}(\xi,\tau)=e^{-(\xi^2+3)\tau}\left[\tilde{\varPhi}_{k1}(\xi,\tau)-\tilde{\varPhi}_{k1}(\xi,0)+\tilde{H}_{k1}(\xi,0)\right],\tag{19}$$

$$\tilde{H}_{k2}(\xi,\tau)=e^{-(\xi^2+15)\tau}\left[\tilde{\varPhi}_{k2}(\xi,\tau)-\tilde{\varPhi}_{k2}(\xi,0)+\tilde{H}_{k2}(\xi,0)\right].\tag{20}$$

Тут

$$\tilde{\varPhi}_{k1}(\xi,\tau)=\frac{3}{2}\int e^{(\xi^2+3)\tau}\left[\tilde{H}_k^{(0)+}(\xi,\tau)+\tilde{H}_k^{(0)-}(\xi,\tau)\right]d\tau,\tag{21}$$

$$\tilde{\varPhi}_{k2}(\xi,\tau)=\frac{15}{2}\int e^{(\xi^2+15)\tau}\left[\tilde{H}_k^{(0)+}(\xi,\tau)-\tilde{H}_k^{(0)-}(\xi,\tau)\right]d\tau.\tag{22}$$

Перейшовши до оригіналів у виразах (19)–(20) отримуємо вирази функцій $H_{ks}\left(x_1,\tau\right)$ $(s=1.2)$ у вигляді згорток

$$H_{k1}(x_1,\tau)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\xi^2+3)\tau}\left[\tilde{\varPhi}_{k1}(\xi,\tau)-\tilde{\varPhi}_{k1}(\xi,0)+\tilde{H}_{k1}(\xi,0)\right]e^{-i\xi x_1}d\xi,\tag{23}$$

$$H_{k2}(x_1,\tau)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\xi^2+15)\tau}\left[\tilde{\varPhi}_{k2}(\xi,\tau)-\tilde{\varPhi}_{k2}(\xi,0)+\tilde{H}_{k2}(\xi,0)\right]e^{-i\xi x_1}d\xi.$$

У випадку усталеного електромагнітного поля, яке задається граничними умовами (14), аналогічним шляхом з рівнянь (15)–(16) знаходимо для інтегральних характеристик $H_{ks*}\left(s=1,2\right)$ вирази

$$H_{k1*}(x_1)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{3}{2}\frac{\tilde{H}_{k*}^{(0)+}(\xi)+\tilde{H}_{k*}^{(0)-}(\xi)}{\xi^2+3+\dfrac{i}{2\delta_0^2}}e^{-i\xi x_1}d\xi,\tag{24}$$

$$H_{k2*}(x_1)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{15}{2}\frac{\tilde{H}_{k*}^{(0)+}(\xi)-\tilde{H}_{k*}^{(0)-}(\xi)}{\xi^2+15+\dfrac{i}{2\delta_0^2}}e^{-i\xi x_1}d\xi.\tag{25}$$

При знайдених інтегральних характеристиках H_{ks} складова $H_k(x_1,x_3,\tau)$ вектора напруженості магнітного поля описується так

$$H_k(x_1, x_3, \tau) =$$
$$= \frac{3}{2} H_{k1}(1 - x_3^2) + \frac{5}{2} H_{k2}(x_3 - x_3^3) + \frac{1}{4} q_1(1 - 3x_3^2) - \frac{1}{4} q_2(3x_3 - 5x_3^3), \qquad (26)$$

де

$$q_1 = H_k^{+(0)} + H_k^{-(0)}, \; q_2 = H_k^{+(0)} - H_k^{-(0)}.$$

Тоді складові E_p $(p = \overline{1,3})$ вектора напруженості електричного поля визначаються через співвідношення $\vec{E} = \frac{1}{\sigma_0 h} \mathrm{rot} \vec{H}$. Таким чином, ми отримали загальний розв'язок розглядуваної задачі.

Висновки. Запропонована методика розв'язування двовимірної задачі електродинаміки для електропровідного тіла з плоскопаралельними межами за дії зовнішнього нестаціонарного електромагнітного поля використовує апроксимацію розподілу за товщинною координатою кубічним поліномом визначальної функції — дотичної до основ шару компоненти вектора напруженості магнітного поля, яка на основах тіла є неоднорідною за поздовжньою координатою. Такий підхід дає змогу зменшити розмірність вихідної двовимірної задачі до одновимірної на інтегральні характеристики визначальної функції. Вирази цих інтегральних характеристик можна записати у вигляді згорток функцій, що описують задані неоднорідні значення визначальної функції та однорідні розв'язки отриманих задач на інтегральні характеристики. З метою підвищення точності апроксимації запропоновано незалежну апроксимацію компонент вектора напруженості електричного поля за використання заданих крайових умов на дотичну до основ шару компоненту вектора напруженості магнітного поля. Дана методика дозволяє суттєво спростити загальний розв'язок розглядуваної двовимірної початково–крайової задачі і отримання конкретних розв'язків за дії характерних типів зовнішніх нестаціонарних електромагнітних полів, що використовуються для функціонування багатьох електротехнічних приладів та пристроїв.

Список використаних джерел:

1. Батыгин Ю. В. Импульсные магнитные поля для прогрессивных технологий / Ю. В. Батыгин, В. И. Лавинский, Л. Т. Хименко. — Харьков : МОСТ, 2003. — 288 с.
2. Подстригач Я. С. Термоупругость электропроводных тел / Я. С. Подстригач, Я. И. Бурак, А. Р. Гачкевич, Л. В. Чернявская. — К. : Наук. думка, 1977. — 248 с.
3. Мусій Р. С. Динамічні задачі термомеханіки електропровідних тіл канонічної форми : монографія / Р. С. Мусій. — Львів : Вид-во «Растр–7», 2010. — 216 с.

4. Галицын А. С. Интегральные преобразования и специальные функции в задачах теплопроводности / А. С. Галицын, А. Н. Жуковский. — Киев : Наукова думка, 1976. — 283с.

A METHODOLOGY FOR CONSTRUCTING A SOLUTION OF A TWO-DIMENSIONAL PROBLEM OF ELECTRODYNAMICS FOR AN ELECTROCONDUCTIVE BODY WITH PLANE — PARALLEL BOUNDARIES UNDER THE ACTION OF AN EXTERNAL NON-STATIONARY ELECTROMAGNETIC FIELD

A two-dimensional initial-boundary value problem of electrodynamics for an electroconductive non-ferromagnetic body with planar-parallel boundaries is formulated under the action of an external non-stationary electromagnetic field. The electromagnetic field is given by the values of the inhomogeneous longitudinal coordinate of the component of the magnetic field intensity vector at its bases. To construct a general solution of the formulated initial boundary value problem under such electromagnetic action, a cubic approximation by thickness coordinate and an integral Fourier transform along a longitudinal coordinate was used for a key function — a given component of the magnetic field intensity vector. As a result, the initial two-dimensional initial boundary value problem for the key function is reduced to the one-dimensional initial boundary value problem. This initial boundary value problem is on the integral key function. These characteristics are the functions of time variable and the thickness coordinate. The coefficients of the polynomial approximating the key function are given by the transformants of the integral characteristics of the key function and given its values on the bases of the body as corresponding functions of time and longitudinal coordinate. The general solutions of the one-dimensional initial boundary value problem are obtained as a convolution of functions. These functions describe homogeneous solutions and key function boundary values on the bases of the body. Using the inverse Fourier transforms, the solution of the original electrodynamics problem under the action of an arbitrary variable in time and by the longitudinal coordinate of a non-stationary electromagnetic field is written. On the basis of such a common solution, as a partial case, we also write the solutions of the original two-dimensional initial boundary value problem under the action of a stationary harmonic in time variable electromagnetic field. In order to improve the accuracy of the approximate solution of the problem under consideration, an independent approximation of the corresponding component of the electric field intensity vector along the thickness coordinate is proposed. Systems of equations are formulated to determine the integral characteristics of this component, both under the action of an arbitrary variable in time and for a longitudinal coordinate non-stationary and the stationary electromagnetic field.

Key words: *electroconductive body, plane-parallel boundaries, non-stationary and stationary electromagnetic field, tangent components of the intensity vectors of magnetic and electric fields, cubic approximation, integral characteristics, Fourier transform.*

Отримано: 14.08.2019