УДК 517.5
DOI: 10.32626/2308-5878.2019-20.61-69

Т. О. Петрова, канд. фіз.-мат. наук,
І. Л. Петрова
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, м. Київ

УЗАГАЛЬНЕННЯ ПОТОЧКОВИХ ІНТЕРПОЛЯЦІЙНИХ ОЦІНОК ОПУКЛОГО НАБЛИЖЕННЯ ФУНКЦІЙ, ЩО МАЮТЬ ДРОБОВУ ПОХІДНУ

Ми розглядаємо питання інтерполяційного наближення функцій з класу Соболєва алгебраїчними поліномами. Питання позитивної апроксимації це питання апроксимації позитивних та r-разів неперервно диференційованих функцій алгебраїчними поліномами. Оцінки типу (1) для позитивної апроксимації розглядаються в роботах [1, 2]. Питання монотонної апроксимації це питання наближення монотонних функцій з класу Соболєва монотонними алгебраїчними поліномами. Оцінки типу (1) для монотонної апроксимації були доведені в роботах [3, 4, 8]. У роботах [3, 4] розглядається натуральний індекс в просторі Соболєва, який не дорівнює одиниці. В роботі [8] розглядається дійсний індекс простору Соболєва, який строго більший за два. Доведено, що оцінки типу (1) не виконуються для дійсного індексу більшого за два. Питання опуклої апроксимації це питання апроксимації опуклих функцій з класу Соболєва опуклими поліномами. Питання опуклої апроксимації розглядалося в роботах [5, 6]. У роботі [5] розглядався натуральний індекс простору Соболєва, який не дорівнює одиниці. В роботі [6] розглядався дійсний індекс простору Соболєва, який строго більший за два. Було доведено, що для опуклої апроксимації оцінки типу (1) є невірними для дійсного індексу Соболєва, який більший за два. В роботі [9] розглядається питання опуклої апроксимації функцій з простору Соболєва опуклими алгебраїчними поліномами, якщо індекс простору Соболєва знаходиться в інтервалі від трьох до чотирьох. Також доведено, що оцінка (1) є невірною. В даній роботі досліджується питання наближення опуклих вниз функцій з простору Соболєва опуклими алгебраїчними поліномами також для дійсного індексу простору Соболєва з інтервалу від трьох до чотирьох. Побудовано контрприклад, який показує, що для цих функцій оцінка типу (1) є невірною. Ця робота є узагальненням результату роботи [9]. Основний результат є аналогом теореми 2.3 в [11].

Ключові слова: *наближення функції, простір Соболєва, алгебраїчний поліном, монотонна функція, опукла функція.*

Вступ. Нехай $W^r[0,1] = W^r, r \in \mathbb{N}$ клас функцій $f \in C[0,1]$, таких, що мають абсолютно неперервну $(r-1)$ похідну і $\left| f^{(r)}(x) \right| \le 1$

майже скрізь на [0,1]. Теляковський [1] для $r=1$ та Гопенгауз для $r\in\mathbb{N}$ [2] посилили пряму теорему Нікольського–Тіммана довівши, що кожну функцію $f\in W^r$ можна наблизити алгебраїчним многочленом p_n степеня $<n$ так, що

$$|f(x)-p_n(x)|\le c(r)\left(\frac{\sqrt{x(1-x)}}{n}\right)^r, n>r \qquad (1)$$

де c — абсолютна стала.

DeVore та Yu [3] довели, що при $r=1,2$ оцінка (1) справедлива і при наближенні монотонної функції монотонним многочленом. А саме, якщо монотонна функція $f\in W^r$, то існує монотонний многочлен p_n, такий, що має місце (1).

У роботі GLSW [4] доведено, що для натурального $r>2$ оцінка (1), взагалі кажучи, невірна.

Для опуклого наближення при $r>2, r\in\mathbb{N}$ доведено [5], що оцінка (1) також є невірною.

Для $r\in\mathbb{R}$ введемо клас функцій $W^r[0,1]=W^r$, таких, що $D_{0+}^{r-1}f$ абсолютно неперервна і $\left|D_{0+}^r f\right|\le 1$ майже скрізь на [0,1] (тут $D_{0+}^{r-1}f$ — лівостороння дробова похідна [7]). Будемо позначати через Π_n — множину всіх алгебраїчних поліномів степеня $\le n$ і через Δ^2 множину опуклих вниз на $[0,1]$ функцій.

Основним результатом роботи є теорема, яка узагальнює результат роботи [9] на класи $W^r[0,1]\bigcap\Delta^2$ з $r\in(3;4)$.

Основні означення та допоміжні твердження. Спочатку нагадаємо основні означення та факти, які використовуються в цій роботі.

Означення. Нехай $\varphi(x)\in L_1(a,b)$. Інтеграли

$$(I_{a+}^{\alpha}\varphi)(x)\overset{def}{=}\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x\frac{\varphi(t)}{(x-t)^{1-\alpha}}dt, x>\alpha. \qquad (2)$$

$$(I_{b-}^{\alpha}\varphi)(x)\overset{def}{=}\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_x^b\frac{\varphi(t)}{(x-t)^{1-\alpha}}dt, x<b, \qquad (3)$$

де $\alpha>0$ називаються інтегралами дробового порядку α. Перший називають лівостороннім, а другий правостороннім.

Що стосується дробового диференціювання, то його слід ввести, як операцію обернену дробовому інтегруванню [7].

Означення. Для функції $f(x)$, що задана на відрізку $[a,\ b]$ кожен із виразів

$$(D_{a+}^{\alpha} f)(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^{\alpha}} dt, \qquad (4)$$

$$(D_{b-}^{\alpha} f)(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_x^b \frac{f(t)}{(x-t)^{\alpha}} dt \qquad (5)$$

називається дробовою похідною порядку $\alpha, 0<\alpha<1$ відповідно лівосторонньою та правосторонньою.

Перейдемо до дробових похідних порядків $\alpha \geq 1$

$$\alpha = [\alpha] + \{\alpha\},$$

де $[\alpha]$ — ціла частина числа α і $\{\alpha\}$ — дробова частина числа α .

Якщо α — ціле число, то під дробовою похідною порядку α будемо розуміти звичайне диференціювання:

$$D_{a+}^{\alpha} = (\frac{d}{dx})^{\alpha}, D_{b-}^{\alpha} = (-\frac{d}{dx})^{\alpha}, \alpha = 1, 2, 3... \qquad (6)$$

Якщо ж α — не ціле, то правильно ввести за формулами:

$$D_{a+}^{\alpha} f = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} (\frac{d}{dx})^n \int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^{\alpha-n+1}} dt, n = [\alpha]+1, \qquad (7)$$

$$D_{b-}^{\alpha} f = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)} (\frac{d}{dx})^n \int_x^b \frac{f(t)}{(t-x)^{\alpha-n+1}} dt, n = [\alpha]+1. \qquad (8)$$

Наступна теорема дає достатні умови для існування дробових похідних будь-якого порядку $\alpha, \alpha > 0$ [7].

Теорема. Нехай $\alpha > 0$ та функція $f(x)$ має абсолютно неперервну похідну порядку $n, n = [\alpha]+1$. Тоді $D_{a+}^{\alpha} f$ існує майже скрізь і може бути представлена у вигляді

$$D_{a+}^{\alpha} f = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(1+k-\alpha)} (x-a)^{k-\alpha} + \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x \frac{f^{(n)}(t)}{(x-t)^{\alpha-n+1}} dt. \qquad (9)$$

Нехай $f \in W^r[0,1]$. Гопенгауз довів [2], що для апроксимації без обмежень для всіх $r \in \mathbb{N}$ знайдеться $p_n \in \Pi_n$ такий, що оцінка

$$\left| f(x) - p_n(x) \right| \leq c \cdot \frac{1}{n^2} (\sqrt{x(1-x)})^r, x \in [0,1] \qquad (10)$$

є вірною.

Для монотонного наближення при $r > 2, r \in \mathbb{N}$, доведено, що оцінка (10) є невірною ([4]). В роботах [8, 10] побудовано контрприклад, який показує, що результат не може бути поширеним і на клас $W^r[0,1]$ з $r \in (2,3) \cup (3,4)$.

Для опуклого наближення при $r > 2, r \in \mathbb{N}$ доведено, що оцінка (10) також є невірною ([5]). В роботах [6, 9] побудовано контрприклад, який показує, що результат не може бути поширеним на клас $W^r[0,1]$ при $r \in (2,3) \cup (3,4)$.

Основним результатом цієї роботи є теорема, яка узагальнює результат роботи [9] на класи $W^r[0,1]$ при $r \in (3;4)$. Також ця теорема є аналогом теореми 2.3 в роботі [11].

Основний результат.

Теорема. Нехай $r \in (3,4)$. Тоді для кожного n існує функція $F = F_{r,n} \in W^r[0,1] \bigcap \Delta^2$ така, що для кожного полінома $p_n \in \Pi_n \bigcap \Delta^2$ і для будь-якої додатної на (0;1) функції ψ, такої, що $\lim\limits_{x \to 0} \psi(x) = 0$ і $\lim\limits_{x \to 1} \psi(x) = 0$ справедлива одна з таких властивостей:

або
$$\overline{\lim_{x \to 0}} \frac{|F(x) - p_n(x)|}{\varphi^r(x)\psi(x)} = +\infty, \tag{11}$$

або
$$\overline{\lim_{x \to 1}} \frac{|F(x) - p_n(x)|}{\varphi^r(x)\psi(x)} = +\infty, \tag{12}$$

де $\varphi(x) = \sqrt{x(1-x)}$.

Доведення. Нехай $r \in (3,4)$ і $m = [r] + 1 = 4$. Розглянемо функцію:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{(b-x)^4}{4!} + b^4(x+7) + \dfrac{b^4}{48}(1+x)^{-2b^{-1}+4} + \dfrac{b^4}{4!}(1-x)^{b^{-1}+4}, 0 \le x \le b, \\ b^4(x+7) + \dfrac{b^4}{48}(1+x)^{-2b^{-1}+4} + \dfrac{b^4}{4!}(1-x)^{b^{-1}+4}, b < x \le 1, \end{cases}$$

де $b = \dfrac{1}{468n^2}$.

Легко бачити, що

$$f(0) > 0,\ f(1) \le \frac{45b^4}{4},\ f'(0) > -\frac{3b^3}{8},\ f'(b) > -\frac{b^3}{24}\left(e^{-2} + e^{-1}\right),$$
$$f(b) > 7b^4,\ f''(x) > 0, x \in [0,1].$$

Таким чином $f \in W^m[0,1] \bigcap \Delta^2$.

Далі розглянемо функцію $F(x) = x^4 \cdot f(x)$.

Доведемо, що $F \in W^r[0,1] \bigcap \Delta^2$. Спочатку покажемо, що $F \in \Delta^2$.

Нехай $x \in [b,1]$. Так як $f'(0) < 0, f'(b) < 0$ і $f'(1) > 0$, то $\exists x_0 \in (b,1): f'(x_0) = 0$.

Тоді точка $x = x_0$ є точкою мінімуму функції $f(x)$.

Зауважимо, що $\forall x \in [0,1]: f(x) > b^4$.

Так як $\forall \varepsilon > 0 \; f'\left(n^\varepsilon b\right) > 0, f'(x)$ зростає на $[0,1]$, то достатньо розглянути $x \in (b, n^\varepsilon b]$. Враховуючи те, що $f''(x)$ спадає на $[0,1]$, маємо оцінку

$$F''(x) = 12x^2 f(x) + 8x^3 f'(x) + x^4 f''(x) \geq x^2 \left(x^2 f''(n^\varepsilon b) + 8xf'(b) + 12 f(n^\varepsilon b)\right) \geq$$

$$\geq x^2 \left(x^2 \left(\frac{b^2}{12} e^{-2n^\varepsilon} + \frac{b^2}{24} e^{-n^\varepsilon} \right) + 8x \left(b^4 - \frac{b^3}{24}\left(e^{-2} + e^{-1}\right) \right) + 12b^4 \right) \geq$$

$$\geq b^6 \left(\frac{e^{-2n^\varepsilon} + e^{-n^\varepsilon}}{24} + 8bn^\varepsilon - \frac{e^{-2} + e^{-1}}{3} n^\varepsilon + 12 \right).$$

Нехай $\varepsilon \to 0$, тоді $F''(x) \geq b^6 \left(\frac{-7\left(e^{-2} + e^{-1}\right)}{24} + 8b + 12 \right) > 0$

Нехай $x \in [0,b]$. Тоді

$$F''(x) = x^2 \left(8xf'(x) + 12 f(x) + x^2 f''(x)\right) \geq x^2 \left(8xf'(0) + 12 f(x) + x^2 f''(x)\right) \geq$$

$$\geq x^2 \left(-8x \frac{3b^3}{8} + 12 f(x) + x^2 f''(x) \right) \geq x^2 \left(-3xb^3 + 12 f(b) + x^2 f''(x)\right) \geq$$

$$\geq x^2 \left(-3b^4 + 7b^4 + x^2 f''(x)\right) = x^2 \left(4b^4 + x^2 f''(x)\right) > 0.$$

Ми довели, що $\forall x \in [0,1]: F''(x) \geq 0$. Остання нерівність спричиняє $F \in \Delta^2$.

За теоремою 2.3 в роботі [7] маємо:

$$D^r_{0+} F(x) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{F^{(k)}(0)}{\Gamma(1+k-r)} x^{k-r} + \frac{1}{\Gamma(m-r)} \int_0^x \frac{F^{(m)}(t)}{(x-t)^{r-m+1}} dt =$$

$$= \sum_{k=0}^{3} \frac{F^{(k)}(0)}{\Gamma(1+k-r)} x^{k-r} + \frac{1}{\Gamma(4-r)} \int_0^x \frac{F^{(4)}(t)}{(x-t)^{r-3}} dt,$$

майже скрізь на $[0,1]$. Так як $F^{(k)}(0)=0$ при $k=0,1,2,3,$ то $D_{0+}^{r}F(x)=\frac{1}{\Gamma(4-r)}\int_0^x \frac{F^{(4)}(t)}{(x-t)^{r-3}}dt$ майже скрізь на [0, 1].

Очевидно, що $\exists c>0, c\in\mathbb{R}$ така, що $\forall x\in[0,1]:|F^{(4)}(x)|\le c.$ Тоді

$$|D_{0+}^{r}F(x)|=\frac{c}{\Gamma(4-r)}\int_0^x\frac{dt}{(x-t)^{r-3}}=\frac{c}{\Gamma(4-r)}\frac{x^{4-r}}{4-r}\le\frac{c}{(4-r)\Gamma(4-r)}.$$

Таким чином, $D_{0+}^{r}F(x)$ існує майже скрізь на [0,1]. Очевидно, що

$$D_{0+}^{r-1}F(x)=\frac{1}{\Gamma(3-r)}\int_0^x\frac{F^{(3)}(t)}{(x-t)^{r-3}}dt$$

буде абсолютно неперервною. Таким чином, $F\in W^r[0,1]\bigcap\Delta^2$.

Нехай існує многочлен q_n , який є опуклим вниз і для якого умова (11) не виконується.

Тоді, для деякої сталої B маємо:

$$|F(x)-q_n(x)|\le B\varphi^r(x)\psi(x)\le Bx^{r/2}, 0\le x\le b.$$

Звідси випливає, що $q_n(0)=F(0)=0$ і $q_n'(0)=F'(0)=0$.

Так як $q_n''(x)\ge 0, x\in[0,1],$ то $q_n'(x)$ зростає і умова $q_n'(0)=0$ зумовлює $q_n'(x)\ge 0, x\in[0,1].$

Тоді $q_n(x)$ зростає на $[0,1]$ і $q_n(x)\ge 0, x\in[0,1].$

Тоді многочлен q_n має вигляд $q_n(x)=x^2\cdot h_{n_1}(x),$ де h_{n_1} многочлен степеня $\le n_1, n_1\le n$.

Розглянемо многочлен $\tilde{q}_n(x)=q_n(x)+f'(0)x+f(0)$.

Доведемо, що умова $\overline{\lim_{x\to 0}}\frac{|f(x)-\tilde{q}_n(x)|}{\varphi^r(x)}=+\infty$ не виконується. (13)

Розкладемо функцію $f(x)$ за формулою Тейлора:

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+o\left(x^3\right),\quad x\in[0;b].$$

Тоді

$$\overline{\lim_{x\to 0}}\frac{|f(x)-\tilde{q}_n(x)|}{\varphi^r(x)}=\overline{\lim_{x\to 0}}\frac{\left|f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2}x^2+\frac{f'''(0)}{6}x^3+o\left(x^3\right)-\tilde{q}_n(x)\right|}{x^{\frac{r}{2}}}=$$

$$= \overline{\lim_{x\to 0}} \frac{\left| \frac{f''(0)}{2} x^2 + \frac{f'''(0)}{6} x^3 + o\left(x^3\right) - q_n(x) \right|}{x^{\frac{r}{2}}} =$$

$$= \overline{\lim_{x\to 0}} \left| \left(\frac{f''(0)}{2} + \frac{f'''(0)}{6} x + o\left(x\right) - h_{n_1}(x) \right) x^{2-r/2} \right| = 0.$$

Так як умова (13) не виконується, то $\tilde{q}_n(0) = f(0), \ \ \tilde{q}_n'(0) = f'(0)$.

За нерівністю Маркова маємо:

$$\frac{b^3}{18} < \frac{3b^3}{8} + \frac{b^4}{24} = | f'(0) | = | \tilde{q}_n'(0) | \le 2n^2 \ \| \tilde{q}_n \|$$

За побудовою многочлена $\tilde{q}_n(x)$ бачимо, що він має одну точку мінімуму $x_0 \in (0,1)$. Тоді $\|\tilde{q}_n\| = \max\{|\tilde{q}_n(0)|, |\tilde{q}_n(1)|, |\tilde{q}_n(x_0)|\}$.

Нехай $\| \tilde{q}_n \| = \tilde{q}_n(1)$.

Тоді

$$\frac{b^3}{18} \le 2n^2 q_n(1) \Rightarrow \ q_n(1) > \frac{b^3}{36n^2}. \tag{14}$$

З іншого боку,

$$f(1) \le \frac{45b^4}{4} = \frac{45b^3 \cdot b \cdot 36n^2}{36n^2 \cdot 4} = \frac{b^3}{36n^2} \cdot \frac{45bn^2 36}{4} = \frac{b^3}{36n^2} \cdot \frac{45 \frac{1}{468n^2} n^2 36}{4} =$$
$$= \frac{b^3}{36n^2} \cdot \frac{45 \cdot 36}{4 \cdot 468} = \frac{b^3}{36n^2} \cdot \frac{45 \cdot 9}{468} = \frac{b^3}{36n^2} \cdot \frac{405}{468} \le \frac{b^3}{36n^2}. \tag{15}$$

З нерівностей (14) і (15) маємо, що $f(1) \ne \tilde{q}_n(1)$, а саме $f(1) < \tilde{q}_n(1)$.

Далі розглянемо: $\tilde{q}_n(1) = q_n(1) + f'(0) + f(0)$.

Припустимо, що $q_n(1) = f(1)$.

Тоді

$$\tilde{q}_n(1) = f(1) + f'(0) + f(0) > f(1) \Leftrightarrow f'(0) + f(0) > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(0) > -f'(0) \Leftrightarrow \frac{85}{12} b^4 > \frac{3b^3}{8} + \frac{b^4}{24} \Leftrightarrow \frac{3b^3}{8} < \frac{169}{12} b^4$$

$\Rightarrow$ маємо суперечність.

Якщо $\|\tilde{q}_n(x)\| = \tilde{q}_n(0)$, то маємо $\tilde{q}_n(1) \le \tilde{q}_n(0) = f(0) < f(1)$ і також отримуємо, що $f(1) \ne \tilde{q}_n(1)$. Ми припускаємо, що $\tilde{q}_n(1) > 0$, бо в протилежному випадку твердження $f(1) \ne \tilde{q}_n(1)$ очевидно.

Насправді, $\|\tilde{q}_n\| \ne \tilde{q}_n(0)$, так як тоді:

$$13b^4 = \frac{b^3}{18n^2} < \tilde{q}_n(0) = f(0) = \frac{341}{48}b^4 \Rightarrow$$ маємо суперечність.

Випадок $\|\tilde{q}_n\| = |\tilde{q}_n(x_0)|$ розглядається аналогічно.

Таким чином $q_n(1) \neq f(1) = F(1)$.

Теорема доведена.

Висновки. В роботі було побудовано контрприклад, який показує, що оцінка (1) не може бути поширена на клас функцій $f \in W^r[0,1] \bigcap \Delta^2, r \in (3;4)$.

Список використаних джерел:

1. Теляковський С. А. Две теоремы о приближении функций алгебраическими полиномами / С. А. Теляковський // Мат. сб. — 1966. — Вип. 79. — С. 252–265.
2. Gopengauz A. I. Pointwise estimates of Hermitian interpolation / A. I. Gopengauz. — 1994. — Vol. 77.
3. DeVore R. A. Pointwise estimates for monotone polynomial approximation / R. A. DeVore, X. M. Yu // Constr. Approx. — 1985. — № 1. — P. 323–331.
4. Gonska H. H. Interpolatory pointwise estimates for polynomial approximations / H. H. Gonska, D. Leviatan, I. A. Shevchuk, H. -J. Wenz // Constr. Approx. — 2000. — № 16. — C. 603–629.
5. Петрова Т. О. Контрприклад у інтерполяційному опуклому наближенні / Т. О. Петрова // Праці Інституту математики НАН України. Математика та її застосування. Теорія наближення функцій. — 2005. — Вип. 35. — С. 107–112.
6. Петрова Т. О. Один контрприклад для наближення функцій, що мають дробову похідну / Т. О. Петрова // Вісник Київського університету. Фізико-математичні науки. — 2006. — № 4. — С. 113–118.
7. Samko S. G. Fractional integrals and derivatives: theory and applications / S. G. Samko, A. A. Kilbas, O. I. Marichev. — 1987.
8. Петрова Т. О. Про поточкові інтерполяційні оцінки монотонного наближення функцій, що мають дробову похідну / Т. О. Петрова // Вісник Київського університету. Математика. Механіка. — 2003. — № 9-10. — Р. 125–127.
9. Петрова Т. О. Про поточкові інтерполяційні оцінки опуклого наближення функцій, що мають дробову похідну довільного порядку, $r \in (3,4)$ / Т. О. Петрова // Вісник Київського університету. Математика. Механіка. — 2017. — № 2 (38). — С. 9–10.
10. Петрова Т. О. Про поточкові інтерполяційні оцінки монотонного наближення функцій, що мають дробову похідну / Т. О. Петрова // Вісник Київського університету. Математика. Механіка. — 2002. — № 7-8. — С. 125–127.
11. Kopotun K. A. Interpolatory estimates for convex piecewise polynomial approximation / K. A. Kopotun, I. A. Shecvhuk // Journal of Mathematical Analysis and Applications. — 2019. — № 474. — P. 467–479.

GENERALIZATION OF POINT INTERPOLATION ASSESSMENTS OF THE PROJECT APPROXIMATION OF FUNCTIONS, WHAT HAVE A FRACTIONAL DERIVATIVE

We discuss whether on not it is possible to have interpolatory estimates in the approximation of a function of Sobolev`s space by polynomials. The problem of positive approximation is to estimate the pointwise degree of approximation of a function of r times continuously differentiable and positive functions on [0, 1]. Estimates of the form (1) for positive approximation are known ([1, 2]). The problem of monotone approximation is that of estimating the degree of approximation of a monotone nondecreasing function by monotone nondecreasing polynomials. Estimates of the form (1) for monotone approximation were proved in [3, 4, 8]. In [3, 4] is consider r is natural and r not equal one. In [8] is consider r is real and r more two. It was proved that for monotone approximation estimates of the form (1) are fails for r is real and r more two. The problem of convex approximation is that of estimating the degree of approximation of a convex function by convex polynomials. The problem of convex approximation is consider in ([5, 6]). In [5] is consider r is natural and r not equal one. In [6] is consider r is real and r more two. It was proved that for convex approximation estimates of the form (1) are fails for r is real and r more two. In [9] the question of approximation of function of Sobolev`s space and convex by algebraic convex polynomial is consider. It is proved, that for this function, estimate (1) is not true, if r is more three and less four generally speaking. In this paper the question of approximation of function Sobolev`s space and convex by algebraic convex polynomial is consider. This paper is the generalization of results papers [9] and [11]. It is proved, that for function of Sobolev`s space and convex, estimate of the type (1) is not true, generally speaking. The main result is the analog of the theorem 2.3 in [11].

Key words: *approximation of function, Sobolev space, algebraic polynomial, monotone function, convex function.*

Отримано: 19.08.2019