

УДК 539.3

DOI: 10.32626/2308-5878.2019-20.70-78

**Ю. В. Сачук\***, канд. фіз.-мат. наук,**О. В. Максимук\*\***, д-р. фіз.-мат. наук, професор,**І. П. Саланда\*\*\***, канд. техн. наук\*Східноєвропейський національний університет  
імені Лесі Українки, м. Луцьк,

\*\* Львівський національний університет імені Івана Франка, м. Львів,

\*\*\*Кременецька обласна гуманітарно-педагогічна академія  
імені Тараса Шевченка, м. Кременець

### **АНАЛІТИКО-ЧИСЛОВЕ ОБЧИСЛЕННЯ ІТЕРАЦІЙНИМИ МЕТОДАМИ ОБЛАСТЕЙ КОНТАКТУ ДЛЯ ЗАДАЧІ ПРО ЗНОШУВАННЯ ПРУЖНОЇ ПІВПЛОЩИНИ КАНОНІЧНИМИ ШТАМПАМИ**

У роботі розглянуто контактні задачі про контактну взаємодію штампів канонічної форми (циліндричної, еліптичної, гіперболічної, параболічної) з пружною півплощиною із урахуванням зношування матеріалу. На основі моделі абразивного зношування отримане сингулярне інтегро-диференціальне рівняння зі змінними межами інтегрування для визначення контактного тиску, який залежить від двох параметрів та є змінним в часі. На основі методу розділення змінних задачу було зведено до розв'язування узагальненої проблеми на власні значення, зокрема пошуку власних значень та власних векторів. Також при обчисленні власних векторів було враховано форму штампа, розв'язування нескінченної системи лінійних алгебричних рівнянь.

На основі отриманих власних значень та векторів проведено побудову функціонального ряду для контактного тиску. Запропоновано ітераційний аналітико-числовий алгоритм пошуку областей контакту для задачі про зношування півплощини штампами канонічної форми, що ґрунтується на використанні екстраполяційних поліномів. Запропонований ітераційний метод полягає в модифікації розробленого методу напівпрямого пошуку областей зношування, які є змінними межами інтегрування для загального інтегро-диференціального рівняння. Розроблено програмні модулі для реалізації запропонованого підходу та проведено аналіз ефективності використання різних способів екстраполяції в різних програмних засобах.

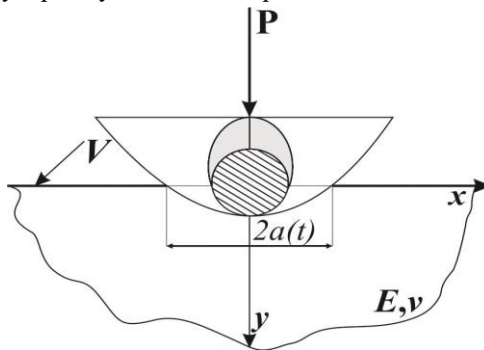
Для фіксованих моментів часу було знайдено початкові наближення області зношування при заданій сталій силі. Чисельно встановлено оптимальну кількість початкових областей зношування для екстраполяційного пошуку наступних значень при сталих часових проміжках, так що похибкою можна знехтувати. Чи-

сельно пораховано області зношування (контакту) описаним методом для інших часових проміжках в безрозмірних величинах. Побудовано графіки контактних тиски та проведено аналіз особливостей їх розподілів для різних форм штампів.

**Ключові слова:** область контакту, лінійна екстраполяція, поліноми Чебишиова, пружна півплощина, інтегро-диференціальні рівняння, зношування півплощини, розділення змінних, аналітико-числові методи, штампи канонічної форми.

**Вступ.** При визначенні контактних напружень та величини зношування у взаємодіючих елементах різних механічних систем і конструкцій часто виникає необхідність враховувати низку геометричних та фізико-механічних параметрів. Складність таких задач пов'язана з тим, що область контакту (зношування) заздалегідь невідома і визначення її навіть за відомої притискаючої сили є складною нелінійною проблемою [2, 7]. Ці обставини призводять до необхідності використання геометричних та фізичних нелінійностей при формулюванні таких задач [2, 7, 8]. Тому для отримання числових значень областей зношування у різні моменти часу в подібних випадках доводиться використовувати різні наближені методи, кожен з яких, як правило, не є універсальним [1, 2, 4, 7]. Дослідження нових методів у тому числі із використанням екстраполяційних поліномів для аналітико-числового обрахунку областей зношування є важливою технічною задачею для прикладних галузей механіки [12].

**Постановка контактної задачі зі зношуванням півплощини.** Розглядається контактна задача про взаємодію штампів канонічної форми з пружною півплощиною із урахуванням зношування матеріалу. У пружну півплощину вдавлюється силою  $P$  жорсткий штамп з основою  $f(x)$ . Крім того, штамп рухається зі швидкістю  $V$  у напрямку перпендикулярному до площини рис. 1.



**Рис. 1.** Модель контактної взаємодії штампів канонічної форми з пружною півплощиною із урахуванням зношування матеріалу

Припустимо, що сила тертя зв'язана з контактним тиском законом Кулона. У випадку лінійної моделі зношування сингулярне інтегро-диференціальне рівняння (1) матиме вигляд [4]:

$$\frac{1}{\alpha} \int_{-a(t)}^{a(t)} p(\xi, t) \frac{d\xi}{\xi - x} = k_1 k_2 V \int_0^t \frac{\partial}{\partial x} p(x, t) dt - \frac{df(x)}{dx}, \quad (1)$$

де  $\alpha = \frac{\pi E}{2(1-\nu^2)}$ ,  $k_1$  — коефіцієнт пропорційності між роботою сили тертя та кількістю зношеного матеріалу,  $k_2$  — коефіцієнт тертя,  $p(x, t)$  — контактний тиск,  $a(t)$  — область контакту.

Контактний тиск у кожен момент часу  $t$  повинен задовольняти умови:

$$P = \int_{-a(t)}^{a(t)} p(x, t) dt, \quad p(\pm a(t), t) = 0. \quad (2)$$

Варто зауважити, що область контакту  $a(t)$  змінна в часі, а контактний тиск залежить від просторової та часової координати.

Для розв'язування інтегро-диференціального рівняння для штампів канонічної форми було використано та розвинуто метод розділення змінних з подальшим використанням поліномів Чебишова [4–6]. Отримана задача була зведена до узагальненої проблеми на власні значення та у зв'язку зі особливостями її механічної природи розв'язана сучасними методами факторизації матриць [10, 11].

У відповідності до обраної методики розв'язування рівняння (1) у безрозмірних величинах [6] контактний тиск шукаємо у вигляді:

$$p(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_{2k}(x) e^{-\alpha_{2k} t}. \quad (3)$$

Для однозначного визначення власних векторів (врахування форми штампа)  $a_m^k \varphi_{2k}(x)$  запишемо у вигляді [4, 6]:

$$\varphi_{2k}(x) = d_k \sum_{m=0}^{\infty} a_m^k \sqrt{1-x^2} U_{2m}(x). \quad (4)$$

У результаті відповідних підстановок та математичних перетворень згідно (4) було обчислено коефіцієнти  $d_k$  шляхом розв'язування нескінченної системи лінійних алгебричних рівнянь [4] та після підстановки (4) у (3) отримуємо остаточної функції контактного тиску для кожного штампа канонічної форми.

Завдяки цьому підходу було отримано аналітичний розв'язок, що дає змогу побудувати збіжний алгоритм [5, 6] для напівпрямого

пошуку областей зношування з умови рівноваги штамп (2) для інтегро-диференціального рівняння (1) при заданій початковій силі  $P$  та беручи до уваги твердження, що сила є незмінною.

**Алгоритм обчислення областей зношування.** Запропонований напівпрямий метод для обчислення змінних областей зношування реалізований в роботах [5, 6], однак при значному збільшенні часу фрикційної взаємодії обчислення кожної наступної області зношування є складною обчислювальною задачею.

Обчислювальний алгоритм на основі екстраполяційних поліномів умовно можна розділити на етапи. На першому етапі (аналітичному наближенні) знаходження області контакту в довільний момент часу такий: у момент часу  $t_0 = 0$  задача розв'язана іншим способом [5, 6] (для сили  $P$  знайдено  $a_0$ ); у наступний момент часу  $t = t_{i-1}$  приймаємо, що  $a(t_{i-1}) = a_{i-1}$ , проводимо всю процедуру знаходження контактної тиску (3) за схемою, описаною вище, підставляємо контактний тиск в умову рівноваги (2) і порівнюємо знайдену силу  $P_{i-1}$  з  $P$ , при  $P_{i-1} > P$  зменшуємо  $a_{i-1}$  і навпаки. Цей процес повторюємо для кожного наступного  $t_{i-1} > t_{i-2}$ , де  $t_{i-1} = t_{i-2} + \Delta t$ , при  $i = 2, 3, \dots$

На другому етапі пошуку  $a_i$  (для зручності позначимо  $a_i$  із верхнім індексом 2  $a_i^2$ ) маючи відповідні пари значень  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{i-1}$  із використанням лінійної екстраполяції [3, 9, 13] наближено обчислюється  $a_i^2$  при заданому  $t_i$  із використанням значень отриманих на попередніх кроках та виконанні (2). Для пошуку наступної області зношування  $a_{i+1}^2$ , що отримується в результаті роботи фрикційної пари в момент часу  $t_{i+1} = t_i + \Delta t$  беремо ряд  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{i-1}$  і додаємо екстраполяційне значення  $a_i^2$ , тобто  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{i-1}, a_i^2$  в моменти часу  $t_1, t_2, t_3, \dots, t_{i-1}, t_i$  і будемо відповідно екстраполяційну функцію. В загальному випадку для пошуку  $a_{i+k}^2$  при  $t_{i+k}$  ітераційно будується екстраполяційний поліном на основі отриманих значень на всіх етапах роботи фрикційної пари:  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{i-1}, a_i^2, a_{i+1}^2, a_{i+2}^2, \dots, a_{i+k}^2$  у фіксовані моменти часу  $t_1, t_2, t_3, \dots, t_{i-1}, t_i, t_{i+1}, \dots, t_{i+k}$ .

Ключовими факторами при екстраполяційному обчисленні областей зношування  $a_i^2$ , що суттєво впливає на похибку обчислень є вибір кроку розбиття по часу  $\Delta t$  для обчислення  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{i-1}$  що задається при обернено-аналітичному пошуку.

**Числові результати та аналіз особливостей розрахунку областей зношування.** Для визначеності та ітераційного визначення областей зношування запишемо вигляд  $f_k(x)$  для всіх штампів:

- a) параболічної форми  $f_1(x) = -\frac{x^2}{2R}$ , де  $R$  радіус кривизни в точці  $x = 0$ ;
- b) циліндричної форми  $f_2(x) = -R + \sqrt{R^2 - x^2}$ , де  $R$  — радіус циліндра;
- c) еліптичної форми  $f_3(x) = -b_1 + \frac{b_1}{a_1} \sqrt{a_1^2 - x^2}$ , де  $a_1, b_1$  — велика та мала півосі еліпса, для розрахунків  $a_1 = R, b_1 = R(1 \pm \varepsilon)$ ;
- d) гіперболічної форми  $f_4(x) = b_1 - \frac{b_1}{a_1} \sqrt{a_1^2 + x^2}$  де  $a_1, b_1$  — величини дійсної та уявної півосей гіперболи, для розрахунків  $a_1 = R, b_1 = R(1 \pm \varepsilon)$ .

Для подальших міркувань та зручності числових розрахунків введемо безрозмірні величини:  $p(x, t) = p'(x', t')\alpha$ ,  $f(x) = f'(x')a$ ,  $x' = \frac{x}{a}$ ,  $t = t' a / (\alpha k_1 k_2 V)$ , надалі штрихи опускаємо.

Для автоматизованого пошуку областей зношування на основі побудови екстраполяційних поліномів із використанням повторних ітерацій та графічного відображення графіків контактного тиску було використано систему Matlab. Можливість побудови таких зображень забезпечує функція  $interp1(x, v, xq, 'linear', 'extrap')$ , де вхідні параметри  $x$  — масив часових проміжків,  $v$  — це значення областей зношування у відповідні моменти часу, параметр «*linear*» — задає тип екстраполяційного полінома [13]. Варто відмітити, що найбільш точні наближення отримуються із використанням лінійної екстраполяції [1, 9].

На рис. 2 показано зміну контактного часу для гіперболічного штамп при заданій сталій силі  $P = 0.1496$ ,  $\varepsilon = 0.1$  та відповідній їй початковій області контакту  $\frac{a_0}{R} = 0.342$ , у фіксовані моменти часу  $t_1 = 0.095$ ,

$t_2 = 0.19$ ,  $t_3 = 0.285$ ,  $t_4 = 0.38$ ,  $t_5 = 0.475$ ,  $t_6 = 0.57$ ,  $t_7 = 0.665$ ,  $t_8 = 0.76$ ,  $t_9 = 0.855$ , було знайдено наступні області контакту за алгоритмом описаним вище

$$\frac{a_1}{R} = 0.3865, \quad \frac{a_2}{R} = 0.4252, \quad \frac{a_3}{R} = 0.4655, \quad \frac{a_4^2}{R} = 0.5065,$$

$$\frac{a_5^2}{R} = 0.5475, \quad \frac{a_6^2}{R} = 0.5885, \quad \frac{a_7^2}{R} = 0.6295, \quad \frac{a_8^2}{R} = 0.6705, \quad \frac{a_9^2}{R} = 0.7115.$$

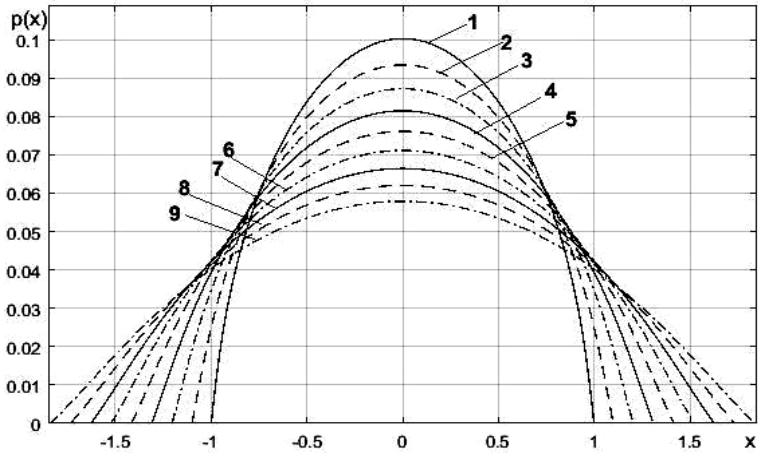


Рис. 2. Контактний тиск для штампa гіперболічної форми

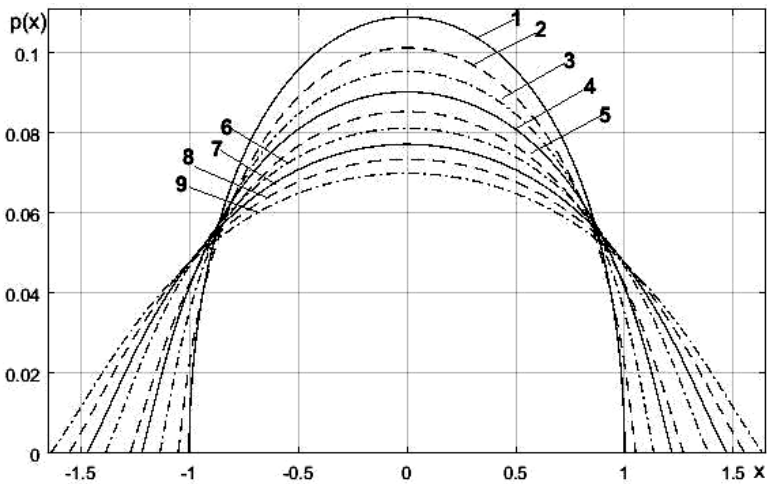


Рис. 3. Контактний тиск для штампa циліндричної форми

На рис.3 показано зміну контактного часу для циліндричного штампa при заданій сталій силі  $P = 0.1496$  та відповідній їй початковій області контакту  $\frac{a_0}{R} = 0.2895$ , у фіксовані моменти часу  $t_1 = 0.095$ ,  $t_2 = 0.19$ ,  $t_3 = 0.285$ ,  $t_4 = 0.38$ ,  $t_5 = 0.475$ ,  $t_6 = 0.57$ ,  $t_7 = 0.665$ ,  $t_8 = 0.76$ ,  $t_9 = 0.855$ , було знайдено наступні області контакту за алгоритмом описаним вище  $\frac{a_1}{R} = 0.3215$ ,  $\frac{a_2}{R} = 0.3492$ ,

$$\frac{a_3}{R} = 0.377, \quad \frac{a_4^2}{R} = 0.4048, \quad \frac{a_5^2}{R} = 0.4326, \quad \frac{a_6^2}{R} = 0.4604, \quad \frac{a_7^2}{R} = 0.4882,$$

$$\frac{a_8^2}{R} = 0.5160, \quad \frac{a_9^2}{R} = 0.5438.$$

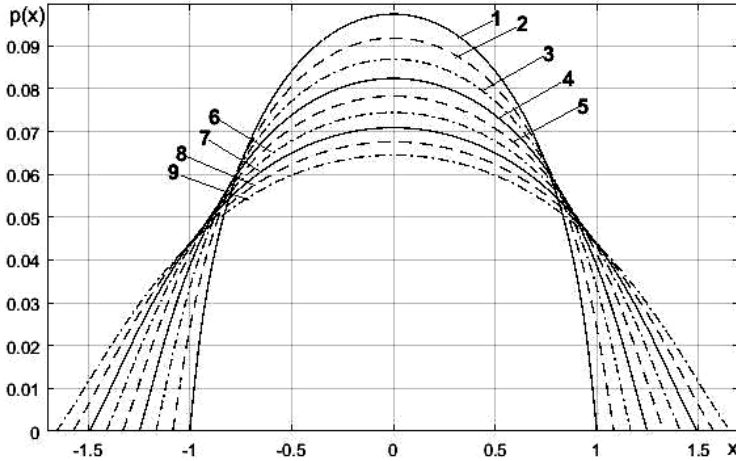


Рис. 4. Контактний тиск для штамп еліптичної форми

На рис. 4 показано зміну контактної сили для еліптичного штамп при заданій сталій силі  $P = 0.1496$   $\varepsilon = -0.1$  та відповідній їй початковій області контакту  $\frac{a_0}{R} = 0.3189$ , у фіксовані моменти часу  $t_1 = 0.095$ ,  $t_2 = 0.19$ ,  $t_3 = 0.285$ ,  $t_4 = 0.38$ ,  $t_5 = 0.475$ ,  $t_6 = 0.57$ ,  $t_7 = 0.665$ ,  $t_8 = 0.76$ ,  $t_9 = 0.855$ , було знайдено наступні області контакту за алгоритмом описаним вище  $\frac{a_1}{R} = 0.355$ ,  $\frac{a_2}{R} = 0.385$ ,

$$\frac{a_3}{R} = 0.414, \quad \frac{a_4^2}{R} = 0.4430, \quad \frac{a_5^2}{R} = 0.4720, \quad \frac{a_6^2}{R} = 0.5010, \quad \frac{a_7^2}{R} = 0.5300,$$

$$\frac{a_8^2}{R} = 0.5590, \quad \frac{a_9^2}{R} = 0.5880.$$

**Висновок.** Для контактної задачі про задача про взаємодію жорсткого штамп із пружною півплощиною зі зношенням матеріалу, котра зводиться до розв'язування інтегро-диференціального рівняння зі змінними межами запропоновано модифікований ітераційний метод пошуку областей контакту на основі екстраполяційних поліномів.

Розвинута методика ітераційного пошуку областей зношування дозволяє визначити контактний тиск в будь-який момент часу і тим самим визначити параметри зношування в кожній точці області контакту при заданні конкретних фізико-механічних параметрів фрикційних пар. Для наочного представлення числових результатів побудовано графіки контактних тисків для різних канонічних штампів при однаковій початковій силі в різні часові моменти і виявлено особливі ефекти взаємодії тіл, зокрема виявлено ефект впливу форми штампа на процес зношування при значному збільшенні часу фрикційної взаємодії контактної пари.

### Список використаних джерел:

1. Бондаренко Л. Н. Сравнение экстраполяционных методов обработки результатов измерений / Л. Н. Бондаренко, Д. И. Нефедьев // Измерение. Мониторинг. Управление. Контроль. — 2013. — № 2 (4). — С. 3–9.
2. Дмитриева К. В. Контактная задача для штампа на упругом клине со свободными границами / К. В. Дмитриева // Вестник БНТУ. — 2010. — № 4. — С. 24–29
3. Назарова И. А. Экстраполяционные блочные одношаговые численные методы решения жестких задач Коши / И. А. Назарова // Искусственный интеллект. — 2010. — № 3. — С. 116–126
4. Пелех Б. Л. Контактные задачи для слоистых элементов конструкций и тел с покрытиями / Б. Л. Пелех, А. В. Максимук, И. М. Коровайчук. — Киев : Наук. думка, 1988. — 280 с.
5. Сачук Ю. В. Узагальнена проблема на власні значення в задачах контактної взаємодії з урахуванням зношування матеріалу / Ю. В. Сачук // Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології. — 2015. — № 21. — С. 205–212.
6. Сачук Ю. В. Контактна задача про зношування пружної півплощини штампами канонічної форми / Ю. В. Сачук, О. В. Максимук // Вісник Тернопільського національного університету. — 2015. — № 2. — С. 70–80.
7. Чебаков М. И. Контактная задача для упругого параллелепипеда при наличии трения и износа / М. И. Чебаков, С. А. Данильченко, А. А. Ляпин // Естественные науки. — 2017. — № 2. — С. 32–37.
8. Чернець М. В. Трибоконтактні задачі для циліндричних з'єднань з технологічною некруглістю / М. В. Чернець. — Люблін : Вид. Люблінської політехніки, 2013. — 273 с.
9. Шарый С. П. Курс вычислительных методов / С. П. Шарый. — Новосибирск : Институт вычислительных технологий СО РАН, 2014. — 501 с.
10. Golpar-Raboky E. A. New Approach for Computing WZ Factorization / E. A. Golpar-Raboky // Applications and Applied Mathematics: An International Journal (AAM). — 2012. — Vol. 7. — No. 2. — P. 571–584.
11. Golpar-Raboky E. A. WZ-factorization via Abaffy-Broyden-Spedicato algorithms / E. A. Golpar-Raboky // Bulletin of the Iranian Mathematical Society. — 2014. — Vol. 40. — No. 2. — P. 399–411.
12. Rerthelsen R. Computational modelling of wear — application to structured surfaces of elastoplastic tools / R. Rerthelsen, H. Wilbuer, R. Holtermann, A. Menzel // GAMM-Mitt. — 2016. — Vol. 39. — №2. — P. 210–228.



13. Todd Young, Mohlenkamp Introduction to Numerical Methods and Matlab Programming for Engineers / Todd Young, J. Martin. — Ohio : Department of Mathematics Ohio University Athens, 2017. — 173 p.

### **ANALYTICAL AND NUMERICAL CALCULATIONS BY ITERATION METHOD FOR CONTACT AREA FOR THE PROBLEM OF WEARING THE ELASTIC AREA BY CANONICAL STAMPS**

The contact problems of contact interaction of canons of canonical forms (cylindrical, elliptical, hyperbolic, parabolic) with an elastic half-plane are considered in the work taking into account wear of the material. On the basis of the model of abrasive wear, a singular integro-differential equation with variable integration limits is obtained to determine the contact pressure, which depends on two parameters and is variable over time. Based on the method of splitting variables, the task was solved to solve a generalized problem on eigenvalues, including finding eigenvalues and eigenvectors. Also, when calculating the eigenvectors, the form of the stamp, the solution of an infinite system of linear algebraic equations, was taken into account.

Based on the eigenvalues and vectors obtained, a functional series for contact pressure was constructed. An iterative analytic-numerical algorithm for finding contact areas is proposed for the problem of half-plane wear by canonical-shaped stamps, based on the use of extrapolation polynomials. The proposed iterative method is to modify the developed method of semi-direct search for wear regions, which are variable integration boundaries for the general integro-differential equation. Software modules have been developed to implement the proposed approach and an analysis of the effectiveness of using different methods of extrapolation in different software tools.

For fixed moments, initial approximations of the wear region were found at a given constant force. The optimal number of initial wear areas is numerically established to extrapolate the following values at constant time intervals, so that the error can be neglected. The wear area (contact) of the described method for other time intervals in dimensionless quantities is numerically calculated. The graphs of contact pressures were constructed and the peculiarities of their distributions for different forms of dies were analyzed.

**Key words:** *contact area, linear extrapolation, Chebyshev polynomials, elastic half-plane, integro-differential equations, half-plane wear, separation of variables, analytical-numerical methods, canonical stamps.*

Отримано: 22.08.2019