УДК 517.5
DOI: 10.32626/2308-5878.2019-20.92-100

V. A. Sorych, Cand. of Phis. and Mathem. Sciences,
N. M. Sorych, Cand. of Phis. and Mathem. Sciences

Kamianets-Podilskyi Ivan Ohiienko National University,
Kamianets-Podilskyi

THE JOINT APPROXIMATION (ψ, β) — INTEGRALS BY FEJER'S SUMS IN THE METRIC *Lp*

We know, that any summable periodic function is answered its Fourier's series. Therefore, it is naturally to approach it by trigonometric polynomials, that are the part's sums of their series, they are named the Fourier's sums. Sometimes the Fourier's sums very slowly approach to it, sometimes they do not approach (the example of the continuous function with divergent Fourier's series in some points was made Du Bois Reimond in 1876 y.). This fact induced mathematicians to search other sequences trigonometric polynomials, that they would gather to their generative function or that would uniformly gather to it on all space. Clear, that most successful in understanding of speed of convergence there is a sequence of its polynomials of the best approaching to the function. But, unfortunately, an operator of the best approaching is not linear. It complicates the construction of polynomials of the best approaching in large part, and, therefore, their use.

If to examine the linear methods of summarization Fourier's sums only, then matrix summarization the gives great class of such methods. One of these methods there is Fejer's method, the method middle arithmetic of the first n Fourier's sums.

In this work the asymptotic equality are found at $n \to \infty$ of upper bound of the value of the joint approximation by Fejer's sums of the order n of functions, that have a derivative in sense of Stepanets, in the case of an achievement of the saturation, in the metric of space of integral at p degrees functions. The main member of an asymptotic decomposition is selected and the order of the residual member is shown also.

Key words: *Fejer's sums, the joint approximation, the derivative in sense of Stepanets, an intrgral metric*.

Problem statement. Let $\varphi(x)$ — summable 2π — periodic function and

$$S[\varphi] = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

its Fourier series is, $\psi(k)$ — random sequence, $\beta \in R$. If a series

$$\sum_{k=1}^{\infty}\psi(k)\left(a_k\cos\left(kx+\frac{\beta\pi}{2}\right)+b_k\sin\left(kx+\frac{\beta\pi}{2}\right)\right)=S[f]$$

is Fourier series of some function $f(x)$, then, according O. I. Stepanets [1], we call this function (ψ,β) — integral of function $\varphi(x)$ and designate

$$f(x)=I_\beta^\psi(\varphi;x).$$

Let's denote by L_p, $1\le p<\infty$, the space of functions $\varphi(x)$, having a finite norm

$$\|\varphi\|_p=\left(\int_{-\pi}^{\pi}|\varphi(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}},$$

and U_p^0 — a single bullet of this space with elements orthogonal to constant. By $L_{\beta,p}^\psi$ we will denote sets of (ψ,β) — integral of function $\varphi\in U_p^0$.

Let's denote by

$$\sum\nolimits_{n,m}(\varphi;x;\alpha)=\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\left(f_i(x)-\sigma_n(f_i;x)\right),$$

where $f_i(x)=I_{\beta_i}^{\psi_i}(\varphi;x)$, $\sigma_n(f;x)$ — Fejer's sum of function $f(x)$ order n:

$$\sigma_n(f;x)=\sum_{k=0}^{n-1}\left(1-\frac{k}{n}\right)\left(a_k(f)\cos kx+b_k(f)\sin kx\right),\alpha_i\in R.$$

Let's take value

$$\mathcal{E}_{n,m}\left(U_p^0\right)=\max_{|\alpha_i|=1}\sup_{\varphi\in U_p^0}\left\|\sum\nolimits_{n,m}(\varphi;x;\alpha)\right\|_p \tag{1}$$

for joint approximation of classes $L_{\beta_i}^{\psi_i}$ by Fejer's sums in the metric of space L_p.

Formulation of the problem. In this paper we investigate asymptotic behavior of $\mathcal{E}_{n,m}\left(U_p^0\right)$ with $n\to\infty$ and some limitation on the sequences $\psi_i(k)$ and numbers $\beta_i\left(i=\overline{1,m}\right)$, and indicate the order of the residual member.

It is well known (see [1]), that the method of summation of Fourier series the Fejer method is saturated. So meaning that approximation order can't be better of n^{-1}, and the saturation happen if a function have the regular derivative of the first order. We will consider the following $(\psi_i;\beta_i)$ — integrals of functions $\varphi \in U_p^0$, having a derivative and satisfying the asymptotic estimation:

$$f_i(x)-\sigma_n(f_i;x)=\mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right),\ n\to\infty\left(i=\overline{1,m}\right).$$

Auxiliary statements. Following statements were proved in [4].

Lemma1. If the sequence $\psi(k)$ is twice monotone, t.i.

$$\Delta\psi(k)=\psi(k)-\psi(k+1)\geq 0,$$

$$\Delta^2\psi(k)=\psi(k)-2\psi(k+1)+\psi(k+2)\geq 0, k\in \mathrm{N}, \text{ and } \lim_{k\to\infty}\psi(k)=0,$$

then

$$S(t)=\sum_{k=1}^{\infty}\psi(k)\sin kt\geq 0$$

for $t\in[0;\pi]$.

Lemma 2. If the sequence $\psi(k)$ is four times monotone, t.i. $\Delta\psi(k)\geq 0,$

$$\Delta^2\psi(k)=\Delta(\Delta\psi(k))\geq 0,$$

$$\Delta^3(\psi(k))=\Delta\left(\Delta^2\psi(k)\right)\geq 0, \Delta^4(\psi(k))=\Delta\left(\Delta^3\psi(k)\right)\geq 0,$$

and $\lim_{k\to\infty}\psi(k)=0$, then function

$$C(t)=\sum_{k=1}^{\infty}\psi(k)\cos kt$$

goes down $t\in[0;\pi]$.

Lemma 3. If $f(t)$ — even summable function, g_i — odd summable functions and $g_i(t)\geq 0$ at $t\geq 0,$ then

$$\max_{|\alpha_i|=1}\int_{-a}^{a}\left|f(t)+\sum_{i=1}^{m}\alpha_i g_i(t)\right|dt=\int_{-a}^{a}\left|f(t)+\sum_{i=1}^{m}g_i(t)\right|dt.$$

Lemma 4. If $g(t)$ — odd summable funcnion, f_i — even summable functions, and $f_i(t)\leq 0$, at $t\in[0;C]$; $f_i(t)\geq 0$, at $t\in[C;a]$, $i=\overline{1,m}$, then

$$\max_{|\alpha_i|=1}\int_{-a}^{a}\left|\sum_{i=1}^{m}\alpha_i f_i(t)+g(t)\right|dt=\int_{-a}^{a}\left|\sum_{i=1}^{m}f_i(t)+g(t)\right|dt.$$

Lemma 5. Let $g_i(t)$ — odd functions and $g_i(t) \ge 0$, for $t \in [0;a]$; $f_i(t)$ — even growing functions on $[0;a]$, all functions are continuous for t $\in (0;a)$, besides

$$mes\left\{t : \sum_{i=1}^{m} \alpha_i (f_i(t) + g(t)) = C\right\} = 0.$$

Then

$$\max_{|\alpha_i|=1} \int_{-a}^{a} \left| \sum_{i=1}^{m} \alpha_i (f_i(t) + g(t)) - C(\alpha) \right| dt = \int_{-a}^{a} \left| \sum_{i=1}^{m} (f_i(t) + g(t)) - C\left(\alpha^*\right) \right| dt,$$

were $C\left(\alpha^*\right)$ — constant of the best approaching in metric L of function

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i (f_i(t) + g(t))$$

on $[-a;a]$, $\alpha^* = (1,1,\ldots,1)$.

The main part.

Theorem 1. If sequences $k\psi_i(k)$ are twice monotone and infinitely small, then $\forall \varphi \in U_p^0, \forall \alpha_i \in R$

$$\sum\nolimits_{n,m} (\varphi; x; \alpha) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{m} \alpha_i f_i{}'(x) + r_n(\varphi; x), \tag{2}$$

where

$$f_i{}'(x) = \frac{1}{n} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x+t) \sum_{k=1}^{\infty} k\psi_i(k) \cos\left(kt + \frac{\beta_i \pi}{2}\right) dt,$$

$$\left\| r_n(\varphi; x) \right\|_p = O\left(\sum_{i=1}^{m} \psi_i(n) \right). \tag{3}$$

Proving. According to [2, p. 52] under conditions of the theorem

$$f_i(x) - \sigma_n(f_i; x) = \frac{1}{\pi n} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x+t) \sum_{k=1}^{\infty} k\psi_i(k) \cos\left(kt + \frac{\beta_i \pi}{2}\right) dt + r_{n,i}(x), \tag{4}$$

and

$$\left| r_{n,i}(x) \right| = O(1) \varphi_i(n), \quad \varphi \in U_p^0, n \to \infty, i = \overline{1,m}. \tag{5}$$

Because

$$\frac{1}{n} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x+t) \sum_{k=1}^{\infty} k\psi_i(x) \cos\left(kt + \frac{\beta_i \pi}{2}\right) dt = f_i{}'(x),$$

then

$$\sum\nolimits_{n,m}(\varphi;x;\alpha)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m}\alpha_i f_i'(x)+\sum_{i=1}^{m}r_{n,i}(x)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m}\alpha_i f_i'(x)+r_n(x).$$

Verify the justice of the estimate (3).

It is obvious, that

$$\left\|r_n(x)\right\|_p=\sum_{i=1}^{m}\left\|r_{n,i}(x)\right\|_p.$$

According to generalized Minkovski's inequality (see, for example, [3, p. 71])

$$\left\|r_{n,i}(x)\right\|_p\le\frac{1}{\pi}\left\|\varphi\right\|_p\left\|\sum_{k=n}^{\infty}\left(1-\frac{k}{n}\right)\psi_i(k)\cos\left(kt+\frac{\beta_i\pi}{2}\right)\right\|_L.$$

As it follows from proving consequence 3.5 ([2]), if the conditions of fhe theorem are fulfilled, then for $s=1$ it is right relation

$$\left\|\sum_{k=n}^{\infty}\left(1-\frac{k}{n}\right)\psi_i(k)\cos\left(kt+\frac{\beta_i\pi}{2}\right)\right\|_L=O\left(\psi_i(n)\right).$$

So for $\varphi\in U_p^0$

$$\left\|r_n(x)\right\|_p=O\left(\sum_{i=1}^{m}\psi_i(n)\right).$$

The theorem is proved.

Consequence. If the conditions of the theorem are fulfilled, then for $\forall\alpha_i\in R$

$$\sup_{\varphi\in U_p^0}\left\|\sum\nolimits_{n,m}(\varphi;x;\alpha)\right\|_p=\frac{1}{\pi}\sup_{\varphi\in U_p^0}\left\|\sum_{i=1}^{m}\alpha_i f_i'(x)\right\|_p+0\left(\sum_{i=1}^{m}\psi_i(n)\right). \qquad (6)$$

Because

$$\sum_{i=1}^{m}\alpha_i f_i'(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(x+t)\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\sum_{k=1}^{\infty}k\psi_i(k)\cos\left(kt+\frac{\beta_i\pi}{2}\right)dt=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(x+t)\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\left(C_i(t)\cos\frac{\beta_i\pi}{2}-S_i(t)\sin\frac{\beta_i\pi}{2}\right)dt,$$

where

$$C_i(t)=\sum_{k=1}^{\infty}k\psi_i(k)\cos kt,\quad S_i(t)=\sum_{k=1}^{\infty}k\psi_i(k)\sin kt,$$

then, marking

$$F_m(t;\alpha)=\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\left(C_i(t)\cos\frac{\beta_i\pi}{2}-S_i(t)\sin\frac{\beta_i\pi}{2}\right),$$

we receive

$$\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\, f_i{}'(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(x+t)\,F_m(t;\alpha)\,dt.$$

Apply once more generalized Minkovski's inequality :

$$\left\|\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\, f_i{}'(x)\right\|_p\le\frac{1}{\pi}\left\|F_m(t;\alpha)\right\|_L.$$

That is why it is right

Theorem 2. If for some $\delta>0$ sequences $k^{1+\delta}\psi_i(k)$ are twice monotone and infinitely small , then for $\forall\alpha_i,\beta_i\in R$ and $n\to\infty$

$$\mathcal{E}_{n,m}\left(U_p^0\right)\le\frac{1}{\pi n}\max_{|\alpha_i|=1}\left\|F_m(t;\alpha)\right\|_L+O\left(\sum_{i=1}^{m}\psi_i(n)\right). \tag{7}$$

Using Lemmas 1–5, it was proved that in the case $\beta_i\in[0;1]\cup[2;3]$ $\left(i=\overline{1,m}\right)$, ore the same $\beta_i\in[1;2]\cup[3;4]\left(i=\overline{1,m}\right)$ maximum in the first element in (7) arrived at

$$\alpha_i^*=\begin{cases}1, if & \beta_i\in[0;1]\\ -1, if & \beta_i\in[2;3]\end{cases}\ \text{and}\ \alpha_i^*=\begin{cases}1,\ if & \beta_i\in[1;2]\\ -1,\ if & \beta_i\in[3;4]\end{cases}.$$

Theorem 3. If for some $\delta>0$ sequences $k^{1+\delta}\psi_i(k)$ are twice monotone and infinitely small, $\beta_i\in[0;1]\cup[2;3]$, ore the same $\beta_i\in[1;2]\cup[3;4]\left(i=\overline{1,m}\right)$, then for $n\to\infty$

$$\mathcal{E}_{n,m}\left(U_p^0\right)\ge\frac{1}{\pi n}\left\|F_m\left(t;\alpha^*\right)\right\|_L+O\left(\sum_{i=1}^{m}\psi_i(n)\right). \tag{8}$$

Proving. It is known, that

$$\|f\|_p=\sup_{\|\varphi_q\|\le1}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\varphi(t)\,dt,$$

where

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1,$$

therefore

$$\left\|\sum_{i=1}^{m}\alpha_i f_i'(x)\right\|_p = \sup_{\|h_q\|\le 1}\int_{-\pi}^{\pi}h(t)\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(x+t)F_m\left(t;\alpha^*\right)dtdx = \\ = \sup_{\|h_q\|\le 1}\int_{-\pi}^{\pi}F_m\left(t;\alpha^*\right)\int_{-\pi}^{\pi}h(t)\varphi(x+t)dxdt. \qquad (9)$$

If the terms of theorem are exequted, than

$$g(t) = sign\left(F_m\left(t;\alpha^*\right)-C\left(\alpha^*\right)\right) = signsin\left(t-\theta^*\right).$$

If

$$\varphi_s(x) = \begin{cases} \dfrac{s^2}{2}, & \left|x-\dfrac{\pi}{2}\right| \le \dfrac{1}{2s} \\ 0, & \left|x-\dfrac{\pi}{2}\right| > \dfrac{1}{2s} \end{cases}, \quad s>0,$$

$\varphi_s(x)$ — odd 2π — periodic function, $h_0(x) = signcos\left(t+\theta^*\right)$, then, as proved in [4],

$$h_0(x)*\varphi_s = g(t)+b(t),$$

where

$$|b(t)| \le 1,\ b(t) \ne 0$$

at

$$\left|t \pm \frac{\pi}{2}\right| < \frac{1}{2s}.$$

With proper choice’s conditions for s can be provided conditions $\varphi_s(x) \in U_p^0$, therefore

$$\int_{-\pi}^{\pi}F_m\left(t;\alpha^*\right)b(t)dt = O\left(\sum_{i=1}^{m}\psi_i(n)\right).$$

Then, as follows from (2), (3) and (9)

$$\mathcal{E}_{n,m}\left(U_p^0\right) \ge \frac{1}{\pi n}\sup_{\|h_q\|\le 1}\int_{-\pi}^{\pi}F_m\left(t;\alpha^*\right)\int_{-\pi}^{\pi}h(t)\varphi(x+t)dxdt + O\left(\sum_{i=1}^{m}\psi_i(n)\right) \ge \\ \ge \frac{1}{\pi n}\int_{-\pi}^{\pi}F_m\left(t;\alpha^*\right)\int_{-\pi}^{\pi}h_0(t)\varphi_s(x+t)dxdt + O\left(\sum_{i=1}^{m}\psi_i(n)\right) = \\ = \frac{1}{\pi n}\left\|F_m\left(t;\alpha^*\right)\right\|_L + O\left(\sum_{i=1}^{m}\psi_i(n)\right).$$

The theorem is proved.

From the validity of the asymptotic estimates (7) and (8) follows the following statement.

Theorem 4. Let for some $\delta > 0$ sequences $k^{1+\delta}\psi_i(k)$ are twice monotone and infinitely small, $\beta_i \in [0;1] \cup [2;3]$, ore the same $\beta_i \in [1;2] \cup [3;4] \left(i = \overline{1,m}\right)$, then for $n \to \infty$

$$\mathcal{E}_{n,m}\left(U_p^0\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi n} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \sum_{i=1}^{m} \alpha_i^* \left(C_i(t) \cos \frac{\beta_i \pi}{2} - S_i(t) \sin \frac{\beta_i \pi}{2} \right) - C\left(\alpha^*\right) \right| dt + O\left(\sum_{i=1}^{m} \psi_i(n) \right),$$

where

$$\alpha^* = signsin \frac{\beta_i \pi}{2},\ C_i(t) = \sum_{k=1}^{\infty} k\psi_i(k) \cos kt, \quad S_i(t) = \sum_{k=1}^{\infty} k\psi_i(k) \sin kt,$$

$C\left(\alpha^*\right)$ — constant of the best approaching in metric L of integral function.

Conclusions. The obtained results for the joint approximation (ψ, β) — integrals by Fejer's sums in the metric L_p can be generalize for Zygmund's sums with condition of saturation for this method.

References:

1. Stepanets A. I. Methods of approximation theory : 2 p. / A. I. Stepanets // Works of In-te of Mathematics NAS of Ukraine. — 2002 — № 40. — 427 p.
2. Bushev D. N. Approximation of classes of continuous periodic functions by Zygmund's sums / D. N. Bushev. — Kyiv, 1984. — 62 p. (Prepr. / AS USSR. In-te of Mathematics; 84.56).
3. Korneichuk N. P. Extreme problems of approximation theory / N. P. Korneichuk. — M. : Nauka, 1976. — 320 p.
4. Sorych N. M. Joint approximation of functions and their derivatives by Fejer's sums / N. M. Sorych. — Kyiv, 1985. — P. 16–26 (Prepr. / AS USSR. In-te of Mathematics; 84.27).

СУМІСНЕ НАБЛИЖЕННЯ (ψ, β) — ІНТЕГРАЛІВ СУМАМИ ФЕЙЄРА В МЕТРИЦІ Lp

Відомо, що довільній сумовній періодичній функції відповідає її ряд Фур'є. Тому природно її наближати тригонометричними многочленами , що є частинними сумами цього ряду, їх називають сумами Фур'є. Але інколи суми Фур'є даної функції дуже повільно збігаються до неї, а інколи і розбігаються (приклад неперервної функції із розбіжним в деяких точках рядом Фур'є був наведений Дюбуа-Реймондом у 1876 р.). Цей факт спонукав математиків шукати інші послідовності тригонометричних поліномів, які б збігалися до породжуючої їх функції, які б збігалися до неї рівномірно на всьому просторі. Зрозуміло, що найвдалішою в розумінні

швидкості збіжності до функції є послідовність многочленів її найкращого наближення. Але, на жаль, оператор найкращого наближення не є лінійним. Це в великій мірі ускладнює побудову многочленів найкращого наближення, а, отже, їх використання.

Якщо розглядати лише лінійні методи підсумовування рядів Фур’є, то великий клас таких методів дає матричне підсумовування. Одним з цих методів є метод Фейєра, метод середніх арифметичних перших n сум Фур’є.

У цій статті знайдено асимптотичні рівності при $n \to \infty$ для верхньої межі величини сумісного наближення сумами Фейєра порядку n функцій, що мають похідну в сенсі Степанця, у випадку досягнення насиченості в метриці простору сумовних в p-тому степені функцій. При цьому виділено головний член асимптотичного розкладу та вказано порядок залишкового члена.

Ключові слова: *суми Фейєра, сумісне наближення, похідна в сенсі Степанця, інтегральна метрика.*

Отримано: 14.08.2019

УДК 621.315+539.1
DOI: 10.32626/2308-5878.2019-20.100-107

Н. Л. Сосницька, д-р пед. наук, професор,
В. І. Кравець, канд. фіз.-мат. наук,
М. В. Морозов, канд. фіз.-мат. наук,
Г. О. Онищенко, аспірант,
Л. В. Халанчук, аспірант

Таврійський державний агротехнологічний університет, м. Мелітополь

МОДЕЛЮВАННЯ СТАНУ ЕЛЕКТРОНІВ У КОНІЧНИХ КВАНТОВИХ ТОЧКАХ

Розглядається рівняння Шредінгера для стаціонарних станів електронів (носіїв електричного заряду) у конічній квантовій точці (ККТ). Отримані хвильові функції, щільність ймовірності, хвильові числа і власні значення енергії для S — електронів та вивчена їх залежність від параметрів ККТ: діаметра основи D та висоти H. Використовується циліндрична система координат та метод Фур’є розділення змінних. Крім того, розглянуто наближення Вентцеля-Крамерса-Брилюєна (ВКБ — метод) для визначення власних значень енергії електрона. Використана умова нормування хвильової функції та отримано значення амплітуди хвильової функції для стаціонарних станів електрона. Для випадку ККТ власна енергія електрона стаціонарного стану у наближенні ефективної маси залежить від координати z на відміну від циліндричної квантової точки. Розглянуто максимально і мінімально допустимі значення координати z та відповідні значення власної енергії основного стану