

high-order Runge-Kutta methods for the purposes of modeling the dynamics of the studied systems in real time. Accordingly, with regard to quadrature methods, the problem of formalizing the construction is not solved in general. Thus, the task of selecting the optimal method can be formulated as follows: to determine the numerical method for the modeled object's dynamics equations' integration, for which the required speed of the control system can be achieved, and the error of solving the dynamics equations does not exceed the specified value. The analysis of the properties of different groups of numerical methods is carried out, which makes it possible to conclude that in choosing the best method the initial set of the required methods should be formed based on the single-step methods of the Runge-Kutta type and the quadrature methods no higher than the fourth order. In implementing stationary modes, the initial group of methods should also include the multi-step methods — explicit and the «forecast-correction» type.

**Key words:** *numerical methods, mathematical model, computational algorithm, differential equations.*

Отримано: 24.09.2020

УДК 004.94:51-7

DOI: 10.32626/2308-5878.2020-21.42-53

**Д. А. Верлань\***, канд. техн. наук,

**В. А. Іванюк\*\***, д-р техн. наук,

**О. О. Фомін\*\*\***, д-р техн. наук

\* ТОВ «Науково-виробниче підприємство «ІНФОТЕХ», м. Київ,

\*\* Кам'янець-Подільський національний університет

імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський,

\*\*\* Одеський національний політехнічний університет, м. Одеса

## ІНТЕГРАЛЬНІ ДИНАМІЧНІ МОДЕЛІ В ЗАДАЧАХ ІДЕНТИФІКАЦІЇ І ДІАГНОСТИКИ

У роботі розглянуто модельний підхід для розв'язання задачі діагностики і контролю динамічних об'єктів на основі застосування інтегральних рівнянь. Зростаюча складність енергетичних об'єктів, врахування їх динамічних властивостей, підвищення вимог до точності та об'єктивності прийнятих рішень призводять до необхідності розробки нових ефективних алгоритмів математичного забезпечення систем обробки діагностичної інформації, які б дозволили забезпечити зазначені вимоги і автоматизувати процес контролю силових установок.

У цей час в технічній діагностиці розвивається напрям, що ґрунтується на відновленні моделі (оператора) з метою діагностики. Звичайно передбачається, що несправності змінюють тільки параметри моделі об'єктів контролю, які при діагностуванні оцінюються методами параметричної ідентифікації, але можливі ви-

падки, коли потрібно враховувати і зміни структури об'єкту. Реальні об'єкти, як правило, одночасно володіють і нелінійними і динамічними властивостями. Тому, як інформативний опис об'єктів контролю невідомої структури доцільно використовувати нелінійні непараметричні динамічні моделі на основі інтегρο-степеневих рядів Вольтерри, які характеризують властивості об'єкта контролю (його стан) у вигляді послідовності інваріантних до виду вхідного сигналу багатовимірних вагових функцій — ядер Вольтерри. Застосування моделей на основі рядів Вольтерри дозволяє повно і точно врахувати нелінійні і інерційні властивості об'єкта контролю, робить процедуру модельної діагностики більш універсальною, підвищує надійність діагнозу.

**Ключові слова:** діагностика, контроль, нелінійні об'єкти, динаміка, інтегральні рівняння.

**Вступ.** В залежності від виду об'єкта і степеня адекватності відповідної йому математичної моделі, рівняння, якими описується об'єкт можуть бути звичайними диференціальними, одновимірними або багатовимірними інтегральними, інтегρο-диференціальними рівняннями, операторними, диференціальними рівняннями з частинними похідними і т.д. В загальному випадку ці рівняння є неоднорідними, так як включають в себе функції різних зовнішніх і внутрішніх збуджень, що діють на систему.

Для опису нелінійних динамічних об'єктів з невідомою структурою (типу «чорний ящик») використовують ряд Вольтерри (РВ) [3-7], який при багатьох функціональних аргументах  $x_1(t), \dots, x_\nu(t)$  — вхідних впливів, має вигляд:

$$\begin{aligned}
 y_j(t) = & \sum_{i_1=1}^{\nu} \int_0^t w_{i_1}^j(\tau) x_{i_1}(t-\tau) d\tau + \\
 & + \sum_{i_1=1}^{\nu} \sum_{i_2=1}^{\nu} \int_0^t \int_0^t w_{i_1 i_2}^j(\tau_1, \tau_2) x_{i_1}(t-\tau_1) x_{i_2}(t-\tau_2) d\tau_1 d\tau_2 + \\
 & + \sum_{i_1=1}^{\nu} \sum_{i_2=1}^{\nu} \sum_{i_3=1}^{\nu} \int_0^t \int_0^t \int_0^t w_{i_1 i_2 i_3}^j(\tau_1, \tau_2, \tau_3) x_{i_1}(t-\tau_1) x_{i_2}(t-\tau_2) x_{i_3}(t-\tau_3) d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 + \dots, \\
 & j = \overline{1, \mu},
 \end{aligned} \tag{1}$$

де  $y_j(t)$  — відгук об'єкта на  $j$ -ому виході в даний момент часу  $t$  при нульових початкових умовах;  $w_{i_1 i_2 \dots i_n}^j(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n)$  — ядра Вольтерри  $n$ -го порядку по  $i_1, i_2, \dots, i_n$  входах і  $j$ -му виходу, симетричні щодо дійсних змінних  $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$  функції;  $\nu, \mu$  — кількість входів і виходів відповідно.

Застосування моделей на основі РВ в діагностичних дослідженнях [1-3] пояснюється його принципово важливими перевагами: яв-

ними співвідношеннями між вхідними та вихідними змінними; універсальністю — можливістю дослідження нелінійних неперервних в часі та імпульсних систем, стаціонарних і нестаціонарних; одночасним і компактним урахуванням нелінійних та інерційних (динамічних) властивостей об'єкта.

Ефективність застосування методів розпізнавання образів для непрямого контролю і діагностики стану об'єктів в основному залежить від інформативності використовуваної сукупності параметрів (ознак). Якщо вибрані параметри досить повно характеризують внутрішню структуру об'єкта діагностування, то об'єкти, будучи ідентичними за структурою, відобразяться в просторі цих параметрів у вигляді щільної множини точок. Об'єктам з особливостями структури (дефектним) будуть відповідати точки, що відхиляються від цієї щільної множини.

У задачах модельної діагностики адекватність моделі об'єкта контролю (ОК) слід розуміти не в сенсі точності опису відгуку об'єкта, а в сенсі інформативності її з точки зору достовірного (надійного) розпізнавання стану об'єкта. При використанні ядер Вольтерри (ЯВ) як джерела діагностичної інформації про ОК необхідно забезпечити в першу чергу високу точність оцінки багатовимірних ЯВ малих порядків, що часто на практиці виявляється достатнім для побудови ефективної системи, що розпізнає.

Висока точність оцінювання ядер досягається застосуванням запропонованих в роботах завадостійких методів детермінованої ідентифікації [8-11].

**Методи редукції діагностичних моделей, які формуються на основі вихідного опису об'єктів контролю у вигляді ядер Вольтерри.** Запропонована інформаційна технологія непрямого контролю і діагностики нелінійних динамічних об'єктів заснована на непараметричній ідентифікації ОК з використанням ЯВ і полягає в послідовному вирішенні наступних завдань.

Ідентифікація ОК. Мета — отримання інформаційної моделі ОК у вигляді ЯВ. Етапи реалізації: подача тестових сигналів на входи ОК; вимір відгуків на них; визначення ЯВ на основі даних експерименту «вхід-вихід».

Побудова діагностичної моделі ОК. Мета — формування простору ознак. Етапи реалізації: стиснення ЯВ; визначення діагностичної цінності ознак; вибір оптимальної системи ознак — редукція діагностичної моделі.

Побудова класифікатора станів ОК. Мета — побудова сімейства вирішальних правил оптимальної класифікації. Етапи реалізації: побудова вирішальних правил — навчання; оцінка достовірності класифікації — іспит; оптимізація діагностичної моделі.

Діагностика ОК. Мета — оцінка стану ОК. Етапи реалізації: ідентифікація ОК; оцінка діагностичних ознак; розпізнавання — віднесення ОК до певного класу.

Застосування даного методу модельної діагностики пов'язане з розв'язанням задачі параметризації багатовимірних функцій ЯВ [11-13]. При побудові діагностичної моделі виділяють три рівні опису [14]:

1. Вихідний рівень, на якому функції  $w_k(\tau_1, \dots, \tau_k)$ , отримані в результаті ідентифікації ОК, розглядаються як єдине ціле.
2. Рівень вихідних ознак, на якому функція  $w_k(\tau_1, \dots, \tau_k)$  представляється вектором  $x = (x_1, \dots, x_n)'$ . Інформативні прикмети можуть бути отримані за допомогою попереднього перетворення  $T_j: C[a, b] \rightarrow R^n$ , ( $j = 1, \dots, n$ ):  $x_j = T_j(w_k(\tau_1, \dots, \tau_k))$ . В якості оператора  $T_j$  можуть застосовуватися ортогональні розкладання і інтегральні перетворення ЯВ у вектори коефіцієнтів базисних функцій [15, 16]. У простому випадку оператор  $T_j$  є оператором дискретизації  $x_j = w_k(t_j, \dots, t_j)$ ,  $t_j = j\Delta t$  ( $\Delta t$  — крок дискретизації).
3. Рівень перетворених ознак, що отримуються в результаті реалізації обраного ортогонального перетворення  $L: R^n \rightarrow R^m$  ( $m \leq n$ ), що забезпечує скорочення розмірності простору ознак. При цьому вирішується задача мінімізації кількості вторинних ознак при максимальному збереженні інформації, що міститься у вихідному описі ОК. Оптимальним у цьому сенсі є розкладання Карунена-Лоєва [17].

Застосовуються різні способи формування вектора діагностичних ознак на основі діагональних перерізів багатовимірних ЯВ: вибірка відліків ЯВ ( $V_k$ ), евристичні ознаки ( $E_k$ ), моменти ( $M_k$ ), Фур'є-образи ( $AF_k$  і  $PF_k$ ), вейвлет-перетворення ( $W_k$ ) і розкладання Карунена-Лоєва ( $KL_k$ ). Представлені результати досліджень діагностичної цінності (інформативності) різних систем ознак у сенсі критерію — максимальної ймовірності правильного розпізнавання ( $P_{\max}$ ), що реалізовується побудованою системою розпізнавання на підмножині  $\mathbf{X}'$  із заданої множини ознак  $\mathbf{X}$  ( $\mathbf{X}' \in \mathbf{X}$ ) в обраній системі ознак.

Використовуються системи ознак:

1. Вибірki відліків ( $V_k$ ) діагональних перетинів ЯВ  $w_k(t, \dots, t)$  порядків  $k = 1, 2, 3$  із заданою дискретністю.
2. Евристичні ознаки ( $E$ ): максимум модуля діагонального перерізу  $k$ -мірного ЯВ, точка екстремуму  $t_{max}$ , похідна функції  $w_k(t, \dots, t)$  в точці  $t = 0$ , інтеграл модуля функції перерізу ЯВ, тривалість перерізу процесу  $t_{nn}$ .
3. Момент  $\mu^k(M_k)$  порядків  $r = \overline{0, 3}$  для перерізів ЯВ порядку  $k$ :

$$\mu_{ij\dots l}^k = \int_0^\infty \int_0^\infty \dots \int_0^\infty \tau_1^i \tau_2^j \dots \tau_k^l \omega_k(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k) d\tau_1 d\tau_2 \dots d\tau_k, \dots$$

$$i, j, \dots, l = 0, 1, \dots; i + j + \dots + l = r.$$

4. Частотні характеристики — дискретні значення багатовимірних амплітудно-частотної  $A_k(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k)$  (AF) і фазо-частотної  $\varphi_k(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k)$  (PF) характеристик, які представляють собою відповідно модуль та фазу багатовимірного перетворення Фур'є ЯВ  $k$ -го порядку  $W_k(j\omega_1, j\omega_2, \dots, j\omega_k)$ :

$$A_k(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k) = W_k(j\omega_1, j\omega_2, \dots, j\omega_k), \quad (2)$$

$$\varphi_k(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k) = \arctg \frac{\text{Im}(W_k(j\omega_1, j\omega_2, \dots, j\omega_k))}{\text{Re}(W_k(j\omega_1, j\omega_2, \dots, j\omega_k))}. \quad (3)$$

5. Коефіцієнти розкладання Карунена-Лоева (KL $_k$ )  $c_1, c_2, \dots, c_m$  для перерізів ЯВ порядків  $k = 1, 3$ , які визначаються за формулою:  $c_i = \Phi'x_i$ , де  $c_i = (c_{i1}, c_{i2}, \dots, c_{im})'$  — вектор-стовпець коефіцієнтів розкладання Карунена-Лоева для  $i$ -го класу ( $i = 1, 2, \dots, M$ );  $x_i$  — вектор початкових ознак  $i$ -го класу розмірністю  $n$ ;  $\Phi = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m)$  — матриця перетворення розмірністю  $n \times m$  ( $m < n$ ), в якості стовпців якої вибираються  $m$  нормованих власних векторів  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m$ , що відповідають найбільшим характеристичним числам кореляційної матриці  $R = \sum_{i=1}^M p(\omega_i) E\{x_i x_i'\}$ , тут  $p(\omega_i)$  — апіорна ймовірність появи  $i$ -го класу  $\omega_i$ , а  $E\{x_i x_i'\}$  — оператор математичного очікування, який обчислюється по всіх спостереженнях, що відносяться до  $i$ -го класу.
6. Коефіцієнти вейвлет-перетворень ( $W_k$ ) перетинів ЯВ  $k$ -го порядку, які обчислюються за формулою:

$$C(a, b) = \int_0^\infty w_n(t, t, \dots, t) a^{-1/2} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) dt, \quad (4)$$

тут  $\psi(t)$  — функція перетворення (материнський вейвлет),  $a$  і  $b$  — відповідно параметри масштабу і зсуву вейвлета [18]. Як базисний тут використовується вейвлет *coiflet*.

Інтегральні рівняння можуть бути отримані або безпосередньо за структурою динамічної системи за ваговими і нелінійними характеристиками елементів, або шляхом еквівалентних, або наближених перетворень диференціальних або інтегро-диференціальних рівнянь, записаних на основі фізичних законів.

**Побудова обчислювальних алгоритмів для параметричної ідентифікації лінійних інтегральних динамічних моделей, які описують динамічні об'єкти із зосередженими параметрами.** Для таких об'єктів модель має вигляд

$$a_1(t)y(t) + \int_{G_1(t)} K_1(t, \tau)y(\tau)d\tau + l(t) = a_2(t)f(t) + \int_{G_2(t)} K_2(t, \tau)y(\tau)d\tau, \quad (5)$$

де  $a_i(t)$ ,  $\int_{G_i(t)} K_i(t, \tau) y(\tau) d\tau$ ,  $l(t)$ ,  $i = 1, 2$  — параметри, що підлягають

визначенню;  $y(t)$  і  $f(t)$  — відповідно вихідний і вхідний сигнали.

Найпростіший алгоритм для обчислення невідомих параметрів в (5) можна отримати, припускаючи, що моменти вимірювання  $t_i$  і  $\tau_i$  сигналів  $f(t)$  і  $y(t)$  співпадають;  $t_i = \tau_i, i = \overline{1, N}$ , де  $N = N_y = N_f$ , і використовуємо для обчислення інтегралів квадратурні формули виду

$$\int_0^{t_i} x(\tau) d\tau = \sum_{j=0}^{N_i} w_{ij} x(t_j) + r_i[x], N_i = \overline{1, N}, i = \overline{1, N}, \quad (6)$$

де  $w_{ij}$  — міра,  $t_i = \tau_i$  — вузли,  $r_i[x]$  — залишковий член квадратурної формули,  $N = N_y = N_f$ .

Суть квадратурного алгоритму розрахунку параметрів моделі (5) полягає в тому, що розрахункові вирази в ньому формуються на основі дискретизації інтегралів за допомогою квадратурних формул виду (6) з відкиданням залишкових членів. Дискретизуючи попередню модель (5) в точках  $t_i, i = \overline{0, N}$ , отримуємо згідно (6) наступну систему з  $N + 1$ -го лінійного алгебраїчного рівняння відносно невідомих параметрів:

$$\begin{aligned} a_1 y(0) + l(0) &= a_2(0) \tilde{f}(0), \\ a_1(t_i) \tilde{y}(t_i) + \sum_{j=0}^{n_i} w_{ij} K_1(t_i, t_j) \tilde{y}(t_j) + l(t_i) &= \\ &= a_2(t_i) \tilde{f}(t_i) + \sum_{j=0}^{M_i} w_{ij} K_2(t_i, t_j) \tilde{f}(t_j), M_i, N_i = \overline{1, N}. \end{aligned} \quad (7)$$

За відсутності якої-небудь додаткової інформації про невідомі параметри  $a_v(t_i)$ ,  $K_v(t_i, t_j)$ ,  $l(t_i)$ ,  $v = \overline{1, 2}$  в системі (7) буде  $2(N + 1)(N + 3)$  невідомих, тобто в цьому випадку виникають труднощі розв'язання несумісної СЛАР. Уникнути це можна, припустивши, наприклад, що невідомі параметри в (2) мають поліноміальний вигляд, тобто

$$a_v(t) = \sum_{k=1}^{m_v} a_{vk} \rho_{vk}(t), \quad (8)$$

$$k_v(t, \tau) = \sum_{k=1}^{p_v} \sum_{s=1}^{Q_v} c_{vrs} \varphi_{or}(t) \psi_{vs}(\tau), \quad (9)$$

$$L(t) = \sum_{k=1}^l \lambda_k \xi_k(t), \quad (10)$$

де  $a_{vk}$ ,  $\lambda_{vk}$ ,  $c_{vrs}$  — невідомі сталі коефіцієнти, а  $\{\rho_{vk}\}_{k=1}^{m_v}$ ,  $\{\xi_k\}_{k=1}^l$ ,  $\{\varphi_{vk}\}_{k=1}^{p_v}$ ,  $\{\psi_{vs}\}_{s=1}^{Q_v}$  — системи лінійно незалежних функцій,  $v = \overline{1, 2}$ .

Якщо

$$N = m = m_1 + m_2 + l_1 + l_2 + P_1 Q_1 + P_2 Q_2 - 1, \quad (11)$$

то число рівнянь в (8) дорівнюватиме числу невідомих. Звичайно, при цьому залишаються відкритими такі питання: вибору функцій  $P_{vk}, \varphi_{vk}, \psi_{vk}, \xi_k$ , існування та єдиності розв'язку СЛАР (7), а також питання про вплив похибок на точність розрахунку невідомих параметрів. Ці питання певною мірою можуть бути вирішені в частинному, але досить важливому випадку, коли шукані параметри  $a_v(t), l(t), k_v(t, \tau)$  визначаються наступними співвідношеннями:

$$a_1(t) \equiv 1, a_2(t) \equiv 0; \quad (12)$$

$$k_1(t, \tau) = k(t - \tau) = \sum_{j=1}^m q_j \frac{(t - \tau)^{j-1}}{(j-1)!}, m \in N; \quad (13)$$

$$k_2(t, \tau) = \frac{(t - \tau)^{m-1}}{(m-1)!}, \quad (14)$$

$$l(t) = \sum_{j=1}^{m-1} (c_j \frac{t^j}{j!} + q_j \sum_{k=0}^{m-j-1} c_k \frac{t^{k+j}}{(k+j)!}), \quad (15)$$

де  $q_i$  — невідомі, а  $c_i$  — відомі сталі величини.

Розглянемо випадок стаціонарного динамічного об'єкта. Нехай стаціонарний об'єкт описується диференціальним рівнянням вигляду

$$u^{(m)}(t) + p_1 u^{(m-1)}(t) + \dots + p_m u(t) = f(t), u^{(i-1)}(0) = C_i, i = \overline{1, m}, \quad (16)$$

де  $C_i$  — відомі величини (початкові умови),  $u(t), f(t)$  — відповідно вхідний і вихідний сигнали,  $p_i$  — параметри, що ідентифікуються.

Методом послідовного інтегрування рівняння (16) перетвориться до еквівалентного інтегрального рівняння Вольтерри II-го роду

$$u(t) + \int_0^t K(t, s) u(s) ds = F(t), t \in [0, T], \quad (17)$$

де

$$K(t, s) = \sum_{i=1}^m p_i \frac{(t-s)^{i-1}}{(i-1)!}, m \in N, \quad (18)$$

$$F(t) = \int_0^t \frac{(t-s)^{m-1}}{(m-1)!} f(s) ds + \sum_{i=1}^{m-1} C_i \frac{t^i}{i!} + \sum_{i=1}^{m-1} p_i \sum_{k=0}^{m-i-1} C_k \frac{t^{k+i}}{(k+i)!}. \quad (19)$$

Для формування системи лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР) відносно невідомих коефіцієнтів  $p_i, i = \overline{1, m}$ , рівняння (17) з урахуванням (18) і (19) запишемо у вигляді

$$\sum_{i=1}^{m-1} p_m \left[ \int_0^t \frac{(t-s)^{i-1}}{(i-1)!} u(s) ds - \sum_{k=0}^{m-i-1} C_k \frac{t^{k+i}}{(k+i)!} \right] = \int_0^t \frac{(t-s)^{m-1}}{(m-1)!} f(s) ds - u(t) + \sum_{i=0}^{m-1} C_i \frac{t_i}{i!}. \quad (20)$$

Розбивши період вимірювань на  $N$  точок з кроком  $h = \frac{T}{N}$  отримуємо СЛАР відносно невідомих коефіцієнтів  $p_i$

$$\sum_{i=1}^m A_{ji} p_i = F_j, \quad i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, N}, \quad (21)$$

де

$$A_{ji} = \int_0^{t_j} \frac{(t_j - s)^{i-1}}{(i-1)!} u(s) ds - \sum_{k=0}^{m-i-1} C_k \frac{t_j^{k+i}}{(k+i)!}, \quad i = \overline{1, m-1}, \quad (22)$$

$$A_{jm} = \int_0^{t_j} \frac{(t_j - s)^{m-1}}{(m-1)!} u(s) ds,$$

$$F_j = \int_0^{t_j} \frac{(t_j - s)^{m-1}}{(m-1)!} f(s) ds - u(t) + \sum_{i=1}^{m-1} C_i \frac{t_j^i}{i!}. \quad (23)$$

Для обчислення інтегралів у виразах (22) і (23) можуть бути використані різні квадратурні формули, зокрема формула трапецій.

У загальному випадку СЛАР (21) є несумісною і для її вирішення необхідно використовувати спеціалізовані методи, наприклад метод найменших квадратів.

Розглянемо приклади розв'язання ряду тестових завдань з використанням описаного методу.

*Приклад 1.* Вхідний сигнал:  $u(t) = 1 - e^{-2t}$ ,  $t \in [0; 2]$ ,  $h = 0.01$ . Вихідний сигнал:  $f(t) = -14e^{-2t} - 0.2$ . Початкові умови:  $C_1 = 0, C_2 = 2, C_3 = -4, C_4 = 8, C_5 = -16$ .

*Задача:* визначити коефіцієнти  $p_i$  еквівалентного диференціального рівняння

$$u^{(5)}(t) + p_1 u^{(4)}(t) + p_2 u^{(3)}(t) + p_3 u^{(2)}(t) + p_4 u^{(1)}(t) + p_5 u(t) = f(t), \quad u^{(i-1)}(0) = C_i, \quad i = \overline{1, 5}. \quad (24)$$

Точний розв'язок:  $p_1 = 1.2, p_2 = -2, p_3 = 3.1, p_4 = 0.7, p_5 = -0.2$ .

Використовуючи вирази (21)-(23) і квадратурну формулу трапецій для апроксимації інтегралів, що входять у вирази (22), (24),



отримуємо СЛАР відносно невідомих коефіцієнтів  $p_i$ , причому дана система є несумісною. Застосовуючи для її вирішення метод найменших квадратів, отримуємо наступні значення шуканих коефіцієнтів  $p_1 = 1.8930, p_2 = -1.8640, p_3 = 3.0249, p_4 = 5.5493, p_5 = -0.1997$ .

На рис. 1 представлено розв'язок рівняння (24) відповідно при точних значеннях коефіцієнтів (а) і при коефіцієнтах, отриманих в результаті розрахунку (б). Середньоквадратична похибка —  $\Delta = 3.4 \times 10^{-6}$ .

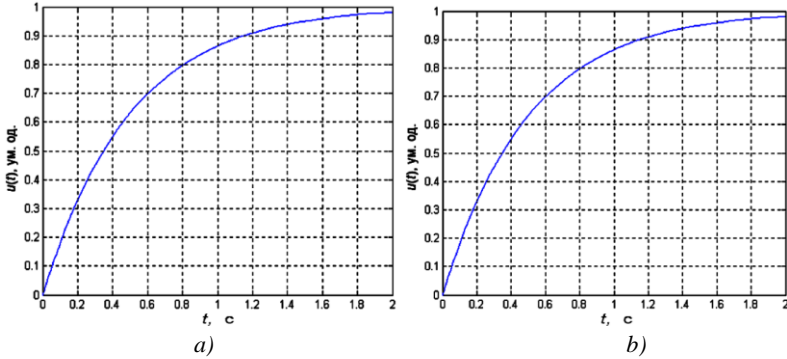


Рис. 1. Графіки розв'язку рівняння (24)

Додамо до вихідного сигналу  $f$  випадкову заваду, розподілену за нормальним законом. У табл. 1 представлені значення коефіцієнтів  $p_i$ , отримані при різних значеннях завади.

Таблиця 1

Значення коефіцієнтів  $p_i$

Величина завади у % від вихідного сигналу	Середньоквадратична похибка	$p_1$	$p_2$	$p_3$	$p_4$	$p_5$
1	$4 \times 10^5$	2.01	-2.19	5.16	12.09	-0.20
5	$8.8 \times 10^{-4}$	-4.77	4.04	8.09	-61.30	-0.21
10	$3.1 \times 10^{-5}$	41.17	-36.85	-15.41	422.95	-0.25

Приклад 2. Вхідний сигнал:  $u(t) = e^{1-t} + 1$ . Вихідний сигнал:  $f(t) = -0.5e^{1-t} - 1$ . Початкові умови:  $C_1 = 3.7183, C_2 = -2.7183, C_3 = 2.7183$ .

Задача: визначити коефіцієнти  $p_i$  еквівалентного диференціального рівняння

$$u'''(t) + p_1 u''(t) + p_2 u'(t) + p_3 u(t) = f(t), u^{i-1} = C_i, i = \overline{1,3}.$$

Точний розв'язок:  $p_1 = 2, p_2 = 0.5, p_3 = -1$ .

У табл. 2 представлені значення коефіцієнтів  $p_i$ , отримані при різних значеннях завади.

Таблиця 2

Значення коефіцієнтів  $p_i$ 

Величина завади у % від вихідного сигналу	Середньо квадратична похибка	$p_1$	$p_2$	$p_3$
0	$1.7 \times 10^{-6}$	1.25	-0.25	-1.00
1	$1.2 \times 10^{-5}$	0.20	-1.30	-1.00
5	$2.8 \times 10^{-5}$	6.94	5.45	-0.99
10	$1.7 \times 10^{-4}$	4.28	2.79	-0.99

*Приклад 3.* Вхідний сигнал:  $u(t) = t^3$ . Вихідний сигнал:  $f(t) = -t^3 + 1.5t^2 + 12t + 6$ . Початкові умови:  $C_1 = 0, C_2 = 0, C_3 = 0$ .

*Задача:* визначити коефіцієнти  $p_i$  еквівалентного диференціального рівняння

$$u'''(t) + p_1 u''(t) + p_2 u'(t) + p_3 u(t) = f(t), u^{i-1} = C_i, i = \overline{1,3}.$$

Точний розв'язок:  $p_1 = 2, p_2 = 0.5, p_3 = -1$ .

У табл. 3 представлені значення коефіцієнтів  $p_i$ , отримані при різних значеннях завади.

Таблиця 3

Значення коефіцієнтів  $p_i$ 

Величина завади у % від вихідного сигналу	Середньо квадратична похибка	$p_1$	$p_2$	$p_3$
0	$5.9 \times 10^{-6}$	1.9996	0.5014	-1.0018
1	$1.3 \times 10^{-4}$	1.9799	0.5880	-1.1251
5	$1.0 \times 10^{-3}$	2.0496	0.3675	-0.8863
10	$8.6 \times 10^{-4}$	1.8763	1.1025	-1.8252

**Висновки.** На підставі результатів дослідження можна зробити висновок про такі важливі особливості й переваги інтегрального методу, як його висока стійкість, ефективність в сенсі витрат машинно-

го часу та обсягу обчислень, простота реалізації. Отже, інтегральний метод може бути ефективно використаний при розв'язуванні задач параметричної ідентифікації, які характеризуються наявністю похибок у вихідних даних.

### Список використаних джерел:

1. Матвійчук Я. М. Математичне моделювання динамічних систем: теорія і практика. Львів: Видавничий центр ЛНУ ім. І. Франка, 2000. 215 с.
2. Katipamula S., Brambley M. R. Methods for Fault Detection, Diagnostics, and Prognostics for Building Systems — A Review, Part I. *HVAC&R RESEARCH*. 2005. Vol. 11. № 1. P. 3-25.
3. Patton R. J., Fantuzzi C., Simani S. Model-Based Fault Diagnosis in Dynamic Systems Using Identification Techniques. New-York: Springer-Verlag, 2003.
4. Попов В. Н., Колесников И. М., Зобков А. Л., Жебрак Л. М. Применение функционального описания Вольтерры для контроля датчиков навигационных систем. *Контроль. Диагностика*. 1999. № 11. С. 3-7.
5. Пупков К. А., Егупов Н. Д. Методы классической и современной теории автоматического управления. Статистическая динамика и идентификация систем автоматического управления: учебник для ВУЗов. В 5 т. Т. 2, 2-е изд., перераб. и доп. Москва: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2004. 638 с.
6. Попков Ю. С., Киселев О. Н., Петров Н. П., Шмульян Б. Л. Идентификация и оптимизация нелинейных стохастических систем. Москва: Энергия, 1976. 440 с.
7. Пупков К. А., Капалин В. И., Ющенко А. С. Функциональные ряды в теории нелинейных систем. Москва: Наука, 1976. 448 с.
8. Форсайт Дж. Машинные методы математических вычислений. Москва: Мир, 1977. 279 с.
9. Апарцин А. С., Солодуша С. В. О математическом моделировании нелинейных динамических систем рядами Вольтерры. *Электронное моделирование*. 1999. № 2. С. 3-12.
10. Павленко В. Д. Идентификация нелинейных динамических систем в виде ядер Вольтерры на основе данных измерений импульсных откликов. *Электронное моделирование*. 2010. Т. 32. № 3. С. 3-18.
11. Павленко С. В. Применение вейвлет-фильтрации в процедуре идентификации нелинейных систем на основе моделей Вольтерры. *Восточно-европейский журнал передовых технологий*. Харьков, 2010. № 6/4 (48). С. 65-70.
12. Павленко В. Д. Информационная технология косвенного контроля и диагностики динамических объектов на основе моделей Вольтерры. *Труды Одесск. политехн. ун-та*. Одесса, 2008. Вып. 2 (30). С. 194-199.
13. Pavlenko V., Fomin A. Methods For Black-Box Diagnostics Using Volterra Kernels. *ICIM 2008: Proceedings 2nd International Conference on Inductive Modelling*, September 15-19, 2008, Kyiv, Ukraine. P. 104-107.
14. Павленко В. Д., Павленко С. В. Вычислительный интеллект и информационная оптимизация систем диагностирования состояний непрерывных объектов. *Вычислительный интеллект (результаты, проблемы, перспективы)*: материалы 1-й Международной научно-технической конференции (10-13 мая 2011 г., Черкассы). Черкассы: Маклаут, 2011. С. 113-114.

15. Епифанов С. В., Кузнецов Б. И., Богаенко И. И. и др Синтез систем управления и диагностирования газо-турбинных двигателей. Киев: Техника, 1998. 312 с.
16. Ранченко Г. С., Миргород В. Ф., Бевзюк А. А. Исследование системы управления расходом топлива авиационного двигателя с цифровым логико-динамическим регулятором. *Труды Одесского национального политехнического университета*. 2004. Вып. 2 (22). С. 163-168.
17. Верлань А. Ф., Игнатченко А. А., Олецкий А. В. Построение математических моделей непрерывных сигналов на основе интегрального преобразования Карунена-Лоэва. *Электронное моделирование*. 1992. № 2. С. 3-7.
18. Фукунага К. Введение в статистическую теорию распознавания образов. Москва: Наука, 1970. 368 с.

### INTEGRAL DYNAMIC MODELS IN IDENTIFICATION AND DIAGNOSTICS PROBLEMS

The paper considers a model approach to solving the problem of diagnostics and control of dynamic objects based on the application of integral equations. The growing complexity of energy facilities, taking into account their dynamic properties, increasing requirements for accuracy and objectivity of decisions lead to the need to develop new effective algorithms for mathematical software for diagnostic information processing systems to meet these requirements and automate the process of controlling power plants.

Currently, the direction based on the restoration of the model (operator) for diagnostic purposes is being developed in technical diagnostics. It is generally assumed that faults change only the parameters of the model of objects of control, which are evaluated by diagnostic methods of parametric identification, but there may be cases when you need to take into account changes in the structure of the object. Real objects, as a rule, have both nonlinear and dynamic properties. Therefore, as an informative description of the objects of control of unknown structure, it is expedient to use nonlinear nonparametric dynamical models based on integer-degree Volterra series, which characterize the properties of objects of control (its state) as a sequence of multidimensional weight functions — Volterra kernels. The use of models based on Volterra kernels allows you to fully and accurately take into account the nonlinear and inertial properties of objects of control, makes the procedure of model diagnostics more universal, increases the reliability of the diagnosis.

**Key words:** *diagnostics, control, nonlinear objects, dynamics, integral equations.*

Отримано: 29.09.2020