УДК 518.968
DOI: 10.32626/2308-5878.2020-21.62-68

К. Г. Геселева, аспірант,
С. О. Кріль, канд. фіз.-мат. наук

Кам'янець-Подільський національний університет
імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський

ЗАСТОСУВАННЯ КОЛОКАЦІЙНО-ІТЕРАТИВНОГО МЕТОДУ ДО НЕЛІНІЙНИХ ІНТЕГРО-ФУНКЦІОНАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

У статті досліджується питання застосування колокаційно-ітеративного методу [1, 3] до одного типу нелінійного інтегро-функціонального рівняння. Вказано умови, які гарантують існування єдиного розв'язку такого рівняння. Приведена основна схема методу та вказано умови, при виконанні яких цей метод буде збіжним. При обґрунтуванні методу використовується той факт, що вихідне нелінійне інтегро-функціональне рівняння можна звести до нелінійного інтегрального рівняння, ядра інтегральних операторів якого записуються в явному вигляді.

Також важливим моментом при обґрунтуванні є те, що колокаційно-ітеративний метод можна трактувати як частковий випадок проекційно-ітеративного методу. Застосування останнього до різних типів нелінійних операторних рівнянь систематично досліджувалось у роботах А. Ю. Лучки та його учнів.

Суттєвою особливістю досліджуваного у роботі методу є те, що на кожному кроці ітерації потрібно розв'язувати системи нелінійних алгебраїчних чи трансцендентних рівнянь, що є основною технічною складністю цього процесу. Але задача відшукання розв'язків таких систем є простішою, ніж розв'язування вихідного нелінійного інтегро-функціонального рівняння.

У роботі показано, що метод послідовних наближень та метод колокації розв'язання вихідного нелінійного рівняння можна розглядати як часткові випадки колокаційно-ітеративного методу.

Крім основного алгоритму методу приведено його обчислювальну схему, яка є більш зручною для безпосередніх обрахунків ніж сам метод і яку при необхідності можна успішно реалізувати на комп'ютері, створивши для цього відповідну програму.

Ключові слова: *нелінійне інтегро-функціональне рівняння, нелінійне інтегральне рівняння, колокаційно-ітеративний метод, метод колокації, обчислювальна схема, наближений розв'язок, вузли колокації, інтегральний оператор.*

Вступ. Розглянемо нелінійне інтегро-функціональне рівняння

$$y(x)= f(x)+ p(x)y\big(h(x)\big)+\int_a^b K(x;t)y(t)dt+$$
$$+\lambda\int_a^b C(x;t)F\left(t;\int_a^b G(t;\xi)y(\xi)d\xi\right)dt, x\in[a;b], \tag{1}$$

$$y(x)=0, x\notin[a;b], \tag{2}$$

де $f(x)$ — задана, $y(x)$ — шукана функції з простору $L_2(a;b)$, λ — додатний параметр.

Відносно рівняння (1) вважатимемо, що:

1) функції $p(x)$ та $h(x)$ на проміжку $[a;b]$ задовольняють умовам

$$\left|p(x)\right|\le \overline{p}<\infty, \tag{3}$$

$h(x)$ – диференційовна на $[a;b]$ і

$$h'(x)\ge l>0, \quad x-h(x)\ge\sigma>0; \tag{4}$$

2) лінійні інтегральні оператори

$$\big(Ky\big)(x)=\int_a^b K(x;t)y(t)dt, \tag{5}$$

$$\big(Cu\big)(x)=\int_a^b C(x;t)u(t)dt, \tag{6}$$

$$\big(Gy\big)(x)=\int_a^b G(x;t)y(t)dt, \tag{7}$$

відображають простір $L_2(a;b)$ в себе і є цілком неперервними;

3) дійсна функція $F(x;z)$ змінних $x\in\left[a;b\right]$ та $z\in R$ задовольняє умову Каратеодорі та, крім того, $F(v;0)\in L_2(a;b)$ і

$$\left|F(x;u)-F(x;z)\right|\le\left|u-z\right|, \quad \forall u,z\in R, x\in[a;b]. \tag{8}$$

При таких припущеннях, як відомо [2, 4], інтегральний оператор

$$\big(By\big)(x)= f(x)+\int_a^b K(x;t)y(t)dt+\lambda\int_a^b C(x;t)F\left(t;\int_a^b G(t;\xi)y(\xi)d\xi\right)dt, \tag{9}$$

відображає простір $L_2(a;b)$ в себе і є цілком неперервним.

Колокаційно-ітеративний метод. До рівняння (1) при виконанні умови (2) застосуємо колокаційно-ітеративний метод, згідно якого наближені розв’язки будуються так:

$$
\begin{gathered}
y_k(x) - p(x) y_k(h(x)) = f(x) + \int_a^b K(x;t) z_k(t)\,dt + \\
+\lambda \int_a^b C(x;t) F\left(t; \int_a^b G(t;\xi) z_k(\xi)\,d\xi\right) dt,\ x \in [a;b],
\end{gathered} \tag{10}
$$

$$
y_k(x) = 0,\ x \notin [a;b],
$$

$$
z_k(x) = y_{k-1}(x) + w_k(x),\ k = 1,2,3,..., \tag{11}
$$

$$
w_k(x) = \int_a^b P_n(x;t)\left(y_k(t) - y_{k-1}(t)\right) dt, \tag{12}
$$

де

$$
P_n(x;t) = \sum_{m=1}^{n} \tau_m^{-1} \eta_m(x) \eta_m(t),\ \ \tau_m = \int_a^b \eta_m^2(x)\,dx. \tag{13}
$$

Система функцій $\{\eta_m(x)\}_{m=1}^{n}$ знаходиться як розв'язок системи функціональних рівнянь

$$
\begin{gathered}
\eta_m(x) - p(x)\eta_m(h(x)) = \varphi_m(x),\ x \in [a;b], \\
\eta_m(x) = 0,\ x \notin [a;b],
\end{gathered} \tag{14}
$$

причому вихідна система функцій $\{\varphi_m(x)\}$ є лінійно-незалежною та повною у просторі $L_2(a;b)$. Іншими словами, функціональні поправки $w_k(x)$ на кожному кроці ітерації шукаються у вигляді

$$
w_k(x) = \sum_{m=1}^{n} a_m^k \eta_m(x)\ .
$$

Невідомі коефіцієнти a_m^k знаходимо з умови

$$
y_k(x_i) - z_k(x_i) = 0,\ i = \overline{1,n}, \tag{15}
$$

(тут $x_i \in [a;b], i = \overline{1,n}$ — вузли колокації).

Здійснивши нескладні елементарні перетворення, приходимо до висновку, що для визначення функцій $w_k(x)$ на кожному кроці ітерації згідно формул (10)-(13) отримується деяке нелінійне інтегральне рівняння, подібне до рівняння (1), але з виродженими ядрами. Це у свою чергу дає змогу записати останнє у вигляді системи алгебраїчних чи трансцендентних рівнянь порядку n .

Обґрунтування методу. Ідея обґрунтування методу (10)-(15) полягає у тому, що вихідне рівняння (1) з урахуванням умови (2) можна звести до нелінійного інтегрального рівняння вигляду

$$u(x) = f(x) + \int_a^b T(x;t)u(t)\,dt + \lambda \int_a^b C(x;t)F\left(t; \int_a^b H(t;\xi)u(\xi)d\xi\right)dt, \quad (16)$$

складові елементи якого задовольняють умовам, аналогічним приведеним вище умовам 2), 3).

Дійсно, взявши

$$\begin{gathered} y(x) - p(x)y(h(x)) = u(x), x \in [a;b], \\ y(x) = 0, x \notin [a;b], \end{gathered} \quad (17)$$

отримаємо, що

$$y(x) = \begin{cases} u(x), x \in [a; h^{-1}(a)), \\ u(x) + \sum_{i=1}^{s} y(h^i(x)) \prod_{k=0}^{i-1} p(h^k(x)), x \in \Delta_s, s = \overline{1,m}, \end{cases} \quad (18)$$

де $\Delta_s = [c_{s-1}; c_s)$, $c_0 = a$, $c_s = h^{-1}(c_{s-1})$, $c_m = b$, $h^k(x) = h(h^{k-1}(x))$, $s = \overline{1,m}$.

Тоді, підставивши $y(x)$, що має вигляд (18), у підінтегральні вирази рівняння (1) і здійснивши ряд перетворень, переконаємось у тому, що ядра $T(x;t)$ та $H(x;t)$ інтегральних операторів рівняння (16) набудуть вигляду

$$T(x;t) = \begin{cases} K(x;t) + \sum_{i=1}^{m-s} K(x;(h^{-1})^i(t)) \prod_{k=1}^{i} p((h^{-1})^k(t)), t \in \Delta_s, \\ K(x;t), t \in (c_{m-1}; b), s = \overline{1, m-1}, x \in (a;b), \end{cases} \quad (19)$$

$$H(x;t) = \begin{cases} G(x;t) + \sum_{i=1}^{m-s} G(x;(h^{-1})^i(t)) \prod_{k=1}^{i} p((h^{-1})^k(t)), t \in \Delta_s, \\ G(x;t), t \in (c_{m-1}; b), s = \overline{1, m-1}, x \in (a;b). \end{cases} \quad (20)$$

При цьому колокаційно-ітеративний метод (10)-(15) розв'язування рівняння (1) з умовою (2) буде рівносильним колокаційно-ітеративному методу розв'язання рівняння (16), тобто методу:

$$u_k(x) = f(x) + \int_a^b T(x;t)\tilde{z}_k(t)\,dt + \lambda \int_a^b C(x;t)F\left(t; \int_a^b H(t;\xi)\tilde{z}_k(\xi)d\xi\right)dt, \quad (21)$$

$$\tilde{z}_k(x) = u_{k-1}(x) + w_k(x), k = 1, 2, 3, \ldots, \quad (22)$$

$$w_k(x) = \int_a^b Q_n(x;t)\big(u_k(t) - u_{k-1}(t)\big)dt, \quad (23)$$

де

$$Q_n(x;t) = \sum_{m=1}^{n} \alpha_m^{-1} \varphi_m(x)\varphi_m(t)\,,\ \alpha_m = \int_a^b \varphi_m^2(x)dx, \tag{24}$$

(тут $\{\varphi_m(x)\}$ — лінійно-незалежна та повна в просторі $L_2(a;b)$ система функцій).

У роботі [5] до рівняння (16) застосовується проекційно-ітеративний метод та приводиться схема його обґрунтування. Оскільки колокаційно-ітеративний метод можна розглядати, як окремий випадок проекційно-ітеративного, то, приймаючи до уваги приведені у згаданій роботі міркування, приходимо до висновку, що матиме місце твердження.

Теорема. Якщо виконуються приведені вище умови 1)-3) і для довільної функції $g(x) \in L_2(a;b)$

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b P_n(x;t)g(t)dt = g(x),$$

то для всякої функції $f(x) \in L_2(a;b)$ інтегро-функціональне рівняння (1) з умовою (2) матиме єдиний розв'язок та буде справедлива нерівність

$$\left\| y^*(x) - \tilde{y}(x) \right\| \le c \cdot \left\| f^*(x) - f(x) \right\|,\ c > 0,$$

де $y^*(x)$ та $\tilde{y}(x)$ — відповідно розв'язки рівняння (1) при $f(x) = f^*(x)$ та при $f(x) = f(x)$.

Тоді при достатньо великих n колокаціно-ітеративний метод (10)-(15) буде збіжним.

Слід відмітити, що, як частковий випадок методу (10)-(15), при $w_k(x) = 0, k = 1, 2, 3, ...,$ отримаємо один варіант методу послідовних наближень, а при $y_0(x) \equiv 0$ наближення $z_1(x)$ можна розглядати як наближений розв'язок рівняння (1), побудований за допомогою колокаційного методу.

Обчислювальна схема. Безпосередні обчислення згідно колокаційно-ітеративного методу (10)-(15) доцільно проводити за такою схемою.

Задаємо лінійно-незалежну на проміжку $[a;b]$ систему функцій $\{\varphi_j(x)\}$, $j = \overline{1,n}$ і згідно формули (14) знаходимо систему функцій $\{\eta_j(x)\}$, $j = \overline{1,n}$.

Далі будуємо функції

$$K_j(x) = \int_a^b K(x;t)\eta_j(t)dt\,,\ G_j(x) = \int_a^b G(x;t)\eta_j(t)dt\,,\ j = \overline{1,n}\,. \tag{25}$$

Нехай, виходячи з деякого початкового наближення $y_0(x)$, знайдено функцію $y_{k-1}(x)$. Будуємо функцію $u_{k-1}(x) = y_{k-1}(x) + p(x)y_{k-1}(h(x))$.

Після цього виконуємо ітерацію

$$v_k(x) = f(x) + \int_a^b K(x;t)\, y_{k-1}(t)\,dt + \lambda \int_a^b C(x;t)\, F\left(t; \int_a^b G(t;\xi) y_{k-1}(\xi) d\xi\right) dt, \quad (26)$$

і записуємо нев'язку

$$\varepsilon_k(x) = v_k(x) - u_{k-1}(x). \quad (27)$$

Обчислюємо числа b_i^k

$$b_i^k = \varepsilon_k(x_i), i = \overline{1,n}, \quad (28)$$

(тут, як відмічалось вище, $x_i \in [a;b], i = \overline{1,n}$ – вузли колокації).

Розв'язавши систему n нелінійних рівнянь

$$\sum_{j=1}^{n} a_j^k \left(\varphi_j(x_i) - K_j(x_i)\right) - \lambda \int_a^b C(x_i;t)\, \mathrm{F}\left(t; \sum_{j=1}^{n} a_j^k G_j(t)\right) dt = b_i^k, \quad (29)$$

де $i = \overline{1,n}$, знаходимо коефіцієнти a_j^k і будуємо функцію

$$u_k(x) = v_k(x) + \sum_{j=1}^{n} a_j^k K_j(x) + \lambda \int_a^b C(x;t)\, F\left(t; \sum_{j=1}^{n} a_j^k G_j(t)\right) dt. \quad (30)$$

Наближення $y_k(x)$ знаходимо, розв'язавши покроково функціональне рівняння

$$\begin{gathered} y_k(x) - p(x) y_k(h(x)) = u_k(x), x \in [a;b], \\ y_k(x) = 0, x \notin [a;b]. \end{gathered} \quad (31)$$

Здійснивши нескладні перетворення, можна показати, що приведена обчислювальна схема (14), (25)-(31) є рівносильною колокаційно-ітеративному методу (10)-(15).

Висновки. У статті досліджено один із наближених методів розв'язування деякого типу нелінійного інтегро-функціонального рівняння, а саме, — колокаційно-ітеративний метод. Зокрема, розглянуто питання існування єдиного розв'язку та побудови його наближених розв'язків. Розглянуто застосування колокаційно-ітеративного методу до такого рівняння. Він полягає у тому, що при виконанні певних умов згадані інтегро-функціональні рівняння можна звести до нелінійних інтегральних рівнянь. Приведені обґрунтування методу та обчислювальна схема.

Список використаних джерел:

1. Геселева К. Г. Колокаційний та колокаційно ітеративний методи розв'язання інтегро-функціональних рівнянь з малою нелінійністю. *Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні*

науки: зб. наук. пр. Кам’янець-Подільський: Кам’янець-Поділ. нац. ун-т ім. Івана Огієнка, 2015. Вип. 12. С. 19-27.
2. Забрейко П. П., Кошелев А. И., Красносельський М. А. и др. Интегральные уравнения. М.: Физматгиз, 1968. 448 с.
3. Конет И. М., Геселева К. Г. Коллокационный и коллокационно-итеративный методы решения интегро-функционального уравнения. *Часопіс «Веснік Брэсцкага універсітэта». Серыя 4. Фізіка. Матэматыка.* 2017. № 2. С. 82-89.
4. Красносельський М. А., Забрейко П. П., Пустыльник Е. И. и др. Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций. М.: Наука, 1966. 500 с.
5. Лучка А. Ю. Проекционно-итеративные методы решения линейных дифференциальных и интегральных уравнений. Киев: Наук. думка, 1980. 288 с.

APPLICATION OF THE COLLOCATION-ITERATIVE METHOD TO NONLINEAR INTEGRO-FUNCTIONAL EQUATIONS

The article investigates the application of the collocation-iterative method to one type of nonlinear integro-functional equation. The conditions that guarantee the existence of a single solution of such an equation are given. The basic algorithm of the method is given and the conditions under which this method will be convergent are indicated. In substantiating this method, the fact is used that the original nonlinear integro-functional equation can be reduced to a nonlinear integral equation, the kernels of integral operators of which are written explicitly.

Another important point in the justification is that the collocation-iterative method can be interpreted as a partial case of the projection-iterative method. The application of the latter to different types of nonlinear operator equations has been systematically investigated in the works of A. Y. Luchka and his students.

A significant difference between the method studied in this work is that at each step of the iteration it is necessary to solve systems of nonlinear algebraic or transcendental equations, which is the main technical complexity of this process. But the problem of finding solutions of such systems is simpler than solving the original nonlinear integro-functional equation.

The article shows that the method of successive approximations and the method of collocation of the solution of the initial nonlinear equation can be considered as partial cases of the collocation-iterative method.

In addition to the basic algorithm of the method, its computational algorithm is given, which is more convenient for direct calculations than the method itself and which, if necessary, can be successfully implemented on a computer by creating an appropriate program.

Key words: *nonlinear integro-functional equation, nonlinear integral equation, collocation-iterative method, collocation method, computational algorithm, approximate solution, collocation nodes, integral operator.*

Отримано: 24.09.2020