УДК 517.5
DOI: 10.32626/2308-5878.2020-21.84-99

У. В. Гудима, канд. фіз.-мат. наук,
В. О. Гнатюк, канд. фіз.-мат. наук

Кам'янець-Подільський національний університет
імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський

УМОВИ ІСНУВАННЯ ЕКСТРЕМАЛЬНОГО ЕЛЕМЕНТА ДЛЯ ЗАДАЧІ ВІДШУКАННЯ ВІДСТАНІ МІЖ ДВОМА МНОЖИНАМИ, ЄДИНОСТІ ЕКСТРЕМАЛЬНОГО ЕЛЕМЕНТА ЕКВІВАЛЕНТНОЇ ЇЙ ЗАДАЧІ, ВЛАСТИВОСТІ ФУНКЦІЇ ВІДСТАНІ

Відомо, що одним із напрямів математики, який найбільш інтенсивно розвивається в даний час, є теорія наближень, у тому числі теорія наближень функцій.

Початком сучасної теорії наближень прийнято вважати працю П. Л. Чебишова 1857 року, присвячену поліномам, що найменше відхиляються від нуля.

У цій праці П. Л. Чебишов вперше ввів поняття найкращого наближення.

Згодом було досліджено низку подібних задач, в яких окремі функції наближались поліномами, тригонометричними поліномами, раціональними функціями тощо у різних метриках.

Виявилось, що такі задачі вкладаються у схему задачі найкращого наближення елемента лінійного нормованого простору опуклою множиною цього простору, яку ще називають задачею відшукання відстані від елемента лінійного нормованого простору до опуклої множини цього простору.

Загальні теореми існування, єдиності екстремального елемента для задачі відшукання відстані від елемента лінійного нормованого простору до опуклої множини цього простору, властивості функціонала найкращого наближення, теореми двоїстості та критерії екстремального елемента для цієї задачі встановлено, зокрема, М. П. Корнєйчуком у праці [1].

Зрозуміло, що задача відшукання відстані від елемента лінійного нормованого простору до опуклої множини цього простору є частковим випадком задачі відшукання відстані між двома множинами лінійного нормованого простору, що визначається як інфімум норм різниць всеможливих елементів цих множин (див., наприклад, [2, 3]).

У працях [4, 5] доведені співвідношення двоїстості, критерії екстремальності елемента та послідовності для задачі відшукання відстані між двома опуклими множинами лінійного нормованого простору.

У цій статті встановлено умови існування екстремального елемента для задачі відшукання відстані між двома множина-

ми лінійного нормованого простору, умови єдиності екстремального елемента для еквівалентної їй задачі, властивості функції відстані та одержано формули для відшукання екстремального елемента для задачі відшукання відстані між двома замкненими кулями цього простору.

Ключові слова: *лінійний нормований простір, відстань між множинами, екстремальний елемент, умови існування та єдиності, властивості функції відстані.*

Вступ. У статті встановлено умови існування екстремального елемента для задачі відшукання відстані між двома множинами лінійного нормованого простору, умови єдиності екстремального елемента для еквівалентної їй задачі, властивості функції відстані.

Постановка задачі. Еквівалентна задача. Нехай X — лінійний над полем дійсних чисел нормований простір, A , B — множини цього простору.

Задачею відшукання відстані між множинами A та B будемо називати задачу відшукання величини

$$E(A,B)=\inf_{\substack{x\in A,\\ y\in B}}\|x-y\| \tag{1}$$

(див., наприклад, [2, с. 65; 3, с. 110]).

Якщо існує елемент $\left(x^*,y^*\right)\in A\times B$ такий, що

$$E(A,B)=\inf_{\substack{x\in A,\\ y\in B}}\|x-y\|=\left\|x^*-y^*\right\|,$$

то його будемо називати екстремальним елементом для величини (1).

Поряд із задачею відшукання величини (1) будемо розглядати задачу відшукання величини

$$\inf_{z\in A-B}\|z\|. \tag{2}$$

Якщо існує елемент $z^*=x^*-y^*\in A-B$, для якого

$$\inf_{z\in A-B}\|z\|=\left\|z^*\right\|,$$

то його будемо називати екстремальним елементом для величини (2).

Зрозуміло, що має місце таке твердження.

Твердження 1. Справедлива рівність

$$E(A,B)=\inf_{z\in A-B}\|z\|. \tag{3}$$

Для того щоб елемент $\left(x^*,y^*\right)\in A\times B$ був екстремальним елементом для величини (1), необхідно і достатньо, щоб елемент $z^*=x^*-y^*\in A-B$ був екстремальним елементом для величини (2).

З урахуванням твердження 1 задачу відшукання величини (2) будемо називати задачею, еквівалентною задачі відшукання величини (1).

Актуальність теми. Останнім часом ідеї та методи теорії апроксимації проникають у різні розділи математичної науки, особливо прикладних напрямів, адже необхідність наближення складних математичних об’єктів більш простими і зручними у користуванні, виникає як при розгляді теоретичних проблем, так і при вирішенні проблем практичного характеру.

Центральною галуззю теорії апроксимації є теорія наближення функцій, фундамент якої закладено у працях П. Л. Чебишова, який ще у 50-х роках 19 століття поставив задачу про найкраще рівномірне наближення неперервної на сегменті дійснозначної функції множиною алгебраїчних поліномів степеня, що не перевищує деякого натурального числа.

Ця задача та низка інших задач теорії наближення допускає загальну постановку, якщо як міру відхилення розглядати норму простору, що дало можливість використовувати для їх розв’язання ідеї та методи функціонального аналізу. Внаслідок цього було сформульовано задачу найкращого наближення елемента y лінійного нормованого простору X опуклою множиною A цього простору, тобто задачу відшукання величини

$$E\left(A, y\right) = \inf_{x\in A} \left\|x - y\right\|. \tag{4}$$

Якщо існує елемент $x^* \in A$ такий, що

$$E\left(A, y\right) = \left\|x^* - y\right\|,$$

то його називають екстремальним елементом для величини (4).

При фіксованій апроксимуючій множині величина (4) задає на X функціонал $E\left(A, y\right)$, $y \in X$.

Функціонал $E\left(A, y\right)$, $y \in X$, називають функціоналом найкращого наближення (див., наприклад, [1, с. 16]).

Основні результати дослідження величини (4) підсумовані, зокрема, у монографіях Н. І. Ахієзера [6], В. К. Дзядика [8], М. П. Корнєйчука [1], П.-Ж. Лорана [8], О. І. Степанця [9, 10], В. М. Тихомирова [11] та ін.

Зокрема, у праці [1] встановлено теореми існування, єдиності екстремального елемента для задачі відшукання величини (4), властивості функціонала найкращого наближення.

Зрозуміло, що задача відшукання величини (4) є частковим випадком задачі відшукання величини (1) при $B = \left\{y\right\}$.

Отже, всі вищезгадані задачі наближення вкладаються у схему постановки задачі відшукання величини (1).

Тому результати загального характеру, отримані при дослідженні цієї задачі, становитимуть самостійний інтерес, а також можуть бути відправним пунктом для подальшого дослідження задач, що вкладаються у її схему, в тому числі для дослідження задачі відшукання величини (4).

Актуальними, зокрема, є питання встановлення умов існування екстремального елемента для величини (1), єдиності екстремального елемента для задачі відшукання величини (2), властивостей функції відстані $E\left(A,B\right)$, $B\subset X$, при фіксованому $A\subset X$, які розглядаються у цій статті.

Мета роботи. Встановити деякі умови існування екстремального елемента для задачі відшукання величини (1), умови єдиності екстремального елемента для задачі (2), властивості функції відстані для задачі відшукання величини (1), одержати формули для відшукання екстремального елемента для задачі відшукання відстані між двома замкненими кулями цього простору.

Умови існування екстремального елемента для величини (1) та умови єдиності екстремального елемента для величини (2).

Означення 1 (див., наприклад, [1, с. 21]). Множина V простору X називається локально компактною, якщо з будь-якої обмеженої послідовності точок цієї множини можна виділити збіжну підпослідовність.

Теорема 1. Якщо $A-B$ є замкненою локально компактною множиною, то екстремальний елемент для величини (1) існує.

Доведення. Внаслідок означення точної нижньої межі одержимо, що для кожного $k\in N$ існують точки $x_k\in A$ та $y_k\in B$ такі, що

$$E\left(A,B\right)\le\left\|x_k-y_k\right\|<E\left(A,B\right)+\frac{1}{k},\ k=1,2,\dots .$$

Звідси випливає, що

$$\lim_{k\to\infty}\left\|x_k-y_k\right\|=E\left(A,B\right). \tag{5}$$

Тому послідовність $\left\{x_k-y_k\right\}_{k=1}^{\infty}$ є обмеженою послідовністю простору X, причому $x_k-y_k\in A-B$, $k=1,2,\dots$.

Оскільки за умовою $A-B$ є локально компактною і замкненою множиною, то існує збіжна підпослідовність $\left\{x_{k_l}-y_{k_l}\right\}_{l=1}^{\infty}$ послідовності $\left\{x_k-y_k\right\}_{k=1}^{\infty}$ і

$$\lim_{l\to\infty}\left(x_{k_l}-y_{k_l}\right)=z^*\in A-B .$$

Внаслідок цього і (5) існують елементи $x^* \in A$, $y^* \in B$, для яких $z^* = x^* - y^*$ та

$$E\left(A,B\right) = \lim_{k\to\infty}\left\|x_k - y_k\right\| = \lim_{l\to\infty}\left\|x_{k_l} - y_{k_l}\right\| = \left\|z^*\right\| = \left\|x^* - y^*\right\|.$$

Це означає, що елемент $\left(x^*, y^*\right) \in A \times B$ є екстремальним елементом для величини (1).

Теорему доведено.

Теорема 2. Якщо A є замкненою локально компактною множиною простору X, а B — компакт цього простору, то $A - B$ є замкненою локально компактною множиною простору X.

Доведення. Нехай виконуються умови теореми і $\left\{z_k\right\}_{k=1}^{\infty}$ є обмеженою послідовністю точок множини $A - B$. Тоді існують послідовності $\left\{x_k\right\}_{k=1}^{\infty}$, $\left\{y_k\right\}_{k=1}^{\infty}$ та число $c > 0$ такі, що $x_k \in A$, $y_k \in B$, $z_k = x_k - y_k$ та $\left\|z_k\right\| = \left\|x_k - y_k\right\| \le c$, $k = 1, 2, \ldots$.

Оскільки $y_k \in B$, $k = 1, 2, \ldots$, і B — компакт простору X, то існує число $c_1 > 0$, що $\left\|y_k\right\| \le c_1$, $k = 1, 2, \ldots$, та з послідовності $\left\{y_k\right\}_{k=1}^{\infty}$ можна вибрати підпослідовність $\left\{y_{k_l}\right\}_{l=1}^{\infty}$ таку, що $\lim\limits_{l\to\infty} y_{k_l} = y^* \in B$.

Маємо

$$\left\|x_{k_l}\right\| - \left\|y_{k_l}\right\| \le \left\|x_{k_l} - y_{k_l}\right\| \le c, \quad \left\|x_{k_l}\right\| \le c + \left\|y_{k_l}\right\| \le c + c_1 = c_2, \quad l = 1, 2, \ldots.$$

Отже, $\left\{x_{k_l}\right\}_{l=1}^{\infty}$ є обмеженою послідовністю замкненої локально компактної множини A. Згідно з означенням 1 та внаслідок замкненості множини A з послідовності $\left\{x_{k_l}\right\}_{l=1}^{\infty}$ можна вибрати збіжну до елемента множини A підпослідовність. Не обмежуючи загальності, будемо вважати, що уже $\lim\limits_{l\to\infty} x_{k_l} = x^* \in A$. Оскільки $\lim\limits_{l\to\infty} y_{k_l} = y^* \in B$, то

$$\lim_{l\to\infty} z_{k_l} = \lim_{l\to\infty}\left(x_{k_l} - y_{k_l}\right) = x^* - y^* \in A - B.$$

Отже, з будь-якої обмеженої послідовності $\left\{z_k\right\}_{k=1}^{\infty}$ точок множини $A - B$ можна вибрати підпослідовність $\left\{z_{k_l}\right\}_{l=1}^{\infty}$, яка збігається до точки цієї множини. Це означає, що $A - B$ є локально компактною множиною.

Нехай тепер z^* є граничною точкою множини $A-B$. Тоді існує послідовність $\{z_k\}_{k=1}^{\infty}$ точок множини $A-B$, яка збігається до z^*. Тому $\{z_k\}_{k=1}^{\infty}$ є обмеженою послідовністю точок множини $A-B$.

Вище встановлено, що з цієї послідовності можна вибрати підпослідовність $\{z_{k_l}\}_{l=1}^{\infty}$, яка збігається до елемента множини $A-B$. Отже, $z^* = \lim\limits_{k\to\infty} z_k = \lim\limits_{l\to\infty} z_{k_l} \in A-B$.

З проведених міркувань випливає, що кожна гранична точка множини $A-B$ належить цій множині. Тому $A-B$ є замкненою множиною.

Теорему доведено.

Наслідок 1. Якщо A є замкненою локально компактною множиною простору X, а B — компакт цього простору, то $A-B$ є множиною існування екстремального елемента для величини (1).

Справедливість наслідку випливає з теорем 1, 2.

Наслідок 2. Якщо A та B є компактами простору X, то екстемальний елемент для величини (1) існує.

Справедливість наслідку випливає з наслідку 1.

Наслідок 3. Якщо A є скінченновимірним підпростором простору X, а B є компактом цього простору, то екстремальний елемент для величини (1) існує.

Справедливість наслідку випливає з локальної компактності та замкненості скінченновимірного підпростору лінійного нормованого простору (див., наприклад, [1, с. 21]) та наслідку 1.

Твердження 2. Якщо $A=\{x\in X : \|x-a\|\le r_1\}$ — куля простору X з центром у точці a радіуса r_1, а $B=\{y\in X : \|y-b\|\le r_2\}$ — куля простору X з центром у точці b радіуса r_2, то екстремальний елемент $\left(x^*, y^*\right)$ для величини (1) в цьому випадку існує, зокрема:

$$\left(x^*, y^*\right) = (b,b)\text{, якщо } \|b-a\|\le r_1;$$

$$\left(x^*, y^*\right) = \left(a+\frac{r_1}{\|b-a\|}(b-a), a+\frac{r_1}{\|b-a\|}(b-a)\right),$$

$$\text{якщо } \|b-a\|> r_1 \text{ та } \|b-a\|\le r_1+r_2;$$

$$\left(x^*, y^*\right) = \left(a+\frac{r_1}{\|b-a\|}(b-a), b-\frac{r_2}{\|b-a\|}(b-a)\right)\text{, якщо } \|b-a\|> r_1+r_2.$$

Доведення. Нехай $\|b-a\| \le r_1$. Тоді $b \in A \cap B$ і для $(b,b) \in A \times B$ маємо, що $0 \le E(A,B) = \inf\limits_{\substack{x\in A,\\ y\in B}} \|x-y\| \le \|b-b\| = 0$. Звідси випливає, що $E(A,B) = \|b-b\| = 0$ та $(x^*, y^*) = (b,b)$ є екстремальним елементом для величини (1).

Нехай тепер $\|b-a\| > r_1$ і $\|b-a\| \le r_1 + r_2$. Для точки $a + \frac{r_1}{\|b-a\|}(b-a)$ маємо, що

$$\left\| a + \frac{r_1}{\|b-a\|}(b-a) - a \right\| = \left\| \frac{r_1}{\|b-a\|}(b-a) \right\| = r_1,$$

$$\left\| a + \frac{r_1}{\|b-a\|}(b-a) - b \right\| = \|b-a\| \left| \frac{r_1}{\|b-a\|} - 1 \right| = \left| r_1 - \|b-a\| \right| =$$

$$= \|b-a\| - r_1 \le r_1 + r_2 - r_1 = r_2 .$$

Тому $(x^*, y^*) = \left(a + \frac{r_1}{\|b-a\|}(b-a), a + \frac{r_1}{\|b-a\|}(b-a) \right) \in A \times B$. Для (x^*, y^*), крім того, одержуємо

$$0 \le E(A,B) = \inf\limits_{\substack{x\in A,\\ y\in B}} \|x-y\| \le \left\| x^* - y^* \right\| = 0 .$$

Звідси випливає, що $E(A,B) = \left\| x^* - y^* \right\| = 0$.

Тому (x^*, y^*) є екстремальним елементом для величини (1) в цьому випадку.

Нехай тепер $\|b-a\| > r_1 + r_2$ та

$$(x^*, y^*) = \left(a + \frac{r_1}{\|b-a\|}(b-a), b - \frac{r_2}{\|b-a\|}(b-a) \right).$$

Вище встановлено, що $x^* = a + \frac{r_1}{\|b-a\|}(b-a) \in A$. Для y^* маємо, що $\left\| y^* - b \right\| = \left\| b - \frac{r_2}{\|b-a\|}(b-a) - b \right\| = r_2$.

Тому $y^* \in B$, а $(x^*, y^*) \in A \times B$. Згідно з [4] в розглядуваному випадку $E(A,B) = \|b-a\| - (r_1 + r_2)$. Оскільки

$$\left\|x^* - y^*\right\| = \left\|a + \frac{r_1}{\|b-a\|}(b-a) - b + \frac{r_2}{\|b-a\|}(b-a)\right\| =$$

$$= \left\|\frac{r_1 + r_2}{\|b-a\|}(b-a) - (b-a)\right\| = \|b-a\| \frac{\left|r_1 + r_2 - \|b-a\|\right|}{\|b-a\|} = \|b-a\| - (r_1 + r_2),$$

то $E(A,B) = \left\|x^* - y^*\right\|$, де $\left(x^*, y^*\right) \in A \times B$.

Звідси випливає, що $\left(x^*, y^*\right)$ є екстремальним елементом для величини (1) в цьому випадку.

Твердження доведено.

Теорема 3. Якщо X — банахів простір, в якому для довільних x, y має місце «нерівність паралелограма»

$$2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 - \|x+y\|^2 \ge c\|x-y\|^2, \qquad (6)$$

де $c > 0$, A, B — опуклі множини цього простору такі, що $A - B$ є замкненою множиною, то екстремальний елемент для величини (1) існує, а екстремальний елемент для величини (2) єдиний.

Доведення. З урахуванням рівності (3) та з означення інфімуму випливає, що для будь-якого натурального числа n існує елемент $z_n \in A - B$ такий, що

$$E(A,B) \le \|z_n\| < E(A,B) + \frac{1}{n}. \qquad (7)$$

Переконаємося, що $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ є фундаментальною послідовністю простору X.

Оскільки z_n, z_m, $n = 1, 2, \ldots$, $m = 1, 2, \ldots$, є елементами множини $A - B$ для всіх натуральних n і m, а множина $A - B$ є опуклою множиною внаслідок опуклості множин A і B (див., наприклад, [3, с. 14]), то $\frac{z_n + z_m}{2} \in A - B$ для всіх натуральних n і m. Використаємо далі «нерівність паралелограма» (6), поклавши в ній $x = z_n, y = z_m$.

Згідно з цією нерівністю

$$2\|z_n\|^2 + 2\|z_m\|^2 - \|z_n + z_m\|^2 \ge c\|z_n - z_m\|^2. \qquad (8)$$

Оскільки $\frac{z_n + z_m}{2} \in A - B$, то

$$\|z_n + z_m\|^2 = 4\left\|\frac{z_n + z_m}{2}\right\|^2 \ge 4\left(E(A,B)\right)^2.$$

Звідси та з нерівностей (7), (8) одержуємо, що

$$c\|z_n - z_m\|^2 \le 2\|z_n\|^2 + 2\|z_m\|^2 - 4\big(E(A,B)\big)^2 \le$$

$$\le 2\left(E(A,B) + \frac{1}{n}\right)^2 + 2\left(E(A,B) + \frac{1}{m}\right)^2 - 4\big(E(A,B)\big)^2 =$$

$$= 4E(A,B)\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m}\right) + \frac{2}{n^2} + \frac{2}{m^2},$$

$$\|z_n - z_m\| \le \left(\frac{4E(A,B)}{c}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m}\right) + \frac{2}{cn^2} + \frac{2}{cm^2}\right)^{\frac{1}{2}},\ n, m \in N .$$

Оскільки права частина цієї нерівності прямує до нуля при $n \to \infty$, $m \to \infty$, то робимо висновок, що $\lim\limits_{\substack{n\to\infty,\\ m\to\infty}} \|z_n - z_m\| = 0$.

Це означає, що $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ є фундаментальною послідовністю точок множини $A - B$. Внаслідок повноти простору X і замкнености множини $A - B$ ця послідовність збігається до $z^* \in A - B$. Оскільки $z^* \in A - B$, то існують $x^* \in A$, $y^* \in B$, що $z^* = x^* - y^*$.

Звідси та з нерівності (7) випливає, що $\|z^*\| = \|x^* - y^*\| = E(A,B)$, де $(x^*, y^*) \in A \times B$. Це означає, що (x^*, y^*) є екстремальним елементом для величини (1), а z^* є екстремальним елементом для величини (2).

Переконаємося в єдиності екстремального елемента для величини (2). Нехай $\bar{z} = \bar{x} - \bar{y} \in A - B$ також є екстремальним елементом для величини (2). Поклавши в нерівності (6) $x = z^*$, $y = \bar{z}$ з урахуванням нерівності $\left\|\frac{z^* + \bar{z}}{2}\right\| \ge E(A,B)$ та рівності (3) отримаємо, що

$$2\|z^*\|^2 + 2\|\bar{z}\|^2 - \|z^* + \bar{z}\|^2 \ge c\|z^* - \bar{z}\|^2,$$

$$0 \le \|z^* - \bar{z}\|^2 \le \frac{1}{c}\left(2\|z^*\|^2 + 2\|\bar{z}\|^2 - 4\left\|\frac{z^* + \bar{z}}{2}\right\|^2\right) \le$$

$$\le \frac{1}{c}\Big(2\big(E(A,B)\big)^2 + 2\big(E(A,B)\big)^2 - 4\big(E(A,B)\big)^2\Big) = 0 .$$

Звідси випливає, що $z^* = \bar{z}$, що й потрібно було довести.

Теорему доведено.

Наслідок 4. Якщо X — банахів простір, в якому має місце «нерівність паралелограма» (6), A — замкнена опукла множина простору X, а B — опуклий компакт цього простору, то екстремальний елемент для величини (1) існує, а екстремальний елемент для величини (2) єдиний.

Справедливість наслідку випливає з теореми 3 оскільки A та B – опуклі множини, а $A-B$ є замкненою множиною простору X внаслідок замкненості множини A та компактності множини B (див., наприклад, [12, с. 23]).

Наслідок 5. Якщо X — банахів простір, в якому має місце «нерівність паралелограма» (6), A — замкнена опукла множина простору X, $y \in X$, то екстремальний елемент для задачі відшукання величини (4) існує та єдиний.

Доведення. Позначимо через $B = \{y\}$. Тоді

$$E(A, y) = E(A, B) = \inf_{\substack{x \in A, \\ y \in B}} \|x - y\| = \inf_{z \in A-B} \|z\|. \tag{9}$$

Для задачі відшукання величини (9) виконуються всі умови теореми 3. Згідно з цією теоремою існує екстремальний елемент (x^*, y) для задачі (9). Це означає, що $x^* \in A$ та $\|x - y\| \geq \|x^* - y\|$ для всіх $x \in A$. Звідси випливає, що x^* є екстремальним елементом для величини (4). Нехай $\overline{x}$ також є екстремальним елементом для цієї величини. Тоді $\|x^* - y\| = \|\overline{x} - y\| = E(A, y)$. Згідно з теоремою 3 $x^* - y = \overline{x} - y$. Тому $x^* = \overline{x}$. Єдиність екстремального елемента для величини (4) встановлена.

Наслідок доведено.

Зауважимо, що справедливість теореми 3 та наслідків 4, 5 має місце, зокрема, у випадку, коли X є гільбертовим простором або простором l_p, $1 < p < 2$, оскільки ці простори є повними та в гільбертовому просторі X виконується рівність паралелограма: для будь-яких $x, y \in X$ $2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 - \|x + y\|^2 = \|x - y\|^2$ (див., наприклад, [13, с.64]), а в просторі l_p, $1 < p < 2$, має місце «нерівність паралелограма» [14]: для будь-яких $x, y \in l_p$, $1 < p < 2$,

$$2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 - \|x + y\|^2 \geq (p-1)\|x - y\|^2.$$

Твердження 3. Якщо в задачі відшукання величини (2) $A - B$ є опуклою множиною, то множина екстремальних елементів для цієї величини також є опуклою множиною.

Доведення. Нехай елементи $z^* = x^* - y^* \in A - B$, $\overline{z} = \overline{x} - \overline{y} \in A - B$ є екстремальними для величини (2), $\alpha \in [0,1]$. Оскільки за умовою множина $A - B$ є опуклою, то $(1-\alpha)z^* + \alpha\overline{z} \in A - B$. Тому

$$E(A,B) \le \left\|(1-\alpha)z^* + \alpha\overline{z}\right\| \le (1-\alpha)\left\|z^*\right\| + \alpha\left\|\overline{z}\right\| =$$
$$= (1-\alpha)E(A,B) + \alpha E(A,B) = E(A,B).$$

Звідси випливає, що $\left\|(1-\alpha)z^* + \alpha\overline{z}\right\| = E(A,B)$.

Отже, всі точки відрізка $\left[z^*, \overline{z}\right]$ є екстремальними елементами для величини (2). Тому множина всіх екстремальних елементів для величини (2) є опуклою.

Твердження доведено.

Означення 2 (див., наприклад, [1, с. 22-23]). Кажуть, що простір X є строго нормованим, якщо рівність $\|x+y\| = \|x\| + \|y\|$ для $x, y \in X$, $x \ne 0$, $y \ne 0$, можлива лише тоді, коли $x = cy$ ($c > 0$).

Теорема 4. Якщо в задачі відшукання величини (2) $A - B$ є опуклою множиною, X — строго нормований простір і екстремальний елемент для величини (2) існує, то він єдиний.

Доведення. Припустимо, що вектори $z^* = x^* - y^* \in A - B$, $\overline{z} = \overline{x} - \overline{y} \in A - B$ є екстремальними для величини (2). Згідно з твердженням 3 екстремальним елементом для цієї величини буде також вектор $\dfrac{z^* + \overline{z}}{2}$. Тому (див рівність (3))

$$E(A,B) = \left\|\frac{z^* + \overline{z}}{2}\right\| \le \frac{1}{2}\left\|z^*\right\| + \frac{1}{2}\left\|\overline{z}\right\| = \frac{1}{2}E(A,B) + \frac{1}{2}E(A,B).$$

Звідси випливає, що

$$\left\|z^* + \overline{z}\right\| = \left\|z^*\right\| + \left\|\overline{z}\right\| = 2E(A,B). \tag{10}$$

Якщо $E(A,B) = 0$, то $\left\|z^*\right\| = \left\|\overline{z}\right\| = 0$. Тому $z^* = \overline{z} = 0$.

Якщо ж $E(A,B) \ne 0$, то $z^* \ne 0$, $\overline{z} \ne 0$. З урахуванням цього, строгої нормованості простору X та рівності (10) одержимо, що існує число $c > 0$, для якого $z^* = c\overline{z}$. Звідки $\left\|z^*\right\| = c\left\|\overline{z}\right\|$, $E(A,B) = cE(A,B)$. Оскільки $E(A,B) \ne 0$, то $c = 1$. Тому $z^* = c\overline{z} = \overline{z}$.

Теорему доведено.

Наслідок 6 (див., наприклад, [11, с. 152]). Якщо в задачі відшукання величини (4) A є опуклою множиною, X — строго нормований простір і екстремальний елемент для цієї величини існує, то він єдиний.

Доведення. Нехай x^* та $\overline{x}$ — екстремальні елементи для величини (4). Тоді $E(A,y)=\left\|x^*-y\right\|=\left\|\overline{x}-y\right\|$. Згідно з теоремою 4 $x^*-y=\overline{x}-y$. Звідси випливає, що $x^*=\overline{x}$. Це й означає, що екстремальний елемент для величини (4) єдиний.

Наслідок доведено.

Властивості функції відстані для задачі відшукання величини (1). Позначимо через $P(X)$ — множину всеможливих підмножин простору X, через $O(X)$ — множину обмежених замкнених множин цього простору.

Як відомо (див., наприклад, [12, с. 33]), відстанню за Гаусдорфом (гаусдорфовою відстанню) між множинами A і B із $O(X)$ називається величина

$$h(A,B)=\max\left\{\sup_{x\in A}\inf_{y\in B}\left\|x-y\right\|,\sup_{y\in B}\inf_{x\in A}\left\|x-y\right\|\right\}.$$

Величина $h(A,B)$, $A\in O(X)$, $B\in O(X)$, задає метрику на $O(X)$ (див., наприклад, [12, с. 33]).

При фіксованій множині $A\in P(X)$ величина $E(A,B)$, $B\in P(X)$, задає на $P(X)$ деяку функцію: кожному $B\in P(X)$ ставиться у відповідність число $E(A,B)$, яку назвемо функцією відстані для задачі відшукання величини (1).

Розглянемо деякі властивості цієї функції.

Теорема 5. Для будь-яких $A\in P(X)$; $B_1,B_2\in O(X)$ має місце співвідношення

$$\left|E(A,B_1)-E(A,B_2)\right|\le h(B_1,B_2). \tag{11}$$

Для будь-якої фіксованої множини $A\in P(X)$ функція $E(A,B)$, $B\in O(X)$, є неперервною на $O(X)$ у розумінні метрики Гаусдорфа на $O(X)$.

Якщо A — підпростір простору X, то функція $E(A,B)$, $B\in P(X)$, є півадитивною:

$$E(A, B_1 + B_2) \le E(A, B_1) + E(A, B_2)\,,\ B_1, B_2 \in P(X)\,, \qquad (12)$$

і додатно однорідною, тобто

$$E(A, \lambda B) = |\lambda| E(A, B)\,,\ \lambda \in R\,,\ B \in P(X)\,. \qquad (13)$$

Доведення. Нехай $A \in P(X)$, $B_1, B_2 \in O(X)$. Для будь-яких $x \in A$, $y_1 \in B_1$, $y_2 \in B_2$ маємо

$$\|x - y_1\| = \|(x - y_2) + (y_2 - y_1)\| \le \|x - y_2\| + \|y_2 - y_1\|\,.$$

Звідси випливає, що

$$E(A, B_1) = \inf_{\substack{x \in A,\\ y_1 \in B_1}} \|x - y_1\| \le \|x - y_1\| \le \|x - y_2\| + \inf_{y_1 \in B_1} \|y_2 - y_1\| \le$$

$$\le \|x - y_2\| + \sup_{y_2 \in B_2} \inf_{y_1 \in B_1} \|y_2 - y_1\| \le \|x - y_2\| +$$

$$+ \max\left\{ \sup_{y_1 \in B_1} \inf_{y_2 \in B_2} \|y_2 - y_1\|, \sup_{y_2 \in B_2} \inf_{y_1 \in B_1} \|y_2 - y_1\| \right\} = \|x - y_2\| + h(B_1, B_2)\,.$$

Отже, для будь-яких $x \in A$, $y_2 \in B_2$

$$E(A, B_1) \le \|x - y_2\| + h(B_1, B_2)\,.$$

Тому

$$E(A, B_1) \le \inf_{\substack{x \in A,\\ y_2 \in B_2}} \|x - y_2\| + h(B_1, B_2) = E(A, B_2) + h(B_1, B_2)\,.$$

Звідки $E(A, B_1) - E(A, B_2) \le h(B_1, B_2)$.

Аналогічно доводиться, що

$$E(A, B_2) - E(A, B_1) \le h(B_1, B_2)\,.$$

З двох останніх нерівностей випливає справедливість співвідношення (11).

Нехай $A \in P(X)$, $B, B_0 \in O(X)$, $\varepsilon > 0$, $\delta = \varepsilon$. З урахуванням (11) одержимо, що

$$(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists \delta = \varepsilon > 0)\ \left(\forall B \in O(X) : h(B, B_0) < \delta = \varepsilon\right)$$

$$|E(A, B) - E(A, B_0)| \le h(B, B_0) < \delta = \varepsilon\,.$$

Це й означає, що функція $E(A, B)$, $B \in O(X)$, є неперервною у будь-якій точці $B_0 \in O(X)$ у розумінні метрики Гаусдорфа на $O(X)$. Тому $E(A, B)$, $B \in O(X)$, є неперервною на $O(X)$ у розумінні гаусдорфової метрики на $O(X)$.

Нехай тепер A — підпростір простору X, $B_1, B_2 \in P(X)$. Для будь-яких $x_1, x_2 \in A$, $y_1 \in B_1$, $y_2 \in B_2$ маємо, що

$$E\left(A, B_1 + B_2\right) = \inf_{\substack{x \in A, \\ z \in B_1 + B_2}} \left\| x - z \right\| = \inf_{\substack{x \in A, \\ y_1 \in B_1, y_2 \in B_2}} \left\| x - \left(y_1 + y_2 \right) \right\| \le$$

$$\le \left\| \left(x_1 + x_2 \right) - \left(y_1 + y_2 \right) \right\| \le \left\| x_1 - y_1 \right\| + \left\| x_2 - y_2 \right\| .$$

Звідси випливає, що

$$E\left(A, B_1 + B_2\right) \le \inf_{\substack{x_1 \in A, \\ y_1 \in B_1}} \left\| x_1 - y_1 \right\| + \inf_{\substack{x_1 \in A, \\ y_2 \in B_2}} \left\| x_2 - y_2 \right\| = E\left(A, B_1\right) + E\left(A, B_2\right) .$$

Співвідношення (12) встановлено.

Переконаємося у справедливості співвідношення (13). Нехай $\lambda \in R$, $B \in P\left(X\right)$. При $\lambda = 0$ маємо, що $\lambda B = 0 \cdot B = 0$. Тому $E\left(A, \lambda B\right) = E\left(A, 0\right) = \inf\limits_{x \in A} \left\| x - 0 \right\| = \inf\limits_{x \in A} \left\| x \right\| = 0$, оскільки за умовою A — підпростір простору X і, отже, $0 \in A$.

З іншого боку $\left|\lambda\right| E\left(A, B\right) = 0 \cdot E\left(A, B\right) = 0$. З проведених міркувань випливає, що рівність (13) має місце при $\lambda = 0$.

Нехай $\lambda \ne 0$. Тоді

$$E\left(A, \lambda B\right) = \inf_{\substack{x \in A, \\ z \in \lambda B}} \left\| x - z \right\| = \inf_{\substack{x \in A, \\ y \in B}} \left\| x - \lambda y \right\| = \inf_{\substack{x \in A, \\ y \in B}} \left\| \lambda \left(\frac{x}{\lambda} - y \right) \right\| =$$

$$= \left|\lambda\right| \inf_{\substack{\frac{x}{\lambda} \in \frac{A}{\lambda}, \\ y \in B}} \left\| \frac{x}{\lambda} - y \right\| = \left|\lambda\right| \inf_{\substack{z \in A, \\ y \in B}} \left\| z - y \right\| = \left|\lambda\right| E\left(A, B\right) ,$$

отже, співвідношення (13) встановлено.

Теорему доведено.

Висновки. Встановлено деякі умови існування екстремального елемента для задачі відшукання відстані між двома множинами лінійного нормованого простору, умови єдиності екстремального елемента для еквівалентної їй задачі, властивості функції відстані, одержано формули для відшукання екстремального елемента для задачі відшукання відстані між двома замкненими кулями цього простору.

Список використаних джерел:

1. Корнейчук Н. П. Экстремальные задачи теории приближения. М.: Наука, 1976. 320 с.
2. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1976. 544 с.
3. Арутюнов А. В. Лекции по выпуклому и многозначному анализу: учебное пособие. М.: Физматлит, 2014. 184 с.
4. Гудима У. В., Гнатюк В. О. Співвідношення двоїстості та критерії екстремальності елемента для задачі відшукання відстані між двома опукли-

ми множинами лінійного нормованого простору. *Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки*: зб. наук. праць. Кам'янець-Подільський: Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2018. Вип. 18. С. 65-77.

5. Гудима У. В., Гнатюк В. О. Критерії екстремальної послідовності для задачі відшукання відстані між двома опуклими множинами лінійного нормованого простору. *Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки*: зб. наук. праць. Кам'янець-Подільський: Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2019. Вип. 20. С. 13-25.
6. Ахиезер Н. И. Лекции по теории аппроксимации. М.: Наука, 1965. 407 с.
7. Дзядык В. К. Введение в теорию равномерного приближения функций. М.: Наука, 1977. 510 с.
8. Лоран П.-Ж. Аппроксимация и оптимизация. М.: Мир, 1975. 496 с.
9. Степанец А. И. Методы теории приближений. Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2002. Ч. I. 427 с.
10. Степанец А. И. Методы теории приближений. Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2002. Ч. II. 468 с.
11. Тихомиров В. М. Некоторые вопросы теории приближений. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1976. 307 с.
12. Половинкин Е. С., Балашов М. В. Элементы выпуклого и сильно выпуклого анализа. М.: Физматлит, 2004. 416 с.
13. Иосида К. Функциональный анализ. М.: Мир, 1967. 624 с.
14. Bynum W. L. Weak parallelogram lows for Banach spaces. *Can. Math. Bull.* 1976. Vol. 19, № 3. P. 269-275.

THE CONDITIONS OF EXISTENCE OF THE EXTREMAL ELEMENT FOR THE PROBLEM OF FINDING THE DISTANCE BETWEEN TWO SETS, THE UNITY OF AN EXTREMAL ELEMENT FOR ITS EQUIVALENT PROBLEM, THE PROPERTIES OF THE FUNCTION OF THE DISTANCE

The theory of approximation of a function is a direction of mathematics which is intensively developing. The work of P. L. Chebyshev in 1857 is considered the beginning of the modern theory of approximations. It is devoted to polynomials that deviate the least from zero. In this work, the concept of the best approximation was introduced.

Later, problems were investigated in which individual functions approached with polynomials, trigonometric polynomials, rational functions, etc. in different metrics. These tasks are a partial case of the problem of the best approximation of an element of linear normed space by convex set of this space. General theorems of existence, uniqueness of an extremal element, properties of the best approximation functional, duality theorems and criteria of an extremal element for this problem are established [1].

The more general problem are problem of finding the distance between two sets of linear normalized space is also considered [2, 3]. In [4, 5] the relations of duality, criteria of extremal element and sequence are proved for this problem.

In this article established the conditions of the existence of an extremal element for the problem of finding the distance between two sets of linearly normalized space, the conditions of the unity of an extremal element for its equivalent problem, the properties of the function of the distance and formulas for finding an extremal element for the problem of finding the distance between two closed spheres of this space.

Key words: *the linear normed space, the distance between sets, the extremal element, the conditions of the existence and the unity, the properties of the function of the distance.*

Отримано: 29.09.2020

УДК 519.87+519.176
DOI: 10.32626/2308-5878.2020-21.99-114

Н. А. Гук, д-р фіз.-мат. наук, професор,
С. В. Диханов, аспірант,
І. О. Долотов, магістрант

Дніпровський національний університет
імені Олеся Гончара, м. Дніпро

АНАЛІЗ СТРУКТУРИ САЙТУ З ВИКОРИСТАННЯМ ПОНЯТТЯ МОДУЛЯРНОСТІ

У роботі здійснюється аналіз структури веб-сайту, який має ієрархічну організацію розділів. Ієрархічна структура передбачає розбиття всієї інформації на окремі категорії за темами. Гіпертекстову модель веб-сайту зображено математичною моделлю у вигляді орієнтованого незваженого веб-графу, вершинами якого є web-сторінки, а ребрами — гіперпосилання між ними. Висувається гіпотеза, що сторінка, яка посилається на іншу, має з нею тематичну схожість, а групи пов'язаних між собою сторінок утворюють кластер.

З використанням локальної інформації про гіперпосилання між сторінками сайту здійснюється кластеризація сторінок. Для оцінки якості кластеризації використовується функціонал модулярності, який характеризує різницю між долею ребер у середині кластеру при заданому розбитті та долею ребер, якщо б вони були сгенеровані в графі випадковим чином. Випадковий граф обирається у якості нульової моделі.

Для максимізації значень функціоналу модулярності застосовується Лувенський метод. Розроблено жадібну схему алгоритму, яка зводить задачу до послідовності локальних задач оптимізації. Пропонується здійснювати відбір пар «вершина — кластер», з'єднання яких призводить до збільшення значення функціоналу модулярності. Для довільної вершини гра-

