УДК 517.928, 517.929
DOI: 10.32626/2308-5878.2020-21.127-137

І. Д. Скутар, асистент,
Я. Й. Бігун, д-р фіз.-мат. наук, професор

Чернівецький національний університет
імені Юрія Федьковича, м. Чернівці

ОБҐРУНТУВАННЯ МЕТОДУ УСЕРЕДНЕННЯ ДЛЯ НЕЛОКАЛЬНОЇ *m*-ЧАСТОТНОЇ ЗАДАЧІ ІЗ ЛІНІЙНО ПЕРЕТВОРЕНИМИ АРГУМЕНТАМИ

Досліджено систему диференціальних рівнянь із запізненням на скінченному проміжку із повільними та швидкими змінними. Запізнення в системі характеризується лінійно перетвореними аргументами у повільних і в швидких змінних. Для повільних і швидких змінних задано інтегральні умови. Характерною особливістю таких систем є поява резонансів у процесі еволюції. Умова резонансу в системі містить залежність від запізнень у швидких змінних.

Ефективним методом дослідження багаточастотних систем є метод усереднення, обґрунтування якого для систем без запізнення аргументу отримано в працях В.І. Арнольда, Є. О. Гребенікова, М. М. Хапаєва, А. М. Самойленка, Р. І. Петришина. У даній роботі використано методику, запропоновану А. М. Самойленком, яка ґрунтується на оцінці осциляційних інтегралів. У даній роботі процедура усереднення за швидкими змінними здійснена як у системі рівнянь, так і в інтегральних умовах. В усередненій задачі змінні відокремлені й задача для повільних змінних розв'язується незалежно від швидких змінних. Знаходження швидких змінних зводиться до задачі інтегрування.

Доведено існування єдиного розвитку задачі в класі неперервно-диференційованих функцій. Отримано оцінку похибки методу усереднення, яка явно залежить від малого параметра та кількості швидких змінних і лінійно перетворених аргументів у них. Також знайдено оцінку величини малого параметра. Умова проходження резонансних зон зводиться до перевірки відмінності від нуля визначника Вронського, побудованого системою частот із врахуванням кількості лінійно перетворених аргументів.

Побудовано приклад одночастотної системи з інтегральними умовами, на якому проілюстровано отриманий результат, одержано оцінки похибки та величини малого параметра.

Ключові слова: *лінійно перетворений аргумент, метод усереднення, малий параметр, резонанс, інтегральна умова, оцінка похибки.*

Вступ. Багаточастотні системи диференціальних рівнянь досліджувалися у працях В. І. Арнольда [1], Є. О. Гребенікова [2], М. М. Хапаєва [3], А. І. Нейштадта [4] та ін. Значний внесок у дослідження таких систем належить київській школі з нелінійних коливань і відображено в працях М.М. Боголюбова і Ю. О. Митропольського [5], А. М. Самойленка [6, 7]. Зокрема, новий підхід у дослідженні багаточастотних систем, які в процесі еволюції проходять через резонанс, висвітлено в працях А. М. Самойленка і Р. І. Петришина [7, 8].

Системи із m частотами і запізненням, яке задається лінійно перетвореними аргументами на $[0, L]$ у резонансному випадку з інтегральними умовами досліджені у працях [9, 10], Такого типу рівняння застосовуються у багатьох прикладних задачах, наприклад, при моделюванні зміни величини струму під час проходження електровозом контактних опор [11].

Значна кількість праць присвячена задачам із нелокальними умовами. У праці [12] досліджувалися властивості розв'язку скалярного диференціального рівняння другого порядку із сталим запізненням й інтегральною умовою.

$$u(1) = \int_0^1 u(t)\, d\beta(t).$$

Задачі з іншими інтегральними умовами вивчалися в [13, 14] та ін.

Постановка задачі. У даній роботі розглянуто m-частотну систему диференціальних рівнянь із лінійно перетвореними аргументами вигляду

$$\frac{da}{d\tau} = X\left(\tau, a_\Lambda, \varphi_\Theta\right), \tag{1}$$

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{\omega(\tau)}{\varepsilon} + Y\left(\tau, a_\Lambda, \varphi_\Theta\right), \tag{2}$$

де $\tau \in [0, L]$, малий параметр $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, $\varepsilon_0 \ll 1$, $a_{\lambda_i}(\tau) = a(\lambda_i \tau)$, $\Lambda = \left(\lambda_1, \ldots, \lambda_p\right)$, $0 < \lambda_1 < \ldots < \lambda_p \le 1$, $\varphi_{\theta_j}(\tau) = \varphi\left(\theta_j \tau\right)$, $\Theta = \left(\theta_1, \ldots, \theta_q\right)$, $0 < \theta_1 < \ldots < \theta_q \le 1$. Вектор-функції X, Y і ω достатньо гладкі за всіма аргументами при $\tau \in [0, L]$, $a \in D$, D — обмежена замкнена опукла область в $\mathbb{R}^n$, $\varphi \in \mathbb{R}^m, m \ge 1$, 2π-періодичні за змінними φ_{θ_j}.

Для системи рівнянь (1), (2) задано інтегральні умови:

$$a(0) = f\left(\int_0^L A(\tau)\, a(\tau)\, d\tau\right), \tag{3}$$

$$\varphi(0) = \int_0^L h\left(\tau, a_\Lambda, \varphi_\Theta\right) d\tau, \tag{4}$$

де вектор функція h того ж класу, що й X і Y, $A(\tau)$ — матриця порядку n.

Усереднена за швидкими змінними задача набуває вигляду

$$\frac{d\bar{a}}{d\tau} = X\left(\tau, \bar{a}_\Lambda\right), \tag{5}$$

$$\frac{d\bar{\varphi}}{d\tau} = \frac{\omega(\tau)}{\varepsilon} + Y\left(\tau, \bar{a}_\Lambda\right), \tag{6}$$

$$\bar{a}(0) = f\left(\int_0^L A(\tau)\bar{a}(\tau)\,d\tau\right), \tag{7}$$

$$\bar{\varphi}(0) = \int_0^L h_0\left(\tau, \bar{a}_\Lambda\right)d\tau. \tag{8}$$

Отримана після усереднення задача значно простіша, ніж точна (1)-(4) , оскільки окремо розв'язується задача (5), (7). Якщо розв'язок $\bar{a} := \bar{a}(\tau; \bar{y})$, $\bar{a}(0; \bar{y}) = \bar{y}$, $\tau \in [0, L]$ знайдено, то розв'язок $\bar{\varphi} := \bar{\varphi}(\tau; \bar{y}, \bar{\psi}, \varepsilon)$, $\bar{\varphi}(0; \bar{y}, \bar{\psi}, \varepsilon) = \bar{\psi}$, знаходиться шляхом інтегрування. Задача полягає у знаходженні достатніх умов існування та єдиності розв'язку задачі (1)-(4) та отримання оцінки відхилення розв'язків задач точної й усередненої задач, яка явно залежить від малого параметра ε.

Позначення. Введемо такі позначення:

$$\tilde{a}(\tau) := \bar{a}(\tau; \bar{y} + \mu),\ z(a) := \int_0^L A(\tau)a(\tau)\,d\tau;$$

$V(\tau)$ — визначник Вронського порядку mq, побудований за системою функцій $\{\omega(\theta_1\tau), \ldots, \omega(\theta_q\tau)\}$.

Відомо [10], що

$$\left\|\tilde{a}(\tau) - \bar{a}(\tau)\right\| \le c_1\|\mu\| \le \rho/2, \tag{9}$$

якщо

$$\|\mu\| \le (2c_1)^{-1}\rho,\ c_1 = L\exp(p\sigma_1). \tag{10}$$

Також виконується оцінка

$$\begin{gathered}\left\|\kappa(\tau; y, \psi, \varepsilon) - \bar{\kappa}(\tau; y, \psi, \varepsilon)\right\| := \left\|a(\tau; y, \psi, \varepsilon) - \bar{a}(\tau; y)\right\| + \\ + \left\|\varphi(\tau; y, \psi, \varepsilon) - \bar{\varphi}(\tau; y, \psi, \varepsilon)\right\| \le c_2\varepsilon^\alpha,\ \tau \in [0, L],\end{gathered} \tag{11}$$

де $\alpha = (mq)^{-1}$, $\varepsilon \le \varepsilon_1 \le \varepsilon_0$, $c_2 > 0$ і не залежить від ε. Така ж оцінка правильна і для похідних за початковими значеннями y і ψ [10].

Нехай I — одинична матриця порядку n,

$$P\left(\bar{y}\right) := I - \frac{\partial f\left(\bar{z}\right)}{\partial z}\int_0^L A\left(\tau\right)\frac{\partial \bar{a}\left(\tau,\bar{y}\right)}{\partial \bar{y}}d\tau,$$

$$\gamma_k\left(\tau\right) := \sum_{\nu=1}^{q}\left(k_\nu,\,\omega\left(\theta_\nu\tau\right)\right)\theta_\nu.$$

Резонанс в системі (1), (2) у точці τ задається умовою

$$\gamma_k\left(\tau\right) = 0,\, k \neq 0.$$

Центральною умовою в обґрунтуванні методу усереднення є умова «незастрягання» системи в малому околі резонансів і зводиться до накладання деяких умов на вектор частот.

Існування єдиного розв'язку та обґрунтування методу усереднення.

Терема. Нехай виконуються такі умови:

1) $\left(X,Y,g\right) \in C^{2,2,mq+2}_{\tau,a_\Lambda,\varphi_\Theta}\left(G,\sigma_1\right), G = \left[0,L\right]\times D^p \times R^{mq}$;
2) $\omega \in C^{mq-1}\left[0,L\right]$;
3) визначник Вронського $V\left(\tau\right)$ відмінний від нуля на $[0, L]$;
4) існує єдиний розв'язок усередненої задачі (5)-(8), компонента $\bar{a}\left(\tau;\bar{y}\right)$ якого належить області D із деяким ρ-околом;
5) матриця $P\left(\bar{y}\right)$ невироджена і $\left\|P^{-1}\left(\bar{y}\right)\right\| \le \sigma_2$;
6) $A_{ij} \in C\left[0,L\right],\ f \in C^2\left(G_1\right),\ \left\|\frac{\partial f}{\partial z}\right\| \le \sigma_3;\ \left\|\frac{\partial f}{\partial z_i \partial z_j}\right\| \le \sigma_4,\ i,j = \overline{1,n}.$

Тоді для кожного досить малого $\varepsilon^* \in \left(0,\varepsilon_0\right]$, існує єдиний розв'язок задачі (1)-(4) і виконується оцінка

$$\left\|\kappa\left(\tau;y,\psi,\varepsilon\right) - \bar{\kappa}\left(\tau;\bar{y},\bar{\psi},\varepsilon\right)\right\| \le c_{12}\varepsilon^\alpha, \forall\tau \in \left[0,L\right].$$

Доведення. Нехай $\varepsilon \le \varepsilon_2 = \min\left(\varepsilon_1,\left(\rho/2c_2\right)^{1/\alpha}\right)$. Тоді в класі $C^1\left[0,L\right]$ існує єдиний розв'язок задачі (1)-(4) із початковими умовами $\left(y,\psi\right) := \left(\bar{y}+\mu,\bar{\psi}+\xi\right)$, визначений при $\tau \in \left[0,L\right]$ і справджується оцінка [9]

$$\left\|\kappa\left(\tau;\bar{y}+\mu,\bar{\psi}+\xi,\varepsilon\right) - \bar{\kappa}\left(\tau;\bar{y}+\mu,\bar{\psi}+\xi,\varepsilon\right)\right\| \le c_2\varepsilon^\alpha/2. \qquad (12)$$

Покажемо, що цей розв'язок задовольняє для $\varepsilon \le \varepsilon_3$ інтегральну умову (3).

Із умов (1), (5) теореми маємо

$$\mu = f(z) - f(\bar{z}) = \frac{\partial f(\bar{z})}{\partial z}(z-\tilde{z}) + \frac{\partial f(\bar{z})}{\partial z}(\tilde{z}-\bar{z}) + R_1(\mu,\xi,\varepsilon),$$

$$\tilde{z}-\bar{z} = \int_0^L A(\tau)(\tilde{a}-\bar{a})\,d\tau = \int_0^L A(\tau)\frac{\partial \bar{a}}{\partial y}(\tau;\bar{y})\mu d\tau + R_2(\mu),$$

де

$$R_1(\mu,\xi,\varepsilon) = f(z) - f(\bar{z}) - \frac{\partial f(\bar{z})}{\partial z}(z-\bar{z}),$$

$$R_2(\mu) = \int_0^L A(\tau)[\tilde{a}-\bar{a}-\frac{\partial \bar{a}(\tau;\bar{y})}{\partial y}]d\tau.$$

Оскільки матриця $P(\bar{y})$ невироджена, то

$$\mu = \Phi_1(\mu,\xi,\varepsilon) := P^{-1}(\bar{y})\left[\frac{\partial f(\bar{z})}{\partial z}(z-\tilde{z}+R_2(\mu)) + R_1(\mu,\xi,\varepsilon)\right].$$

На підставі оцінок для розкладів вектор-функцій із монографії [2], одержимо

$$\|R_1\| \le \frac{\sigma_4 n^2}{2}\|z-\bar{z}\|^2 \le \frac{\sigma_4\sigma_5 n^2}{2}(\|a-\tilde{a}\|+\|\tilde{a}-\bar{a}\|)^2.$$

Тоді на підставі (9) і (12) одержимо

$$\|R_1(\mu,\xi,\varepsilon)\| \le c_3\left(c_2^2\varepsilon^{2\alpha} + 4c_1c_2\varepsilon^{\alpha}\|\mu\| + 4c_1\|\mu\|^2\right),\ c_3 = \sigma_4\sigma_5 n^2/8.$$

Аналогічно одержимо

$$\|R_2(\mu)\| \le \sigma_3 c_4\|\mu\|^2,\ c_4 = const > 0.$$

Нехай $c_5 = c_2\sigma_2\sigma_3\sigma_5,\ \ \mu \le c_5\varepsilon^{\alpha},\ \ \varepsilon \le \varepsilon_3 = \min(\varepsilon_2, \bar{\varepsilon}_3),$

$$\bar{\varepsilon}_3 = \min\left(\rho(2c_1c_5)^{-1},\ c_5\left(4c_2^2c_3\sigma_2\right)^{-1},\ (32c_1c_2c_3)^{-1}\right).$$

Тоді

$$\|\Phi_1(\mu,\xi,\varepsilon)\| \le 0.5\sigma_2[c_2\sigma_3\sigma_5\varepsilon^{\alpha} + 2c_2^2c_3\varepsilon^{2\alpha} + 8c_1c_2c_3\varepsilon^{\alpha}\|\mu\| +$$
$$+2(c_4\sigma_3\sigma_4 + 4c_1^2c_3)\|\mu\|^2\ ] \le c_5\varepsilon^{\alpha}.$$

Отже, $\Phi_1 : S_1 \to S_1$, де $S_1 = \left\{\|\mu\| : \|\mu\| \le c_5\varepsilon^{\alpha}\right\}.$

Покажемо, що відображення Φ_1 — стискаюче. Маємо,

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial \mu} = P^{-1}(\bar{y})\left[\frac{\partial f(\bar{z})}{\partial z}\frac{\partial}{\partial \mu}(z-\tilde{z}) + \frac{\partial f(\bar{z})}{\partial z}\frac{\partial R_2(\mu)}{\partial \mu} + \frac{\partial R_1}{\partial \mu}\right].$$

Оскільки $\left\|\frac{\partial R_2}{\partial \mu}\right\| = O\left(\|\mu\|\right)$, $\left\|\frac{\partial R_1}{\partial \mu}\right\| = O\left(\|\mu\| + \varepsilon^{\alpha}\right)$, то

$$\left\|\frac{\partial \Phi_1}{\partial \mu}\right\| \le \sigma_2 \left[c_2\sigma_3\varepsilon^{\alpha} / 2 + c_1\sigma_3 \|\mu\| + c_7\left(\|\mu\| + \varepsilon^{\alpha}\right)\right] \le \frac{1}{2},$$

якщо $\varepsilon \le \varepsilon_4 = \min\left(\varepsilon_3, \left[\sigma_2\left(c_2\sigma_3 + 2c_5\left(c_1\sigma_3 + c_7 + 1\right)\right)\right]^{-mq}\right)$.

Отже, для кожного ξ і ε існує єдина нерухома точка μ відображення Φ_1, таке що $\|\mu\| \le c_5\varepsilon^{\alpha}$.

Розглянемо інтегральні умови (4) і (8). Маємо

$$\xi = \Phi_2(\xi(\mu), \varepsilon) := \int_0^L \left[g\left(\tau, a_{\Lambda}(\tau), \varphi_{\Theta}(\tau)\right) - g_0\left(\tau, \bar{a}_{\Lambda}(\tau)\right)\right] d\tau =$$

$$= \sum_{\|k\|>0} \int_0^L g_k\left(\tau, \bar{a}_{\Lambda}(\tau)\right) exp\left[i\sum_{\nu=1}^{q}\left(\kappa_{\nu}, \varphi_{\theta_{\nu}}\right)\right] d\tau +$$

$$+\int_0^L \left[g_0\left(\tau, a_{\Lambda}(\tau)\right) - g_0\left(\tau, \tilde{a}_{\Lambda}(\tau)\right)\right] d\tau +$$

$$+\int_0^L \left[g_0\left(\tau, \tilde{a}_{\Lambda}(\tau)\right) - g_0\left(\tau, \bar{a}_{\Lambda}(\tau)\right)\right] = R_3 + R_4 + R_5.$$

Із гладкості вектор-функції g за змінними $\tau, a_{\lambda_{\nu}}, \nu = \overline{1, p}$, до другого порядку і за змінними $\varphi_{\theta_{\nu}}, \nu = \overline{1, q}$ до порядку *mq+2* для осциляційних інтегралів

$$I_k\left(\tau; y, \psi, \varepsilon\right) = \int_0^{\tau} g_k\left(s, a_{\Lambda}\left(s; y, \psi, \varepsilon\right)\right) exp\left[\frac{i}{\varepsilon}\int_0^s \gamma_{\theta}\left(s_1\right) ds_1\right] ds$$

для $\varepsilon \le \varepsilon_5$ правильні оцінки [9]

$$\left\| I_k\left(\tau, y, \psi, \varepsilon\right)\right\| \le \sigma_6\varepsilon^{\alpha}[(1 + \frac{1}{\|\kappa\|_{\theta}})\sup_{\tau,\varepsilon}\left\| g_k\left(s, a_{\Lambda}\left(s, y, \psi, \varepsilon\right)\right)\right\| + \frac{1}{\|\kappa\|_{\theta}}\sup_{\tau,\varepsilon}\left\|\frac{\partial g_k\left(s, a_{\Lambda}\left(s, y, \psi, \varepsilon\right)\right)}{\partial s}\right\|], \qquad (13)$$

де $\|k\|_{\Theta} := \sum_{\nu=1}^{q} \theta_{\nu} \|k_{\nu}\|$.

На підставі оцінки (13) й аналогічної оцінки для похідної $I_k\left(\tau, y, \psi, \varepsilon\right)$ за змінними ψ одержимо

$$\left\| R_3\left(\mu,\xi,\varepsilon\right)\right\| \le c_8\varepsilon^{\alpha},\ \varepsilon \le \varepsilon_5. \qquad (14)$$

Застосувавши оцінку (12), отримаємо

$$\left\| R_2\left(\mu,\xi,\varepsilon\right)\right\| \le \sigma_1\sum_{\nu=1}^{p}\int_0^L \left\|A(\tau)\right\| \left\| a_{\lambda_j}(\tau)-\tilde a_{\lambda_j}(\tau)\right\| d\tau \le c_2\sigma_1\sigma_5\varepsilon^{\alpha}/2. \qquad (15)$$

На підставі оцінки (9) маємо

$$\left\| R_3\right\| \le c_1\sigma_1\sigma_5\left\|\mu\right\| \le c_1c_5\sigma_1\sigma_5\varepsilon^{\alpha}, \qquad (16)$$

якщо $\varepsilon \le \left(2c_2\sigma_3\right)^{-mq} = \varepsilon_6$.

Отже, $\left\|\Phi_2\left(\xi(\mu),\varepsilon\right)\right\| \le \left(c_8 + \dfrac{\sigma_1\sigma_5\left(c_2+2c_1c_5\right)}{2}\right)\varepsilon^{\alpha} =: c_9\varepsilon^{\alpha}$.

Для $\xi \in \mathbb{R}^m$ такого, що $\xi \le c_9\varepsilon^{\alpha}$ маємо

$$\Phi_2 : S_2 \to S_2,\ S_2 = \left\{\xi : \left\|\xi\right\| \le c_9\varepsilon^{\alpha}\right\}.$$

Розглянемо матричну функцію

$$\frac{\partial\Phi_2\left(\xi(\mu),\varepsilon\right)}{\partial\xi} = \frac{\partial}{\partial\xi}R_3\left(\mu,\xi,\varepsilon\right) + \frac{\partial}{\partial\xi}R_2\left(\mu,\xi,\varepsilon\right).$$

Із оцінки похідної по ξ осциляційного інтеграла й відхилення розв’язків $a\left(\tau,\overline{y}+\mu,\overline{\psi}+\xi,\varepsilon\right)-\overline{a}\left(\tau,\overline{y}+\mu,\overline{\psi}+\xi,\varepsilon\right)$ одержимо

$$\left\|\frac{\partial\Phi_2\left(\xi(\mu),\varepsilon\right)}{\partial\xi}\right\| \le c_{10}\varepsilon^{\alpha} + c_1\sigma_1\sigma_5\varepsilon^{\alpha} =: c_{11}\varepsilon^{\alpha}.$$

Отже, $\forall\varepsilon \le \varepsilon^* = \min\left(\varepsilon_4,\varepsilon_5,\varepsilon_6,\left(2c_{11}\right)^{-mq}\right)$ на підставі теореми про стискаючі відображення [15] існує єдине значення $\left(\mu,\xi\right)$ таке, що $\left\|\mu\right\| \le c_5\varepsilon^{\alpha}, \left\|\xi\right\| \le c_9\varepsilon^{\alpha}$ для якого задовольняються умови (2) і (3), тобто існує єдиний розв’язок задачі (1)-(4).

Відповідна оцінка для похибки методу усереднення випливає із такої нерівності

$$\left\|\kappa\left(\tau,y,\psi,\varepsilon\right)-\overline{\kappa}\left(\tau,\overline{y},\overline{\psi},\varepsilon\right)\right\| \le \left\|\kappa\left(\tau,y,\psi,\varepsilon\right)-\tilde{\kappa}\left(\tau,\overline{y},\overline{\psi},\varepsilon\right)\right\| +$$

$$+\left\|\tilde{\kappa}\left(\tau,y,\psi,\varepsilon\right)-\overline{\kappa}\left(\tau,\overline{y},\overline{\psi},\varepsilon\right)\right\| \le \frac{1}{2}c_2\varepsilon^{\alpha} + c_1\varepsilon^{\alpha} =: c_{12}\varepsilon^{\alpha}.$$

Теорему доведено.

Приклад. Розглянемо одночастотну систему з одним лінійно перетвореним аргументом

$$\frac{da}{d\tau} = b_1 + b_2\cos\left(k\varphi + l\varphi_{\theta}\right),\ \frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{1}{\varepsilon}\left(d_1 + d_2\tau\right).$$

де $0 < k < -l, \theta = -k / l$, b_ν і d_ν — додатні числа, $\nu = 1, 2$.

Інтегральні умови мають вигляд

$$a(0) = A\int_0^L a(\tau)\,d\tau,$$

$$\varphi(0) = \beta\int_0^L \cos\left(k\varphi + l\varphi_\theta\right)d\tau,$$

де сталі $A > 0$, $\beta > 0$, $1 - \alpha L \neq 0$.

Резонанс досягається при $\tau = 0$, оскільки $\gamma_{kl}(\tau) = d_2\left(k + \theta^2 l\right)\tau$. Визначник Вронського $V(\tau) = d_1 d_2 (1 - \theta) \neq 0$, тобто умова 3 теореми виконується, як і 1, 2 та 4.

Розв’язки точної задачі і відповідної їй усередненої задачі

$$\frac{d\bar{a}}{d\tau} = b_1,\ \bar{a}(0) = A\int_0^L \bar{a}(\tau)\,d\tau,$$

$$\frac{d\bar{\varphi}}{d\tau} = \frac{1}{\varepsilon}\left(d_1 + d_2\tau\right),\ \bar{\varphi}(0) = 0,$$

набувають вигляду

$$a(\tau, \mu, \xi, \varepsilon) = \bar{y} + \mu + b_1\tau + b_2\int_0^T \cos\left(\frac{c\tau^2}{\varepsilon} + (k + l)\xi\right)d\tau,$$

$$\varphi(\tau, \xi, \varepsilon) = \xi + \frac{d_1 + d_2\tau}{\varepsilon} + \int_0^T \cos\left(\frac{c\tau^2}{\varepsilon} + (k + l)\xi\right)d\tau,$$

$$\bar{a}(\tau) = \bar{y} + b_1\tau,\ \ \bar{\varphi}(\tau, \varepsilon) = \frac{d_1 + d_2\tau}{\varepsilon},$$

де $y = \dfrac{Ab_1L^2}{2(1 - AL)}$, $c = d_2\left(k + l\theta^2\right)/2$.

Початкове значення знаходиться із рівняння

$$\xi = \beta\int_0^1 \cos\left(\frac{c\tau^2}{\varepsilon} + (k + l)\xi\right)d\tau =: \Phi_2(\xi).$$

Якщо

$$\varepsilon \le \varepsilon_0 = c / \left(8\pi\beta^2 (k + l)^2\right),$$

то з асимптотики інтеграла Френеля [16] випливає, що виконується умова стисту відображення Φ_2, тобто існує єдина нерухома точка з відображення $\Phi_2 : S_2 \to S_2$. Тут $S_2 = \left\{\xi : |\xi| \le c_1\sqrt{\varepsilon},\ c_1 = \beta\sqrt{\pi} / \sqrt{2c}\right\}$.

Значення набуває вигляду

$$\mu := \Phi_1(\xi) = \frac{A}{|1 - AL|} \int_0^1 \cos\left(\frac{c\tau^2}{\varepsilon} + (k+l)\xi \right) d\tau.$$

З асимптотики інтеграла Френеля випливає, що при $\tau = 0$

$$\left| a(\tau, \mu, \xi, \varepsilon) - \bar{a}(\tau) \right| \le c_2 \sqrt{\varepsilon},$$

$$\left| \varphi(\tau, \xi, \varepsilon) - \bar{\varphi}(\tau, \varepsilon) \right| \le c_1 \sqrt{\varepsilon},$$

де $c_2 = \dfrac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2|c|}} \left(\dfrac{A}{|1 - AL|} + |b_2| \right).$

Зауважимо, що для одночастотної системи без запізнення оцінка похибки має порядок ε, при $\varepsilon \to 0$.

Висновки. Для спрощення m-частотної системи диференціальних рівнянь із лінійно перетвореними аргументами й нелінійними інтегральними умовами застосовано процедуру усереднення за швидкими змінними. Доведено існування єдиного розв’язку точної задачі. Одержано оцінку похибки методу усереднення, яка явно залежить від малого параметра та кількості швидких змінних і лінійно перетворених аргументів у них. Побудовано приклад одночастотної системи з інтегральними умовами, на якому проілюстровано отриманий результат.

Список використаних джерел:

1. Арнольд В. И., Козлов В. В., Нейштадт А. И. Математические аспекты классической и небесной механики. Москва: УРСС, 2002. 416 с.
2. Гребеников Е. А., Рябов Ю. А. Новые качественные методы в небесной механике. Москва: Наука, 1971. 444 с.
3. Хапаев М. М. Усреднение в теории устойчивости. Москва: Наука, 1986.
4. Neishtadt A. I. Averaging, passage through resonances and capture into resonance in two-frequency system. *Russian Mathematical Surveys.* 2014, Vol. 69 (5). P. 771-843.
5. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. Москва: Наука, 1974. 503 с.
6. Самойленко А. М. К вопросу обоснования метода усреднения для многочастотных колебательных систем. *Дифференц. уравнения*. 1987. Вип. 23 (2). С. 267-278.
7. Самойленко А. М., Петришин Р. І. Математичні аспекти теорії нелінійних коливань. Київ: Наукова думка, 2004. 475 с.
8. Самойленко А. М., Петришин Р. И. Метод усреднения в некоторых краевых задачах. *Дифференц. уравнения.* 1989. Вип. 25 (6). С. 956-964.
9. Бігун Я. Й. Існування розв’язку та усереднення багатоточкових крайових задач для багаточастотних систем із лінійно перетвореним аргументом. *Нелінійні коливання*. 2008. Вип. 11 (4). С. 462-471.

10. Бігун Я. Й., Краснокутська І. В., Петришин Р. І. Усереднення в багаточастотних системах із лінійно перетвореними аргументами і багатоточковими та інтегральними умовами. *Буковинський математичний журнал.* 2016. Вип. 4 (3-4). С. 30-35.
11. Гребенщиков Б. Г., Ложников А. Б. Стабилизация системы, содержащей постоянное и линейное запаздывание. *Дифференц. уравнения.* 2004. Вип. 40 (1-2). С. 1587-1595.
12. Dingyong Rai, Yuantong Xu. Positive solution and eigenvalue intervals of nonlocal boundary value problem with delays. *Math. Analysis and Appl.* 2007. Vol. 334. P. 1152-1166.
13. Henderson J., Rodica L. Boundary Value Problems for Systems of Differential, Difference and Fractional Equation. Kluwer, Dordrecht-Boston-London, 2016.
14. Jankowski T. First-order differential equations with nonlocal boundary conditions. *Dynamic Systems and Applications*. 2015. Vol. 24. P. 195-210.
15. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. Москва: Наука, 1981. 544 с.
16. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Москва: Наука, 1974. Т. 2. 296 с.

SUBSTANTIATION OF THE AVERAGING METHOD FOR A NONLOCAL *m*-FREQUENCY PROBLEM WITH LINEARLY TRANSFORMED ARGUMENTS

The system of differential equations with delay on a finite interval with slow and fast variables is investigated. The delay in the system is characterized by linearly transformed arguments in slow and fast variables. Integral conditions are given for slow and fast variables. A characteristic feature of such systems is the appearance of resonances in the process of evolution. The condition for the resonance in the system contains a dependence on the delays in fast variables.

An effective method for the research of multi-frequency systems is the method of averaging, the substantiation of which for systems without delay of the argument is obtained in the works of V. I. Arnold, E. O. Grebenikov, M. M. Khapaiev, A. M. Samoilenko, R. I. Petryshyn. This paper uses the method proposed by A. M. Samoilenko which is based on the estimation of oscillating integrals. In this paper, the procedure of averaging over fast variables is carried out both in the system of equations and in integral conditions. In the average problem, the variables are separated and the problem for slow variables is solved independently of the fast variables. Finding fast variables is reduced to the problem of integration.

The existence of a unique solution for the problem in the class of continuously differentiated functions is proved. The accuracy estimation of the averaging method is obtained, which clearly depends on the small parameter and the number of fast variables and linearly transformed arguments in them. An estimate of the value of the small parameter was also found. The condition of passing resonant zones is reduced to checking the difference from zero of the Vronsky determinant, constructed by the frequency system taking into account the number of linearly transformed arguments.

An example of a single-frequency system with integral conditions is constructed, on which the obtained result is illustrated; accuracy estimation and values of the small parameter are obtained.

Key words: *linearly transformed argument, averaging method, small parameter, resonance, integral condition, estimation of accuracy.*

Отримано: 8.10.2020

УДК 517.9
DOI: 10.32626/2308-5878.2020-21.137-144

Ю. В. Теплінський, д-р фіз.-мат. наук, професор

Кам'янець-Подільський національний університет
імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський

НАБЛИЖЕНИЙ МЕТОД ПОБУДОВИ МАЙЖЕ-ПЕРІОДИЧНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ ЛІНІЙНИХ СИСТЕМ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ, ВИЗНАЧЕНИХ НА НЕСКІНЧЕННОВИМІРНИХ ТОРАХ

Відомо, що велика кількість прикладних задач у різних розділах математики, фізики, техніки потребує досліджень проблем існування коливних розв'язків диференціальних систем, що є їх математичними моделями. У наш час коливними рухами динамічних систем за В. В. Немицьким [1] називають їх рекурентні рухи. Як відомо з теорем Біркгофа, траєкторії таких рухів містять мінімальні компактні множини динамічних систем. До класу рекурентних рухів зокрема належать квазіперіодичні та майже-періодичні рухи. Широко відомі фундаментальні теореми Амеріо і Фавара [2], що стосуються існування майже-періодичних розв'язків нелінійних та лінійних систем. Становить також інтерес дослідження поведінки динамічної системи в околі рекурентної траєкторії. Пізніше стало зрозумілим, що питання існування таких траєкторій тісно пов'язане з існуванням у таких систем інваріантних торів, для побудови яких зручно застосовувати метод функції Гріна-Самойленка [1, 3, 4]. Тут розглядається лінійна система диференціальних рівнянь, яка визначена на нескінченновимірному торі (випадок зліченного частотного базису щодо кутової змінної), причому відносно нормальної змінної ця система може бути як скінченною, так і зліченною. Задача полягає у відшуканні достатніх умов, при яких задана система рівнянь має сім'ю майже-періодичних у сенсі Бора розв'язків, кожен з яких можна наблизити із наперед заданою точністю квазіперіодичним у сенсі Боля розв'язком відповідної укороченої за кутовою змінною системи рівнянь, що визначена на скінченновимірному торі.

Ключові слова: *інваріантний тор, функція Гріна-Самойленка, квазіперіодичні та майже-періодичні функції.*