

УДК 519.632.4.001.57+517.54

**А. Я. Бомба, В. І. Гаврилюк, Д. О. Пригорницький**

*Рівненський державний гуманітарний університет*

## **ЧИСЕЛЬНЕ РОЗВ'ЯЗАННЯ ОБЕРНЕНИХ НЕЛІНІЙНИХ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ НА КВАЗІКОНФОРМНІ ВІДОБРАЖЕННЯ ДЛЯ ДВОЗВ'ЯЗНИХ ОБЛАСТЕЙ З ВІЛЬНИМИ ПОВЕРХНЯМИ**

Алгоритм чисельного розв'язання обернених нелінійних модельних задач на квазіконформні відображення для двозв'язних пористих деформівних обмежених еквіпотенціальними поверхнями та поверхнями течії середовищ за умов зворотнього впливу характеристик процесу на характеристики середовища модифіковано на випадки областей з вільними поверхнями.

**Ключові слова:** *чисельне розв'язання, нелінійні задачі, квазіконформні відображення, деформівні середовища, вільні поверхні.*

**Вступ.** В роботах [1, 2] побудовані алгоритми чисельного обернення розв'язків нелінійних крайових задач на квазіконформні відображення в областях, обмежених лініями течії та еквіквізипотенціальними лініями – математичних моделей процесів руху рідин, газів, заряджених частинок і т. ін. в однорідних і неоднорідних анізотропних середовищах. Зокрема, у роботі [2] розв'язана задача моделювання відповідного процесу у середовищах, схильних до деформацій, де компоненти тензора провідності (зокрема фільтрації) приймалися залежними не тільки від координат біжучої точки області, але й від шуканих функцій течії та потенціалу. Запропонований підхід дозволяє знаходити паралельно характеристичну функцію течії, квазікомплексний потенціал, повну витрату і поле швидкостей та побудувати динамічну сітку, що автоматично вирішує проблему розбиття області у випадках, якщо, наприклад, внутрішній контур має малі розміри в порівнянні із зовнішнім або обидва контури є сильно “хвилястими”.

На даний час актуальними і мало вивченими є задачі моделювання впливу градієнтів на вихідні характеристики середовища (в першу чергу на коефіцієнт провідності). Так, при перевищенні діючими градієнтами деякого їх критичного значення у придренній (чи присвердловинній) зоні, відбувається втрата фільтраційної міцності ґрунту за рахунок переміщення дрібних його частинок (суфозії), що веде до зміни коефіцієнта фільтрації. В роботі [4] проведено математичне моделювання нелінійних процесів осесиметричної фільтрації з урахуванням суфозійних явищ. Зокрема, розроблено методика розв'язання відповідних нелінійних задач з післядією руху води до дрени (свердловини) і із зволожувача в ґрунт, отримані аналітичні вирази для знаходження фільтраційної витрати, напорів і їх градієнтів,

встановлено співвідношення між характеристиками недеформованого середовища та середовища, що деформується в залежності від гідродинамічної дії фільтраційного потоку та конструктивних параметрів дренажу. У роботі [5] розроблений загальний підхід до розв'язання окреслених вище класів задач. **Метою** даної роботи є модифікація алгоритму чисельного розв'язання даних задач для випадку областей з вільними поверхнями.

**Постановка задачі.** Розглянемо нелінійну задачу на знаходження квазігармонічної функції  $h = h(x, y)$  (напору) в деякій двозв'язній криволінійній області (пористому пласті, що піддається деформації)  $G_Z$  ( $z = x + iy$ ), обмеженій двома замкненими гладкими контурами  $L_* = \{z : f_*(x, y) = 0\}$  – внутрішній,  $L^* = \{z : f^*(x, y) = 0\}$  – зовнішній (рис. 1):

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \chi(h_x, h_y) h(x, y) \frac{\partial h(x, y)}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \chi(h_x, h_y) h(x, y) \frac{\partial h(x, y)}{\partial y} \right) = 0, \\ h|_{L_*} = h_*, \quad h|_{L^*} = h^*, \quad (1)$$

де  $0 \leq h^* < h_* < +\infty$ ,  $\chi = \chi(h_x, h_y)$  – обмежена неперервно диференційовна функція, що характеризує провідність середовища та його схильність до деформації. Як відомо (див., напр., [7]), дана задача є “двовимірним образом” відповідної просторової задачі для області  $G = \{(x, y, \tilde{h}) : (x, y) \in G_z; 0 < \tilde{h} < h(x, y)\}$  з вільною поверхнею  $h = h(x, y)$ .

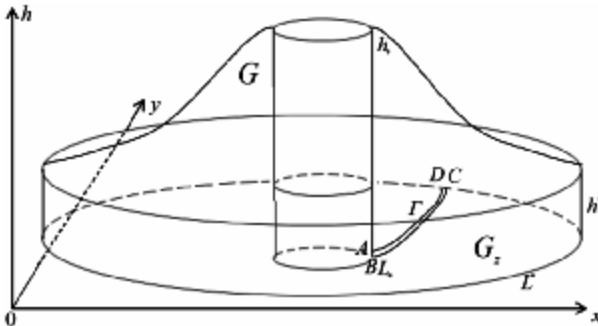


Рис. 1. Фізична область фільтрації з вільною поверхнею

Ввівши потенціал швидкості  $\varphi(x, y) = \frac{h_*^2 - h^2(x, y)}{h_*^2 - h^{*2}}$  та функцію

течії  $\psi = \psi(x, y)$  (квазікомплексно спряжену до  $\varphi = \varphi(x, y)$ ), яка задовольняє рівняння:

$$\frac{\partial}{\partial x}(\kappa^{-1}(\varphi_x, \varphi_y) \cdot \psi_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\kappa^{-1}(\varphi_x, \varphi_y) \cdot \psi_y) = 0, \quad (2)$$

зафіксувавши на внутрішньому контурі деяку точку  $A$  та здійснивши умовний розріз  $\Gamma$  вздовж відповідної лінії течії (через  $AD$  та  $BC$  на рис. 2 позначено відповідно верхній та нижній береги розрізу), приходимо до більш загальної задачі на квазіконформне (конформне у випадку  $\kappa = 1$ ) відображення  $\omega = \omega(z)$  [1-5] утвореної при цьому однозв'язної області  $G_Z^0 = G_Z / \Gamma$  на відповідну область квазікомплексного потенціалу  $G_\omega = \{\omega = \varphi + i\psi : \varphi_* < \varphi < \varphi^*, 0 < \psi < Q\}$  з невідомим параметром  $Q$  (повною витратою):

$$\begin{cases} \kappa(\varphi_x, \varphi_y) \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, & \kappa(\varphi_x, \varphi_y) \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \\ \varphi|_{AB} = 0, & \varphi|_{CD} = 1, \quad \psi|_{AD} = 0, \\ \psi|_{BC} = Q = \oint_{L_*} \kappa(\varphi_x, \varphi_y) \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy - \kappa(\varphi_x, \varphi_y) \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx, \end{cases} \quad (3)$$

де  $\kappa(\varphi_x, \varphi_y) = \chi \left( \frac{-(h_*^2 - h^{*2})}{2\sqrt{h_*^2 - (h_*^2 - h^{*2})\varphi}} \varphi_x, \frac{-(h_*^2 - h^{*2})}{2\sqrt{h_*^2 - (h_*^2 - h^{*2})\varphi}} \varphi_y \right)$ .

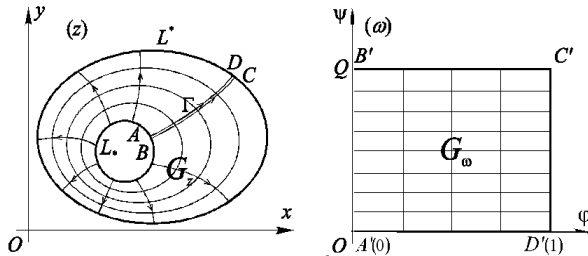


Рис. 2. Область  $G_Z$  та відповідна їй область квазікомплексного потенціалу

Відповідну їй обернену крайову задачу на квазіконформне відображення  $z = z(\omega) = x(\varphi, \psi) + iy(\varphi, \psi)$  області  $G_\omega$  на  $G_Z^0$  аналогічно до [5] запишемо у вигляді:

$$\begin{cases} \kappa \left( \frac{1}{J} \frac{\partial y}{\partial \psi}, -\frac{1}{J} \frac{\partial x}{\partial \psi} \right) \frac{\partial y}{\partial \psi} = \frac{\partial x}{\partial \varphi}, \\ \kappa \left( \frac{1}{J} \frac{\partial y}{\partial \psi}, -\frac{1}{J} \frac{\partial x}{\partial \psi} \right) \frac{\partial x}{\partial \psi} = -\frac{\partial y}{\partial \varphi}, \end{cases} \quad (\varphi, \psi) \in G_\omega, \quad (4)$$

$$\begin{cases} f_*(x(0, \psi), y(0, \psi)) = 0, & f^*(x(1, \psi), y(1, \psi)) = 0, & 0 \leq \psi \leq Q, \\ x(\varphi, 0) = x(\varphi, Q), & y(\varphi, 0) = y(\varphi, Q), & 0 \leq \varphi \leq 1, \end{cases} \quad (5)$$

де  $J = \frac{\partial x}{\partial \varphi} \frac{\partial y}{\partial \psi} - \frac{\partial x}{\partial \psi} \frac{\partial y}{\partial \varphi}$ . При цьому, відповідні рівняння другого порядку для знаходження функцій  $x = x(\varphi, \psi)$  та  $y = y(\varphi, \psi)$  (аналогі рівнянь Лапласа для випадку, коли  $\kappa = 1$ )

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \kappa^{-1} \left( \frac{1}{J} \frac{\partial y}{\partial \psi}, -\frac{1}{J} \frac{\partial x}{\partial \psi} \right) \frac{\partial x}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial}{\partial \psi} \left( \kappa \left( \frac{1}{J} \frac{\partial y}{\partial \psi}, -\frac{1}{J} \frac{\partial x}{\partial \psi} \right) \frac{\partial x}{\partial \psi} \right) = 0, \\ \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \kappa^{-1} \left( \frac{1}{J} \frac{\partial y}{\partial \psi}, -\frac{1}{J} \frac{\partial x}{\partial \psi} \right) \frac{\partial y}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial}{\partial \psi} \left( \kappa \left( \frac{1}{J} \frac{\partial y}{\partial \psi}, -\frac{1}{J} \frac{\partial x}{\partial \psi} \right) \frac{\partial y}{\partial \psi} \right) = 0, \end{cases} \quad (6)$$

як і (1) та (2), в силу залежності  $\kappa = \kappa(\varphi_x, \varphi_y)$ , є взаємозв'язаними.

**Алгоритм чисельного розв'язання поставленої задачі** побудуємо аналогічно до [2, 5]. А саме, різницеві аналоги рівнянь (6) та крайових умов (5) у відповідній рівномірній сітковій області

$$G_\omega^\gamma = \{(\varphi_i, \psi_j) : \varphi_i = i \cdot \Delta\varphi, \quad i = \overline{0, n}; \quad \psi_j = j \cdot \Delta\psi, \quad j = \overline{0, m}; \quad \Delta\varphi = \frac{1}{n},$$

$$\Delta\psi = \frac{Q}{m}, \quad \gamma = \frac{\Delta\psi}{\Delta\varphi} \} \text{ запишемо згідно з [7, 8] у вигляді:}$$

$$\begin{cases} \gamma^2 \left( \kappa_{i+1/2, j}^{-1} (x_{i+1, j} - x_{i, j}) - \kappa_{i-1/2, j}^{-1} (x_{i, j} - x_{i-1, j}) \right) + \\ + \kappa_{i, j+1/2} (x_{i, j+1} - x_{i, j}) - \kappa_{i, j-1/2} (x_{i, j} - x_{i, j-1}) = 0, \\ \gamma^2 \left( \kappa_{i+1/2, j}^{-1} (y_{i+1, j} - y_{i, j}) - \kappa_{i-1/2, j}^{-1} (y_{i, j} - y_{i-1, j}) \right) + \\ + \kappa_{i, j+1/2} (y_{i, j+1} - y_{i, j}) - \kappa_{i, j-1/2} (y_{i, j} - y_{i, j-1}) = 0, \end{cases} \quad (7)$$

$$\text{де} \quad \kappa_{i+1/2, j} = \kappa \left( \frac{y_{i+1, j+1} + y_{i, j+1} - y_{i+1, j-1} - y_{i, j-1}}{4\Delta\psi \cdot J_{i+1/2, j}}, \right. \\ \left. \frac{x_{i+1, j-1} + x_{i, j-1} - x_{i+1, j+1} - x_{i, j+1}}{4\Delta\psi \cdot J_{i+1/2, j}} \right),$$

$$\kappa_{i-1/2, j} = \kappa \left( \frac{y_{i-1, j+1} + y_{i, j+1} - y_{i-1, j-1} - y_{i, j-1}}{4\Delta\psi \cdot J_{i-1/2, j}}, \right. \\ \left. \frac{x_{i-1, j-1} + x_{i, j-1} - x_{i-1, j+1} - x_{i, j+1}}{4\Delta\psi \cdot J_{i-1/2, j}} \right),$$

$$\kappa_{i,j+1/2} = \kappa \left( \frac{y_{i,j+1} - y_{i,j}}{\Delta\psi \cdot J_{i,j+1/2}}, \frac{x_{i,j} - x_{i,j+1}}{\Delta\psi \cdot J_{i,j+1/2}} \right),$$

$$\kappa_{i,j-1/2} = \kappa \left( \frac{y_{i,j} - y_{i,j-1}}{\Delta\psi \cdot J_{i,j-1/2}}, \frac{x_{i,j-1} - x_{i,j}}{\Delta\psi \cdot J_{i,j-1/2}} \right),$$

$$J_{i+1/2,j} = \frac{1}{4\Delta\psi \cdot \Delta\varphi} \left( (x_{i+1,j} - x_{i,j})(y_{i+1,j+1} + y_{i,j+1} - y_{i+1,j-1} - y_{i,j-1}) - (y_{i+1,j} - y_{i,j})(x_{i+1,j+1} + x_{i,j+1} - x_{i+1,j-1} - x_{i,j-1}) \right),$$

$$J_{i-1/2,j} = \frac{1}{4\Delta\psi \cdot \Delta\varphi} \left( (x_{i,j} - x_{i-1,j})(y_{i-1,j+1} + y_{i,j+1} - y_{i-1,j-1} - y_{i,j-1}) - (y_{i,j} - y_{i-1,j})(x_{i-1,j+1} + x_{i,j+1} - x_{i-1,j-1} - x_{i,j-1}) \right),$$

$$J_{i,j+1/2} = \frac{1}{4\Delta\psi \cdot \Delta\varphi} \left( (y_{i,j+1} - y_{i,j})(x_{i+1,j+1} + x_{i+1,j} - x_{i-1,j+1} - x_{i-1,j}) - (x_{i,j+1} - x_{i,j})(y_{i+1,j+1} + y_{i+1,j} - y_{i-1,j} - y_{i-1,j+1}) \right),$$

$$J_{i,j-1/2} = \frac{1}{4\Delta\psi \cdot \Delta\varphi} \left( (y_{i,j} - y_{i,j-1})(x_{i+1,j-1} + x_{i+1,j} - x_{i-1,j-1} - x_{i-1,j}) - (x_{i,j} - x_{i,j-1})(y_{i+1,j-1} + y_{i+1,j} - y_{i-1,j} - y_{i-1,j+1}) \right),$$

та відповідно:

$$\begin{cases} f_*(x_{0,j}, y_{0,j}) = 0, & f^*(x_{n,j}, y_{n,j}) = 0, & j = \overline{0, m}, \\ x_{i,0} = x_{i,m}, & y_{i,0} = y_{i,m}, & i = \overline{0, n}. \end{cases} \quad (8)$$

Додаткові умови для граничних та приграничних вузлів (умови ортогональності) у сітковій області  $G_\omega^\gamma$  записуються у вигляді [1-5, 9]:

$$\begin{cases} (4x_{1,j} - 3x_{0,j} - x_{2,j})(x_{0,j+1} - x_{0,j-1}) + \\ + (4y_{1,j} - 3y_{0,j} - y_{2,j})(y_{0,j+1} - y_{0,j-1}) = 0, & j = \overline{1, m-1}; \\ (3x_{n,j} + x_{n-2,j} - 4x_{n-1,j})(x_{n,j+1} - x_{n,j-1}) + \\ + (3y_{n,j} + y_{n-2,j} - 4y_{n-1,j})(y_{n,j+1} - y_{n,j-1}) = 0, & j = \overline{0, m}. \end{cases} \quad (9)$$

Формулу для знаходження величини  $\gamma$  одержимо на підставі умови “квазіконформної подібності в малому” [1-5] відповідних чотирикутників двох областей:

$$\gamma = \sum_{i,j=0}^{n-1,m-1} \frac{\kappa_{i,j}^*}{nm} \left( \sqrt{(x_{i,j+1} - x_{i,j})^2 + (y_{i,j+1} - y_{i,j})^2} + \sqrt{(x_{i+1,j+1} - x_{i+1,j})^2 + (y_{i+1,j+1} - y_{i+1,j})^2} \right) /$$

$$\begin{aligned} & / \left( \sqrt{(x_{i+1,j} - x_{i,j})^2 + (y_{i+1,j} - y_{i,j})^2} + \right. \\ & \left. + \sqrt{(x_{i+1,j+1} - x_{i,j+1})^2 + (y_{i+1,j+1} - y_{i,j+1})^2} \right), \end{aligned} \quad (10)$$

$$\text{де } \kappa_{i,j}^* = \kappa \left( \frac{y_{i+1,j+1} + y_{i,j+1} - y_{i+1,j} - y_{i,j}}{2\Delta\psi \cdot J_{i,j}^*}, \frac{x_{i+1,j} + x_{i,j} - x_{i+1,j+1} - x_{i,j+1}}{2\Delta\psi \cdot J_{i,j}^*} \right),$$

$$\begin{aligned} J_{i,j}^* = & \frac{1}{4\Delta\psi \cdot \Delta\varphi} \left( (x_{i+1,j} + x_{i+1,j+1} - x_{i,j+1} - x_{i,j}) (y_{i+1,j+1} + y_{i,j+1} - y_{i+1,j} - \right. \\ & \left. - y_{i,j}) - (x_{i,j+1} + x_{i+1,j+1} - x_{i+1,j} - x_{i,j}) (y_{i+1,j+1} + y_{i+1,j} - y_{i,j+1} - y_{i,j}) \right). \end{aligned}$$

Задавши кількість вузлів розбиття області  $G_\omega$   $n$  та  $m$ , параметри  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$ ,  $\varepsilon_3$ , що характеризують точність роботи алгоритму розв'язання відповідної (4)-(5) різницевої задачі, початкові наближення координат граничних вузлів  $x_{0,j}^{(0)}$ ,  $y_{0,j}^{(0)}$ ,  $x_{n,j}^{(0)}$ ,  $y_{n,j}^{(0)}$  (так, щоб виконувались умови (8)) та початкові наближення координат внутрішніх вузлів  $(x_{i,j}^{(0)}, y_{i,j}^{(0)})$ ,  $i = \overline{1, n-1}$ ,  $j = \overline{0, m}$  (наприклад, рівномірно поділивши відрізки із кінцями в точках  $(x_{0,j}^{(0)}, y_{0,j}^{(0)})$ ,  $(x_{n,j}^{(0)}, y_{n,j}^{(0)})$ ), знаходимо за формулою (10) початкове наближення  $\gamma^{(0)} = \gamma(x_{i,j}^{(0)}, y_{i,j}^{(0)})$  величини  $\gamma$ .

Далі проводимо уточнення координат внутрішніх вузлів  $(x_{i,j}^{(k)}, y_{i,j}^{(k)})$  із заданою точністю  $\varepsilon_1$  ( $k$  – номер загальної ітерації) з допомогою ітераційних схем типу “хрест”, отриманих шляхом розв'язання (7) відносно  $x_{i,j}$  та  $y_{i,j}$ . При цьому необхідні значення градієнту напору та коефіцієнту провідності у вузлах сітки  $G'_\omega$  обчислюються через значення  $x_{i,j}$ ,  $y_{i,j}$  з попереднього кроку ітерації. Після цього, як і в [1-5], “підправляємо” граничні вузли, розв'язуючи наближено систему рівнянь (9), наприклад, методом Ньютонa. Якщо величина зміщення вузлів на границі за проведену  $k$ -ту загальну ітерацію

$$S = \max_{i,j} \sqrt{(x_{i,j}^{(k)} - x_{i,j}^{(k-1)})^2 + (y_{i,j}^{(k)} - y_{i,j}^{(k-1)})^2} \quad ((i, j) - \text{індекси координат}$$

граничних вузлів) більша за  $\varepsilon_2$ , то повертаємось до уточнення внутрішніх вузлів. В протилежному випадку знаходимо нові наближення  $Q^{(L)}$  та  $\gamma^{(L)}$  величин  $Q$  та  $\gamma$  за формулою (10) та умовою зв'язку між ними:  $Q = m\Delta\varphi \cdot \gamma$ . Якщо зміна невідомої витрати  $|Q^{(L)} - Q^{(L-1)}|$  більша за  $\varepsilon_3$ , то знову повертаємось до уточнення внутрішніх вузлів,

інакше – обчислюємо нев’язку “квазіконформності” отриманої сітки

$\delta = \sqrt{\delta_1^2 + \delta_2^2}$ , де  $\delta_1, \delta_2$  – нев’язки апроксимацій рівнянь (4):

$$\begin{cases} \delta_1 = \max_{i,j=1}^{n-1,m-1} |\gamma(x_{i+1,j} - x_{i-1,j}) - \kappa_{i,j} \cdot (y_{i,j+1} - y_{i,j-1})|, \\ \delta_2 = \max_{i,j=1}^{n-1,m-1} |\gamma(y_{i+1,j} - y_{i-1,j}) + \kappa_{i,j} \cdot (x_{i,j+1} - x_{i,j-1})|, \end{cases}$$

$$\text{де } \kappa_{i,j} = \kappa \left( \frac{y_{i,j+1} - y_{i,j-1}}{2\Delta\psi \cdot J_{i,j}}, \frac{x_{i,j-1} - x_{i,j+1}}{2\Delta\psi \cdot J_{i,j}} \right), \quad J_{i,j} = \frac{1}{4\Delta\psi \cdot \Delta\varphi} \times \\ \times ((x_{i+1,j} - x_{i-1,j})(y_{i,j+1} - y_{i,j-1}) - (x_{i,j+1} - x_{i,j-1})(y_{i+1,j} - y_{i-1,j})).$$

Якщо потрібно підвищити ступінь точності наближеного розв’язку (зменшити нев’язку  $\delta$ ), збільшуємо  $n$  і  $m$  та розв’язуємо задачу заново (оптимальність співвідношення між  $n$  та  $m$  досягається аналогічно до [5, 9] шляхом оптимізації відповідних функціоналів з урахуванням заміни конформної сітки на відповідну квазіконформну).

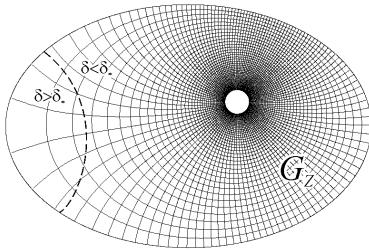
#### Комп’ютерна реалізація алгоритму та чисельні приклади.

Описаний нами вище алгоритм чисельного розв’язання поставленої задачі реалізований у вигляді пакету програм для ПК IBM PC/AT. Його збіжність та точність перевірялися за допомогою тестових прикладів. На *рис. 3* зображена динамічна сітка, отримана в результаті розв’язання відповідної плоскої модельної задачі фільтрації, порожденної дією свердловини ( $L_* : x_*(t) = 4 + \cos t, y_*(t) = 2 + \sin t$ ) в еліптичному пласті

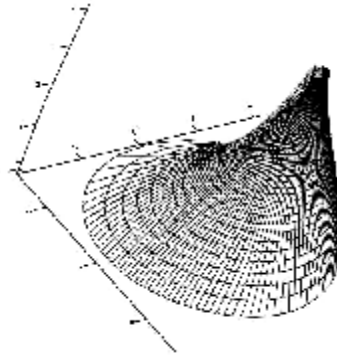
( $L^* : x^*(t) = 15 \cos t, y^*(t) = 10 \sin t$ ) при  $\kappa = \kappa_* + \mu \sqrt{\varphi_x^2 + \varphi_y^2}$  ( $\kappa_* = 1, \mu = 0.01$ ),  $n = 40, m = 120, \varepsilon = \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 10^{-4}, h_* = 10, h^* = 2$ . При цьому за  $k = 4589$  ітерацій знайдена

повна витрата  $Q = 2.7053$  при максимальній нев’язці  $\delta = 0.5674$ . Зауважимо при цьому, що, навіть, і при порівняно малих значеннях  $n, m$  побудований програмний комплекс дозволяє виділити ділянки допустимих нев’язок (на *рис. 3* схематично пунктиром розділені ділянки великих та малих нев’язок відносно деякого значення  $\delta = \delta_*$ ). На *рис. 4* зображена відповідна вільна поверхня.

**Висновки і зауваження.** Із вище викладеного бачимо, що модифікація алгоритму чисельного розв’язання обернених нелінійних модельних задач на квазіконформні відображення для двозв’язних пористих деформівних обмежених екіпотенціальними поверхнями та поверхнями течії середовищ за умов зворотного впливу характеристик процесу на характеристики середовища для просторових задач з



**Рис. 3.** Плоский аналог вихідної задачі – свердловина в еліптичному пласті



**Рис. 4.** Вільна поверхня

вільними поверхнями ґрунтується на зведенні останніх до відповідних їх плоских аналогів із невідомими витратами.

Обґрунтування побудованого нами алгоритму почергового “замороження” шуканих параметра квазіконформності, внутрішніх та граничних вузлів криволінійної області, як і в [5], проводилось із використанням ідей методу блочної ітерації (див., напр., [9]).

У випадку, якщо контури  $L^*$  та  $L^*$  не є еквіпотенціальними лініями (наприклад, коли  $\varphi^* = \varphi^*(M)$ , де  $M$  – біжуча точка відповідного контура,  $\varphi^*(M)$  – мало змінна неперервно-диференційована та періодична функція), безпосередньо скористатись перевагами запропонованого нами підходу не можна. В цьому випадку можливим є комбінований підхід із використанням методу скінчених елементів [10] та методу мажорантних областей Г. М. Положого [11].

### Список використаних джерел:

1. Бомба А. Я., Каштан С. С. Чисельне розв’язання обернених нелінійних крайових задач на конформні та квазіконформні відображення // Волинський математичний вісник. – 2001. – Вип. 8. – С.19-33.
2. Бомба А. Я., Пригорницький Д. О. Чисельне розв’язання обернених нелінійних крайових задач на конформні та квазіконформні відображення в двозв’язних областях // Вісник Київського університету. Сер.: фізико-математичні науки. – 2001. – Вип. 3. – С.151-158.
3. Бомба А. Я., Каштан С. С. Чисельне розв’язання обернених нелінійних крайових задач на конформні та квазіконформні відображення // Вісник Київського університету. Сер.: фізико-математичні науки. – 2001. – Вип. 4. – С.160-174.
4. Бомба А. Я., Хлапук М. М., Сидорчук Б. П. Математичне моделювання нелінійних процесів фільтрації з урахуванням малих деформацій середовища // Актуальні проблеми водного господарства. – Т.1. – Рівне: Вид-во УДАВГ, 1997. – С.11-15.



5. Бомба А. Я., Пригорницький Д. О. Чисельне розв'язання обернених нелінійних крайових задач на квазіконформні відображення в двозв'язних деформованих середовищах // Вісник Львівського університету. Серія прикладна математика та інформатика. – 2003. – Вип. 7. – С. 3-10.
6. Полубаринова-Кочина П. Я. Теория движения грунтовых вод. – М.: Наука, 1977. – 664 с.
7. Марчук Г. И. Методы вычислительной математики. – Киев: Наукова думка, 1980. – 334 с.
8. Самарский А. А. Теория разностных схем. – М.: Наука, 1977. – 656 с.
9. Годунов О. К., Прокопов Г. П. О расчетах конформных отображений и построении разностных сеток // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1967. – Т. 7. – № 5. – С. 1031-1059.
10. Савула Я. Г., Шинкаренко Г. А., Вовк В. Н. Некоторые приложения метода конечных элементов. – Львов: Редакционно-издательская группа Львов. ун-та, 1981. – 38 с.
11. Ляшко И. И., Великоиваненко И. М., Лаврик В. И., Мистецкий Г. Е. Метод мажорантных областей в теории фильтрации. – Киев: Наукова думка, 1974. – 200 с.

Numerical algorithm for solving of inverse nonlinear boundary value problems on quasiconformal mappings in doubly-connected warped environments limited by equipotential lines and surfaces of current is modified for cases of areas with free surfaces.

**Key words:** *numerical solution, inverse nonlinear boundary value problems, quasiconformal mapping, warped environments, free surfaces.*

Отримано: 25.06.2008

УДК 628.113.2:66.067.1+517.95

**А. Я. Бомба<sup>1</sup>, І. М. Присяжнюк<sup>1</sup>, А. П. Сафоник<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>*Рівненський державний гуманітарний університет*

<sup>2</sup>*Національний університет водного господарства та природокористування, м. Рівне*

## **ЗАКОНОМІРНОСТІ ФІЛЬТРУВАННЯ У ДВОШАРОВИХ ФІЛЬТРАХ**

У даній роботі встановлено аналітичні закономірності масопереносу в двошарових фільтрах, що функціонують за законами, прототипами яких є лінійна модель Мінца. Проведено аналіз роботи двошарових фільтрів у хвильовому режимі. Оптимізовано основні параметри процесу фільтрування.

**Ключові слова:** *фільтр, масопереніс, оптимізація.*

**Вступ.** Фільтрування в напрямку зменшення еквівалентного діаметру гранул завантаження – один з загальноновизнаних методів під-