компактнозначного відображення множинами однозначних відображень // Доп. НАН України. – 2005. – №6. – С.19-23.
12. Гудима У. В., Гнатюк Ю. В., Гнатюк В. О. Про єдиність екстремального елемента та чебишовський альтернанс для задачі найкращої рівномірної апроксимації неперервного компактнозначного відображення // Проблеми теорії наближення функцій та суміжні питання: Зб. наук. праць Ін-ту математики НАН України. – Київ, 2005. – Т.2. – №2. – С.106-116.

In article we established the necessary and sufficient conditions and criteria of the element of the best uniform rational approximation of continuous compact-valued map.

Key words: *the best uniform rational approximation, the compact-valued maps, the criteria of extreme element.*

Отримано: 05.06.2008

УДК 539.3

А. П. Громик[1], І. М. Конет[2]

[1]Подільський державний аграрно-технічний університет, м. Кам'янець-Подільський
[2]Кам'янець-Подільський національний університет

ІНТЕГРАЛЬНІ ЗОБРАЖЕННЯ РОЗВ'ЯЗКІВ СТАЦІОНАРНИХ ЗАДАЧ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ ДЛЯ ОБМЕЖЕНИХ КУСКОВО-ОДНОРІДНИХ ПРОСТОРОВИХ СЕРЕДОВИЩ

Методом інтегральних перетворень побудовано точні аналітичні розв'язки стаціонарних задач теплопровідності для обмежених кусково-однорідних просторових середовищ.

Ключові слова: *диференціальне рівняння Пуассона, інтегральні перетворення, фундаментальні розв'язки.*

Вступ. Стаціонарні крайові задачі феноменологічної теорії теплопровідності для багатошарових (кусково-однорідних) середовищ становлять значний теоретичний та практичний інтерес [5, 7, 14, 15]. Питанням побудови методом інтегральних перетворень точних аналітичних розв'язків згаданих задач у декартовій, сферичній та циліндричній системах координат присвячені монографії [12, 8, 9, 10]. Стаціонарні температурні поля в необмежених двоскладових та тришарових просторових середовищах побудовано в працях [2, 3, 4, 11]. У цій статті ми пропонуємо інтегральні зображення точних аналітичних розв'язків алгоритмічного характеру стаціонарних задач теплопровідності для обмежених кусково-однорідних за декартовою координатою просторових середовищ.

Постановка задачі. Задача про структуру стаціонарного температурного поля в ортотропному обмеженому (n + 1)-шаровому просторовому середовищі математично зводиться до побудови обмеженого на множині

$$\Omega_3 = \{(x, y, z) | (x, y) \in \Omega_2 = \langle a; b \rangle \times \langle c; d \rangle;$$

$$z \in K_n^+ = \bigcup_{j=1}^{n+1} I_j \equiv \bigcup_{j=1}^{n+1} (l_{j-1}; l_j); l_0 \geq 0; l_k < l_{k+1}; l_{n+1} \equiv l < \infty\}$$

розв'язку сепаратної системи диференціальних рівнянь Пуассона [6, 17]

$$\left[a_{xj}^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + a_{yj}^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} + a_{zj}^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right] T_j - \chi_j^2 T_j = -f_j(x, y, z); z \in I_j; j = \overline{1, n+1} \quad (1)$$

з крайовими умовами

$$\left(\alpha_{11}^0 \frac{\partial}{\partial z} + \beta_{11}^0\right) T_1 \Big|_{z=l_0} = g_0(x, y), \left(\alpha_{22}^{n+1} \frac{\partial}{\partial z} + \beta_{22}^{n+1}\right) T_{n+1} \Big|_{z=l} = g_l(x, y), \quad (2)$$

умовами неідеального теплового контакту [1]

$$\begin{cases} \left[\left(R_k \frac{\partial}{\partial z} + 1\right) T_k - T_{k+1}\right] \Big|_{z=l_k} = 0, \\ \left(\nu_k \frac{\partial T_k}{\partial z} - \nu_{k+1} \frac{\partial T_{k+1}}{\partial z}\right) \Big|_{z=l_k} = 0, k = \overline{1, n}, \end{cases} \quad (3)$$

та відповідними крайовими умовами на межі області Ω_2, де a_{xj}, a_{yj}, $a_{zj} \geq 0$ – коефіцієнти температуропровідності у напрямках координатних осей $x, y, z \left(j = \overline{1, n+1}\right)$; $\chi_j^2 \geq 0$ – коефіцієнти дисипації теплової енергії; $f(x, y, z) = \{f_1(x, y, z), ..., f_{n+1}(x, y, z)\}$ – інтенсивність теплових джерел; $\alpha_{11}^0, \beta_{11}^0; \alpha_{22}^{n+1}, \beta_{22}^{n+1}$ – деякі дійсні сталі; $g_0(x, y)$, $g_l(x, y)$ – задані обмежені неперервні функції в області Ω_2; $R_k \geq 0$ – коефіцієнти термоопору; $\nu_k, \nu_{k+1} \geq 0$ – коефіцієнти теплопровідності; $T(x, y, z) = \{T_1(x, y, z), ..., T_{n+1}(x, y, z)\}$ – шукана температура.

Основні результати. 1. $\Omega_2 = (0; +\infty) \times (0; +\infty)$. У цьому випадку вважаємо, що на межі області Ω_2 виконуються крайові умови

$$\left(-\frac{\partial}{\partial x} + p\right) T_j \Big|_{x=0} = \omega_j(y, z); \quad \frac{\partial^k T_j}{\partial x^k} \Big|_{x=+\infty} = 0; k = 0,1 \quad (4)$$

щодо змінної x та крайові умови

$$\left(-\frac{\partial}{\partial y}+h\right)T_j\Big|_{y=0}=g_j(x,z);\quad \frac{\partial^k T_j}{\partial y^k}\Bigg|_{y=+\infty}=0;\ k=0,1 \tag{5}$$

щодо змінної y, де $p \ge 0$ – коефіцієнт теплообміну через поверхню $x=0$; $\omega_j(y;z)= pT_j^c(y,z)$, $T_j^c(y,z)$ – температура середовища на поверхні $x=0$; $h \ge 0$ – коефіцієнт теплообміну через поверхню $y=0$; $g_j(x;z)= hT_j^c(x,z), T_j^c(x,z)$ – температура середовища на поверхні $y=0$.

Припустимо, що задані й шукані функції задовольняють умови застосовності залучених нижче інтегральних перетворень [16, 13, 12].

До задачі (1)-(5) застосуємо інтегральне перетворення Фур'є на декартовій півосі щодо змінної x [16, 13]:

$$F_{+x}[g(x)]=\int_0^{+\infty} g(x)K_x(x,\sigma)dx \equiv \tilde{g}(\sigma), \tag{6}$$

$$F_{+x}^{-1}[\tilde{g}(\sigma)]=\int_0^{+\infty} \tilde{g}(\sigma)K_x(x,\sigma)d\sigma \equiv g(x), \tag{7}$$

$$F_{+x}\left[\frac{d^2g}{dx^2}\right]=-\sigma^2\tilde{g}(\sigma)+K_x(0,\sigma)\left(-\frac{dg}{dx}+pg\right)\Bigg|_{x=0}, \tag{8}$$

де ядро перетворення

$$K_x(x,\sigma)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{\sigma\cos(\sigma x)+p\sin(\sigma x)}{\sqrt{\sigma^2+p^2}}.$$

Інтегральний оператор F_{+x} за правилом (6) внаслідок тотожності (8) крайовій задачі (1)-(5) ставить у відповідність задачу побудови обмеженого на множині $\Omega_3'=\{(y,z)\,|\,y\in(0;+\infty); z\in K_n^+\}$ розв'язку сепаратної системи диференціальних рівнянь

$$\begin{gathered}\left[a_{yj}^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}+a_{zj}^2\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right]\tilde{T}_j-\left(a_{xj}^2\sigma^2+\chi_j^2\right)\tilde{T}_j=\\ =-\tilde{F}_j(\sigma,y,z);\ z\in I_j;\ j=\overline{1,n+1}\end{gathered} \tag{9}$$

з крайовими умовами

$$\left(\alpha_{11}^0\frac{\partial}{\partial z}+\beta_{11}^0\right)\tilde{T}_1\Bigg|_{z=l_0}=g_0(\sigma,y),\left(\alpha_{22}^{n+1}\frac{\partial}{\partial z}+\beta_{22}^{n+1}\right)\tilde{T}_{n+1}\Bigg|_{z=l}=g_l(\sigma,y), \tag{10}$$

$$\left(-\frac{\partial}{\partial y}+h\right)\widetilde{T}_j\Big|_{y=0}=\widetilde{g}_j(\sigma,z);\quad \frac{\partial^k\widetilde{T}_j}{\partial y^k}\Bigg|_{y=+\infty}=0;\ k=0{,}1 \tag{11}$$

та умовами спряження

$$\begin{cases}\left[\left(R_k\frac{\partial}{\partial z}+1\right)\widetilde{T}_k-\widetilde{T}_{k+1}\right]\Bigg|_{z=l_k}=0,\\ \left(\nu_k\frac{\partial\widetilde{T}_k}{\partial z}-\nu_{k+1}\frac{\partial\widetilde{T}_{k+1}}{\partial z}\right)\Bigg|_{z=l_k}=0,\ k=\overline{1,n},\end{cases} \tag{12}$$

де $\quad \widetilde{F}_j(\sigma,y,z)=\widetilde{f}_j(\sigma,y,z)+a_{yj}^2K_x(0,\sigma)\omega_j(y,z);\ j=\overline{1,n+1}.$

До задачі (9)-(12) застосуємо інтегральне перетворення Фур'є на декартовій півосі щодо змінної y [16, 13]:

$$F_{+y}[g(y)]=\int_0^{+\infty}g(y)K_y(y,s)dy\equiv\widetilde{g}(s), \tag{13}$$

$$F_{+y}^{-1}[\widetilde{g}(s)]=\int_0^{+\infty}\widetilde{g}(s)K_y(y,s)ds\equiv g(y), \tag{14}$$

$$F_{+y}\left[\frac{d^2g}{dy^2}\right]=-s^2\widetilde{g}(s)+K_y(0,s)\left(\frac{dg}{dy}+hg\right)\Bigg|_{y=0}, \tag{15}$$

де ядро перетворення

$$K_y(y,s)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{s\cos(sy)+h\sin(sy)}{\sqrt{s^2+h^2}}.$$

Інтегральний оператор F_{+y} за правилом (13) внаслідок тотожності (15) крайовій задачі (9)-(12) ставить у відповідність задачу побудови обмеженого на множині K_n^+ розв'язку сепаратної системи звичайних диференціальних рівнянь 2-го порядку зі сталими коефіцієнтами

$$\left[a_{zj}^2\frac{d^2}{dz^2}-\left(a_{xj}^2\sigma^2+a_{yj}^2s^2+\chi_j^2\right)\right]\widetilde{\widetilde{T}}_j(\sigma,s,z)= \\ =-\widetilde{\widetilde{G}}_j(\sigma,s,z);\ z\in I_j;\ j=\overline{1,n+1} \tag{16}$$

з крайовими умовами

$$\left(\alpha_{11}^0\frac{d}{dz}+\beta_{11}^0\right)\widetilde{\widetilde{T}}_1\Bigg|_{z=l_0}=\widetilde{\widetilde{g}}_0(\sigma,s),\quad \left(\alpha_{22}^{n+1}\frac{d}{dz}+\beta_{22}^{n+1}\right)\widetilde{\widetilde{T}}_{n+1}\Bigg|_{z=l}=\widetilde{\widetilde{g}}_l(\sigma,s), \tag{17}$$

та умовами спряження

$$\begin{cases} \left.\left[\left(R_k \dfrac{d}{dz}+1\right)\tilde{\tilde{T}}_k - \tilde{\tilde{T}}_{k+1}\right]\right|_{z=l_k} = 0, \\ \left.\left(\nu_k \dfrac{d\tilde{T}_k}{dz} - \nu_{k+1}\dfrac{d\tilde{T}_{k+1}}{dz}\right)\right|_{z=l_k} = 0,\ k=\overline{1,n}, \end{cases} \tag{18}$$

де $\tilde{\tilde{G}}_j(\sigma,s,z)=\tilde{F}_j(\sigma,s,z)+a_{yj}^2 K_y(0,s)\tilde{g}_j(\sigma,z);\ j=\overline{1,n+1}.$

До задачі (16)-(18) застосуємо інтегральне перетворення Фур'є на декартовому сегменті $[l_0,l]$ з n точками спряження [12]:

$$F_{jn}[g(z)] = \int_{l_0}^{l} g(z)V(z,\lambda_j)\sigma(z)dz \equiv g_j, \tag{19}$$

$$F_{jn}^{-1}[g_j] = \sum_{j=1}^{\infty} g_j \frac{V(z,\lambda_j)}{\left\|V(z,\lambda_j)\right\|^2} \equiv g(z), \tag{20}$$

$$F_{jn}\left[\sum_{i=1}^{n+1} a_i^2\theta(z-l_{i-1})\theta(l_i-z)\frac{d^2 g}{dz^2}\right] \equiv \sum_{i=1}^{n+1} a_i^2 \int_{l_{i-1}}^{l_i} \frac{d^2 g}{dz^2} V_i(z,\lambda_i)\sigma_i dz = -\lambda_j^2 g_j -$$

$$-\sum_{i=1}^{n+1} k_i^2 \int_{l_{i-1}}^{l_i} g(z)V_i(z,\lambda_i)\sigma_i dz - \sigma_1 a_1^2(\alpha_{11}^0)^{-1} V_1(l_0,\lambda_i)\left.\left(\alpha_{11}^0\frac{dg}{dz}+\beta_{11}^0 g\right)\right|_{z=l_0} +$$

$$+\sigma_{n+1}a_{n+1}^2(\alpha_{22}^{n+1})^{-1} Vn+_1(l,\lambda_i)\left.\left(\alpha_{22}^{n+1}\frac{dg}{dz}+\beta_{22}^{n+1} g\right)\right|_{z=l}. \tag{21}$$

У рівностях (19)-(21) беруть участь величини і функції:

$$V(z,\lambda_j)=\sum_{i=1}^{n+1} V_i(z,\lambda_j)\theta(z-l_{i-1})\theta(l_i-z);\ \sigma(z)=\sum_{i=1}^{n+1}\sigma_i\theta(z-l_{i-1})\theta(l_i-z);$$

$$\left\|V(z,\lambda_j)\right\|^2 = \int_{l_0}^{l} V^2(z,\lambda_j)\sigma(z)dz = \sum_{i=1}^{n+1}\int_{l_{i-1}}^{l_i} V_i^2(z,\lambda_j)\sigma_i dz;$$

$$V_m(z,\lambda_j)=\prod_{i=m}^{n} c_{2i}q_{n+1}\left[\omega_{m-1,2}(\lambda_j)\cos(q_{mj}z)-\omega_{m-1,1}(\lambda_j)\sin(q_{mj}z)\right];\ m=\overline{1,n};$$

$$V_{n+1}(z,\lambda_j)=\omega_{n2}(\lambda_j)\cos(q_{n+1,j}z)-\omega_{n1}(\lambda_j)\sin(q_{n+1,j}z);\ c_{1k}=1;\ c_{2k}=\frac{\nu_{k+1}}{\nu_k};$$

$$q_{sj}=a_s^{-1}\left(\lambda_j^2+k_s^2\right)^{1/2}\equiv a_s^{-1}bsj;\ \sigma_k=\prod_{i=k}^{n}\frac{\nu_i a_{n+1}}{\nu_{i+1}a_k^2};\ \sigma_n=\frac{\nu_n a_{n+1}}{\nu_{n+1}a_n^2};\ \sigma_{n+1}=\frac{1}{a_{n+1}};$$

$$\nu_{11}^{k1}\left(q_{sj}l_k\right)=-R_k q_{sj}\sin\left(q_{sj}l_k\right)+\cos\left(q_{sj}l_k\right);\ \nu_{12}^{k1}\left(q_{sj}l_k\right)=-\frac{\nu_{k+1}}{\nu_k}q_{sj}\sin\left(q_{sj}l_k\right);$$

$$\nu_{21}^{k1}\left(q_{sj}l_k\right)=-q_{sj}\sin\left(q_{sj}l_k\right);\ \nu_{22}^{k1}\left(q_{sj}l_k\right)=\frac{\nu_{k+1}}{\nu_k}q_{sj}\cos\left(q_{sj}l_k\right);$$

$$\nu_{11}^{k2}\left(q_{sj}l_k\right)=R_k q_{sj}\cos\left(q_{sj}l_k\right)+\sin\left(q_{sj}l_k\right);\ \nu_{12}^{k2}\left(q_{sj}l_k\right)=\cos\left(q_{sj}l_k\right);$$

$$\nu_{21}^{k2}\left(q_{sj}l_k\right)=q_{sj}\cos\left(q_{sj}l_k\right);\ \nu_{22}^{k2}\left(q_{sj}l_k\right)=\sin\left(q_{sj}l_k\right);$$

$$\delta_{sm}^{k}\left(q_{kj}l_k,q_{k+1}l_k\right)=\nu_{11}^{ks}\left(q_{kj},l_k\right)\nu_{22}^{km}\left(q_{k+1,j},l_k\right)-\nu_{21}^{ks}\left(q_{kj},l_k\right)\nu_{12}^{km}\left(q_{k+1,j},l_k\right);$$

$$\omega_{01}\left(\lambda_j\right)=\nu_{11}^{01}\left(q_{1j}l_0\right);\ \ \omega_{02}\left(\lambda_j\right)=-\nu_{11}^{02}\left(q_{1j}l_0\right);$$

$$\omega_{sm}\left(\lambda_j\right)=\omega_{s-1,2}\left(\lambda_j\right)\delta_{1m}^{s}\left(q_{sj}l_s,q_{k+1,j}l_s\right)-\omega_{s-1,1}\left(\lambda_j\right)\delta_{2m}^{s}\left(q_{sj}l_s,q_{s+1,j}l_s\right);$$

λ_j – корені трансцендентного рівняння

$$\Delta_n(\lambda)\equiv\nu_{22}^{n+1,2}\left(q_{n+1}(\lambda)l\right)w_{n1}(\lambda)-\nu_{22}^{n+1,1}\left(q_{n+1}(\lambda)l\right)w_{n2}(\lambda)=0,$$

що утворюють дискретний спектр, $\theta(x)$ – одинична функція Гевісайда.

Запишемо систему диференціальних рівнянь (16) у матричній формі

$$\begin{bmatrix}\left(a_1^2\dfrac{d^2}{dz^2}-q_1^2(\sigma,s)\right)\tilde{\tilde{T}}_1(\sigma,s,z)\\ \left(a_2^2\dfrac{d^2}{dz^2}-q_2^2(\sigma,s)\right)\tilde{\tilde{T}}_2(\sigma,s,z)\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \left(a_{n+1}^2\dfrac{d^2}{dz^2}-q_{n+1}^2(\sigma,s)\right)\tilde{\tilde{T}}_{n+1}(\sigma,s,z)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\tilde{\tilde{G}}_1(\sigma,s,z)\\ \tilde{\tilde{G}}_2(\sigma,s,z)\\ \cdots\cdots\cdots\\ \tilde{\tilde{G}}_n(\sigma,s,z)\end{bmatrix},\tag{22}$$

де $\quad q_j^2(\sigma,s)=a_{xj}^2\sigma^2+a_{yj}^2s^2+\chi_j^2;\ a_j^2\equiv a_{zj}^2;\ j=\overline{1,n+1}.$

Інтегральний оператор F_{jn}, який діє за правилом (19), зобразимо у вигляді операторної матриці-рядка

$$F_{jn}[\ldots]=\left[\int_{l_0}^{l_1}\ldots V_1(z,\lambda_j)\sigma_1dz\int_{l_1}^{l_2}\ldots V_2(z,\lambda_j)\sigma_2dz\int_{l_n}^{l}\ldots V_{n+1}(z,\lambda_j)\sigma_{n+1}dz\right]\tag{23}$$

і застосуємо за правилом множення матриць до системи (22). Внаслідок тотожності (21) одержуємо алгебраїчне рівняння

$$\sum_{i=1}^{n+1}\left(\lambda_j^2+k_i^2+q_i^2(\sigma,s)\right)\tilde{\tilde{T}}_{ij}(\sigma,s)=\sum_{i=1}^{n+1}\tilde{\tilde{G}}_{ij}(\sigma,s)-$$
$$-\sigma_1 a_1^2\left(\alpha_{11}^0\right)^{-1}V_1\left(l_0,\lambda_j\right)\tilde{\tilde{g}}_0(\sigma,s)+\sigma_{n+1}a_{n+1}^2\left(\alpha_{22}^{n+1}\right)^{-1}V_{n+1}\left(l,\lambda_j\right)\tilde{\tilde{g}}_l(\sigma,s), \quad (24)$$

де

$$\tilde{\tilde{T}}_{ij}(\sigma,s)=\int_{l_{i-1}}^{l_i}\tilde{\tilde{T}}_i(\sigma,s,z)V_i(z,\lambda_j)\sigma_i dz;\ \tilde{\tilde{G}}_{ij}(\sigma,s)=\int_{l_{i-1}}^{l_i}\tilde{\tilde{G}}_i(\sigma,s,z)V_i(z,\lambda_j)\sigma_i dz.$$

Припустимо, не зменшуючи загальності, що $\max\left\{q_1^2,...,q_{n+1}^2\right\}=q_1^2$, і покладемо всюди $k_i^2=q_1^2-q_i^2\ (i=\overline{1,n+1})$. Рівняння (24) набуває вигляду

$$\left(\lambda_j^2+a_{x1}^2\sigma^2+a_{y1}^2s^2+\chi_1^2\right)\tilde{\tilde{T}}_j(\sigma,s)=\tilde{\tilde{G}}_j(\sigma,s)-$$
$$-\sigma_1 a_1^2\left(\alpha_{11}^0\right)^{-1}V_1\left(l_0,\lambda_j\right)\tilde{\tilde{g}}_0(\sigma,s)+\sigma_{n+1}a_{n+1}^2\left(\alpha_{22}^{n+1}\right)^{-1}V_{n+1}\left(l,\lambda_j\right)\tilde{\tilde{g}}_l(\sigma,s), \quad (25)$$

де $$\tilde{\tilde{T}}_j(\sigma,s)=\sum_{i=1}^{n+1}\tilde{\tilde{T}}_{ij}(\sigma,s),\ \ \tilde{\tilde{G}}_j(\sigma,s)=\sum_{i=1}^{n+1}\tilde{\tilde{G}}_{ij}(\sigma,s).$$

Із рівняння (25) знаходимо функцію

$$\tilde{\tilde{T}}_j(\sigma,s)=\frac{\tilde{\tilde{G}}_j(\sigma,s)}{\lambda_j^2+a_{x1}^2\sigma^2+a_{y1}^2s^2+\chi_1^2}-\frac{\sigma_1 a_1^2 V_1(l_0,\lambda_j)\tilde{\tilde{g}}_0(\sigma,s)}{\alpha_{11}^0\left(\lambda_j^2+a_{x1}^2\sigma^2+a_{y1}^2s^2+\chi_1^2\right)}+$$
$$+\frac{\sigma_{n+1}a_{n+1}^2V_{n+1}(l,\lambda_j)\tilde{\tilde{g}}_l(\sigma,s)}{\alpha_{22}^{n+1}\left(\lambda_j^2+a_{x1}^2\sigma^2+a_{y1}^2s^2+\chi_1^2\right)}. \quad (26)$$

Оскільки суперпозиція операторів F_{jn} та F_{jn}^{-1} є одиничним оператором, то оператор F_{jn}^{-1} зобразимо у вигляді операторної матриці-стовпця

$$F_{jn}^{-1}[...]=\begin{bmatrix}\sum\limits_{j=1}^{\infty}\dots\dfrac{V_1(z,\lambda_j)}{\left\|V(z,\lambda_j)\right\|^2}\\ \dots\dots\dots\dots\dots\\ \sum\limits_{j=1}^{\infty}\dots\dfrac{V_{n+1}(z,\lambda_j)}{\left\|V(z,\lambda_j)\right\|^2}\end{bmatrix}. \quad (27)$$

За правилом множення матриць застосуємо операторну матрицю-стовпець (27) до матриці-елемента $\left[\tilde{\tilde{T}}_j(\sigma,s)\right]$, де функція $\tilde{\tilde{T}}_j(\sigma,s)$ визначена формулою (26). Одержуємо єдиний обмежений розв'язок задачі (16)-(18):

$$\tilde{\tilde{T}}_i(\sigma,s,z)=\sum_{j=1}^{\infty}\left\{\left[\frac{\tilde{\tilde{G}}_j(\sigma,s)}{\lambda_j^2+a_{x1}^2\sigma^2+a_{y1}^2s^2+\chi_1^2}-\frac{\sigma_1 a_1^2 V_1(l_0,\lambda_j)\tilde{\tilde{g}}_0(\sigma,s)}{\alpha_{11}^0\left(\lambda_j^2+a_{x1}^2\sigma^2+a_{y1}^2s^2+\chi_1^2\right)}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{\sigma_{n+1}a_{n+1}^2V_{n+1}(l,\lambda_j)\tilde{\tilde{g}}_l(\sigma,s)}{\alpha_{22}^{n+1}\left(\lambda_j^2+a_{x1}^2\sigma^2+a_{y1}^2s^2+\chi_1^2\right)}\right]\frac{V_i(z,\lambda_j)}{\left\|V(z,\lambda_i)\right\|^2}\right\};\quad i=\overline{1,n+1}. \tag{28}$$

Застосувавши послідовно до функцій $\tilde{\tilde{T}}_i(\sigma,s,z)$, визначених формулами (28), обернені оператори F_{+y}^{-1} та F_{+x}^{-1} одержуємо функції

$$T_i(x,y,z)=\sum_{k=1}^{n+1}E_{ik}(x,\xi,y,\eta,z,\zeta)f_k(\xi,\eta,\zeta)\sigma_k d\xi d\eta d\zeta+$$

$$+\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}W_i^1(x,\xi,y,\eta,z)g_0(\xi,\eta)d\xi d\eta+\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}W_i^2(x,\xi,y,\eta,z)g_l(\xi,\eta)d\xi d\eta+$$

$$+a_{xi}^2\sum_{k=1}^{n+1}\int_0^{+\infty}\int_{l_{k-1}}^{l_k}W_{xik}(x,y,\eta,z,\zeta)\omega_k(\xi,\eta)\sigma_k d\eta d\zeta+$$

$$+a_{yi}^2\sum_{k=1}^{n+1}\int_0^{+\infty}\int_{l_{k-1}}^{l_k}W_{yik}(x,\xi,y,z,\zeta)g_k(\xi,\zeta)\sigma_k d\xi d\zeta;\quad i=\overline{1,n+1}, \tag{29}$$

які описують структуру стаціонарного температурного поля в розглянутому середовищі.

У формулах (29) беруть участь компоненти:

фундаментальної матриці розв'язків

$$E_{ik}(x,\xi,y,\eta,z,\zeta)=\sum_{j=1}^{\infty}\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{V_i(z,\lambda_i)V_k(\zeta,\lambda_i)}{\left\|V(z,\lambda_j)\right\|^2}\times$$

$$\times\frac{K_x(x,\sigma)K_x(\xi,\sigma)K_y(y,s)K_y(\eta,s)}{\lambda_j^2+a_{x1}^2\sigma^2+a_{y1}^2s^2+\chi_1^2}d\sigma ds;\ i,k=\overline{1,n+1}, \tag{30}$$

нижньої аплікатної матриці Гріна

$$W_i^1(x,\xi,y,\eta,z)=-a_1^2\sigma_1(\alpha_{11}^0)^{-1}E_{i1}(x,\xi,y,\eta,z,l_0), \tag{31}$$

верхньої аплікатної матриці Гріна

$$W_i^2(x,\xi,y,\eta,z) = \sigma_{n+1} a_{n+1}^2 (\alpha_{22}^{n+1})^{-1} E_{i,n+1}(x,\xi,y,\eta,z,l), \tag{32}$$

абсцисної матриці Гріна

$$W_{xik}(x,y,\eta,z,\zeta) = E_{ik}(x,0,y,\eta,z,\zeta), \tag{33}$$

ординатної матриці Гріна

$$W_{yik}(x,\xi,y,z,\zeta) = E_{ik}(x,\xi,y,0,z,\zeta) \tag{34}$$

еліптичної крайової задачі (1)-(5).

Зауваження 1. У випадку $a_{xj}^2 = a_{yj}^2 = a_{zj}^2 \equiv a_j^2 \geq 0$ формули (29) визначають структуру стаціонарного температурного поля в ізотропному обмеженому $(n+1)$-шаровому просторовому середовищі.

Зауваження 2. Якщо деякі з коефіцієнтів термоопору R_k дорівнюють нулю, то безпосередньо з формул (29) одержуємо структуру стаціонарного температурного поля у випадку здійснення на відповідних площинах $z = l_k$ ідеального теплового контакту.

Зауваження 3. При $R_k = 0 (k = \overline{1,n})$ безпосередньо з формул (29) одержуємо структуру стаціонарного температурного поля у випадках здійснення на всіх площинах $z = l_k$ ідеального теплового контакту.

Зауваження 4. Параметри $\alpha_{11}^0, \beta_{11}^0; \alpha_{22}^{n+1}, \beta_{22}^{n+1}$ дають можливість виділяти із формул (29) розв'язки крайових задач у випадках задання на поверхнях $z = l_0, z = l$ крайової умови 1-го роду $\left(\alpha_{11}^0 = 0, \beta_{11}^0 = 1,\right.$ $g_0(x,y) = \alpha_{11}^0 g_0'(x,y);$ $\alpha_{22}^{n+1} = 0,$ $\beta_{22}^{n+1} = 1,$ $\left. g_l(x,y) = \alpha_{22}^{n+1} g_l'(x,y)\right),$ 2-го роду $\left(\alpha_{11}^0 = -1, \beta_{11}^0 = 1, \alpha_{22}^{n+1} = 1, \beta_{22}^{n+1} = 0\right)$ й 3-го роду $\left(\alpha_{11}^0 = -1,\right.$ $\left.\beta_{11}^0 \equiv h_1 > 0, \alpha_{22}^{n+1} = 1, \beta_{22}^{n+1} \equiv h_2 > 0\right)$ та їх можливих комбінацій.

Зауваження 5. Параметри p, h дають можливість виділяти із формул (29) розв'язки крайових задач у випадках задання на поверхнях $x = 0, y = 0$ крайових умов 1-го й 2-го роду та їх можливих комбінацій.

Зауваження 6. Аналіз розв'язку (29) в залежності від аналітичного виразу функцій $f_j(x,y,z), \omega_j(y,z), g_j(x,z) (j = \overline{1,n+1}),$ $g_0(x,y)$ та $g_l(x,y)$ проводиться безпосередньо.

2. Ω_2 = (0; +∞) × (0; *b*). У цьому випадку вважаємо, що на межі області Ω_2 виконуються крайові умови (4) щодо змінної x та крайові умови

$$\left(-\frac{\partial}{\partial y} + h_1\right) T_j \Big|_{y=0} = g_{1j}(x,z); \left(\frac{\partial}{\partial y} + h_2\right) T_j \Big|_{y=b} = g_{2j}(x,z); \; j = \overline{1,n+1} \tag{35}$$

щодо змінної y, де $h_1 \geq 0$ – коефіцієнт теплообміну через поверхню $y = 0$; $g_{1j}(x;z) = h_1 T_j^{c1}(x,z), T_j^{c1}(x,z)$ – температура середовища на поверхні $y = 0$; $h_2 \geq 0$ – коефіцієнт теплообміну через поверхню $y = b$; $g_{2j}(x;z) = h_2 T_j^{c2}(x,z), T_j^{c2}(x,z)$ – температура середовища на поверхні $y = b$.

Припустимо, що задані й шукані функції задовольняють умови застосовності залучених нижче інтегральних перетворень [16, 13, 12].

До задачі (1)-(4), (35) застосуємо інтегральне перетворення Фур'є на декартовій півосі щодо змінної x. Інтегральний оператор F_{+x} за правилом (6) внаслідок тотожності (8) крайовій задачі (1)-(4), (35) ставить у відповідність задачу побудови обмеженого на множині $\Omega_3' = \{(y,z) | y \in (0;b); z \in K_n\}$ розв'язку сепаратної системи диференціальних рівнянь (9) з крайовими умовами (10), крайовими умовами

$$\left(-\frac{\partial}{\partial y} + h_1\right)\tilde{T}_j\Big|_{y=0} = \tilde{g}_{1j}(\sigma, z),$$
$$\left(\frac{\partial}{\partial y} + h_2\right)\tilde{T}_{n+1}\Big|_{y=b} = \tilde{g}_{2j}(\sigma, z), \; j = \overline{1, n+1} \tag{36}$$

та умовами спряження (12).

До задачі (9), (10), (36), (12) застосуємо інтегральне перетворення Фур'є на декартовому сегменті $[0;b]$ щодо змінної y [16, 13]:

$$\Lambda_{yk}[g(y)] = \int_0^b g(y) v_k(y) dy \equiv g_k, \tag{37}$$

$$\Lambda_{yk}^{-1}[g_k] = \sum_{k=1}^{\infty} g_k \frac{v_k(y)}{\|v_k\|^2} \equiv g(y), \tag{38}$$

$$\Lambda_{yk}\left[\frac{d^2 g}{dy^2}\right] = -\gamma_k^2 g_k + v_k(0)\left(-\frac{dg}{dy} + h_1 g\right)\Big|_{y=0} + v_k(b)\left(\frac{dg}{dy} + h_2 g\right)\Big|_{y=b}, \tag{39}$$

де ядро перетворення

$$v_k(y) = \frac{\gamma_k \cos(\gamma_k y) + h_1 \sin(\gamma_k y)}{\sqrt{\gamma_k^2 + h_1^2}},$$

$$\|v_k\|^2 \equiv \int_0^b v_k^2(y) dy = \frac{b}{2} + \frac{(h_1 + h_2)(\gamma_k^2 + h_1 h_2)}{(\gamma_k^2 + h_1^2)(\gamma_k^2 + h_2^2)},$$

$\{\gamma_k\}_{k=1}^{\infty}$ – монотонно зростаюча послідовність дійсних різних додатних коренів трансцендентного рівняння

$$ctg(\gamma b) = \frac{\gamma^2 - h_1 h_2}{\gamma(h_1 + h_2)},$$

які утворюють дискретний спектр.

Інтегральний оператор Λ_{yk} за правилом (37) внаслідок тотожності (39) крайовій задачі (9), (10), (36), (12) ставить у відповідність задачу побудови обмеженого на множині K_n^+ розв'язку сепаратної системи звичайних диференціальних рівнянь 2-го порядку зі сталими коефіцієнтами

$$\left[a_{zj}^2 \frac{d^2}{dz^2} - \left(a_{xj}^2\sigma^2 + a_{yj}^2\gamma_k^2 + \chi_j^2\right)\right]\widetilde{T}_{jk}(\sigma, z) = = -\widetilde{F}_{jk}(\sigma, z); \;\; z \in I_j; \;\; j = \overline{1, n+1} \tag{40}$$

з крайовими умовами

$$\left(\alpha_{11}^0 \frac{\partial}{\partial z} + \beta_{11}^0\right)\widetilde{T}_{1k}\Bigg|_{z=l_0} = g_{0k}(\sigma), \left(\alpha_{22}^{n+1} \frac{\partial}{\partial z} + \beta_{22}^{n+1}\right)\widetilde{T}_{n+1,k}\Bigg|_{z=l} = g_{lk}(\sigma) \tag{41}$$

та умовами спряження

$$\begin{cases} \left[\left(R_p \dfrac{d}{dz} + 1\right)\widetilde{T}_{pk} - \widetilde{T}_{p+1,k}\right]\Bigg|_{z=l_p} = 0, \\ \left(\nu_p \dfrac{d\widetilde{T}_{pk}}{dz} - \nu_{p+1} \dfrac{d\widetilde{T}_{p+1,k}}{dz}\right)\Bigg|_{z=l_p} = 0, \; p = \overline{1, n}, \end{cases} \tag{42}$$

де
$$\widetilde{F}_{jk}(\sigma, z) = \widetilde{f}_{jk}(\sigma, z) + a_{xj}^2 K_x(0, \sigma)\omega_{jk}(z) + + a_{yj}^2 \nu_x(0)\widetilde{g}_{1j}(\sigma, z) + a_{yj}^2 \nu_x(b)\widetilde{g}_{2j}(\sigma, z).$$

З точністю до позначень крайова задача на спряження (40)-(42) співпадає із задачею (16)-(18). Отже, відповідно до формул (28), єдиний обмежений розв'язок задачі (40)-(42) визначають функції

$$\widetilde{T}_{ik}(\sigma, z) = \sum_{j=1}^{\infty}\left\{\left[\frac{\widetilde{F}_{kj}(\sigma)}{\lambda_j^2 + a_{x1}^2\sigma^2 + a_{y1}^2\gamma_k^2 + \chi_1^2} - \frac{\sigma_1 a_1^2 V_1(l_0, \lambda_j)\widetilde{g}_{0k}(\sigma)}{\alpha_{11}^0\left(\lambda_j^2 + a_{x1}^2\sigma^2 + a_{y1}^2\gamma_k^2 + \chi_1^2\right)} + \right.\right. \left.\left. + \frac{\sigma_{n+1} a_{n+1}^2 V_{n+1}(l, \lambda_j)\widetilde{g}_{lk}(\sigma)}{\alpha_{22}^{n+1}\left(\lambda_j^2 + a_{x1}^2\sigma^2 + a_{y1}^2\gamma_k^2 + \chi_1^2\right)}\right]\frac{V_i(z, \lambda_j)}{\left\|V(z, \lambda_j)\right\|^2}\right\}; \quad i = \overline{1, n+1}. \tag{43}$$

Застосувавши послідовно до функцій $\widetilde{T}_{ik}(\sigma,z)$, визначених формулами (43), обернені оператори Λ_{yk}^{-1} та F_{+x}^{-1} одержуємо функції

$$T_i(x,y,z)=\sum_{k=1}^{n+1}\int_0^{+\infty}\int_0^b\int_{l_{k-1}}^{l_k}E_{ik}(x,\xi,y,\eta,z,\zeta)f_k(\xi,\eta,\zeta)\sigma_k d\xi d\eta d\zeta+$$

$$+\int_0^{+\infty}\int_0^b\left[W_i^1(x,\xi,y,\eta,z)g_0(\xi,\eta)+W_i^2(x,\xi,y,\eta,z)g_l(\xi,\eta)\right]d\xi d\eta+$$

$$+a_{xi}^2\sum_{k=1}^{n+1}\int_0^b\int_{l_{k-1}}^{l_k}W_{xik}(x,y,\eta,z,\zeta)\omega_k(\eta,\zeta)\sigma_k d\eta d\zeta+$$

$$+a_{yi}^2\sum_{k=1}^{n+1}\int_0^{+\infty}\int_{l_{k-1}}^{l_k}W_{yik}^1(x,\xi,y,z,\zeta)g_{1k}(\xi,\zeta)\sigma_k d\xi d\zeta+$$

$$+a_{yi}^2\sum_{k=1}^{n+1}\int_0^{+\infty}\int_{l_{k-1}}^{l_k}W_{yik}^2(x,\xi,y,z,\zeta)g_{2k}(\xi,\zeta)\sigma_k d\xi d\zeta;i=\overline{1,n+1}, \tag{44}$$

які описують структуру стаціонарного температурного поля в розглянутому середовищі.

У формулах (44) беруть участь компоненти:

фундаментальної матриці розв’язків

$$E_{ik}(x,\xi,y,\eta,z,\zeta)=\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{r=1}^{\infty}\int_0^{+\infty}\frac{V_i(z,\lambda_i)V_k(\zeta,\lambda_j)}{\left\|V(z,\lambda_i)\right\|^2}\times$$
$$\times\frac{K_x(x,\sigma)K_x(\xi,\sigma)v_r(y)v_r(\eta)}{\left(\lambda_j^2+a_{x1}^2\sigma^2+a_{y1}^2\gamma_r^2+\chi_1^2\right)\left\|v_r\right\|^2}d\sigma;\ i,k=\overline{1,n+1}, \tag{45}$$

нижньої аплікатної матриці Гріна

$$W_i^1(x,\xi,y,\eta,z)=-a_1^2\sigma_1\left(\alpha_{11}^0\right)^{-1}E_{i1}(x,\xi,y,\eta,z,l_0), \tag{46}$$

верхньої аплікатної матриці Гріна

$$W_i^2(x,\xi,y,\eta,z)=\sigma_{n+1}a_{n+1}^2\left(\alpha_{22}^{n+1}\right)^{-1}E_{i,n+1}(x,\xi,y,\eta,z,l), \tag{47}$$

абсцисної матриці Гріна

$$W_{xik}(x,y,\eta,z,\zeta)=E_{ik}(x,0,y,\eta,z,\zeta), \tag{48}$$

лівої ординатної матриці Гріна

$$W_{yik}^1(x,\xi,y,z,\zeta)=E_{ik}(x,\xi,y,0,z,\zeta), \tag{49}$$

правої ординатної матриці Гріна

$$W^2_{yik}(x,\xi,y,z,\zeta) = E_{ik}(x,\xi,y,b,z,\zeta) \tag{50}$$

еліптичної крайової задачі (1)-(4), (35).

Зазначимо, що: 1) зауваження 1-4 поширюються на випадок розглянутої температурної задачі; 2) параметри p, h_j $(j = 1,2)$ дають можливість виділяти із формул (44) розв'язки крайових задач у випадках задання на поверхнях $x = 0, y = 0, y = b$ крайових умов 1-го роду й 2-го роду та їх можливих комбінацій; 3) аналіз розв'язку (44) в залежності від аналітичного виразу функцій $f_j(x,y,z)$, $\omega_j(y,z)$, $g_{1j}(x,z)$, $g_{2j}(x,z)$ $(j = \overline{1,n+1})$, $g_0(x,y)$ та $g_l(x,y)$ проводиться безпосередньо.

3. $\Omega_2 = (0; a) \times (0; b)$. У цьому випадку вважаємо, що на межі області Ω_2 виконуються крайові умови

$$\left(-\frac{\partial}{\partial x} + p_1\right)T_j\Big|_{x=0} = \omega_{1j}(y,z); \left(\frac{\partial}{\partial x} + p_2\right)T_j\Big|_{x=a} = \omega_{2j}(y,z); j = \overline{1,n+1} \tag{51}$$

щодо змінної *x* та крайові умови (35) щодо змінної *y*, де $p_1 \geq 0$ – коефіцієнт теплообміну через поверхню $x = 0$; $\omega_{1j}(y;z) = p_1 T_j^{c1}(y,z)$, $T_j^{c1}(y,z)$ – температура середовища на поверхні $x = 0$; $p_2 \geq 0$ – коефіцієнт теплообміну через поверхню $x = a$; $\omega_{2j}(y;z) = p_2 T_j^{c2}(y,z)$, $T_j^{c2}(y,z)$ – температура середовища на поверхні $x = a$.

Припустимо, що задані й шукані функції задовольняють умови застосовності залучених нижче інтегральних перетворень [16, 13, 12].

До задачі (1)-(3), (51), (35) застосуємо інтегральне перетворення Фур'є на декартовому сегменті [0; *a*] щодо змінної *x* [16, 13]:

$$L_{xm}[g(x)] = \int_0^a g(x) w_m(x) dx \equiv g_m, \tag{52}$$

$$L^{-1}_{xm}[g_m] = \sum_{m=1}^{\infty} g_m \frac{w_m(x)}{\|w_m\|^2} \equiv g(x), \tag{53}$$

$$L_{xm}\left[\frac{d^2 g}{dx^2}\right] = -\delta_m^2 g_m + w_m(0)\left(-\frac{dg}{dx} + p_1 g\right)\Bigg|_{x=0} + w_m(a)\left(\frac{dg}{dx} + p_2 g\right)\Bigg|_{x=a}, \tag{54}$$

де ядро перетворення

$$w_m(x) = \frac{\delta_m \cos(\delta_m x) + p_1 \sin(\delta_m x)}{\sqrt{\delta_m{}^2 + p_1^2}},$$

$$\|w_m\|^2 \equiv \int_0^a w_m^2(x)dx = \frac{a}{2} + \frac{(p_1+p_2)\left(\delta_m^2 + p_1 p_2\right)}{\left(\delta_m^2 + p_1^2\right)\left(\delta_m^2 + p_2^2\right)},$$

$\{\delta_m\}_{m=1}^{\infty}$ – монотонно зростаюча послідовність дійсних різних додатних коренів трансцендентного рівняння

$$ctg(\delta a) = \frac{\delta^2 - p_1 p_2}{\delta(p_1 + p_2)},$$

які утворюють дискретний спектр.

Інтегральний оператор L_{xm} за правилом (52) внаслідок тотожності (54) крайовій задачі (1)-(3), (51), (35) ставить у відповідність задачу побудови обмеженого на множині $\Omega_3' = \left\{(y,z)\middle| y \in (0;b); z \in K_n^+\right\}$ розв'язку сепаратної системи диференціальних рівнянь

$$\left[a_{yj}^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} + a_{zj}^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right] T_{jm} - (a_{xj}^2 \delta^2 + \chi_{jm}^2) = -F_{jm}(y,z);\ z \in I_j;\ j = \overline{1, n+1} \quad (55)$$

з крайовими умовами

$$\left(\alpha_{11}^0 \frac{\partial}{\partial z} + \beta_{11}^0\right) T_{1m}\Bigg|_{z=l_0} = g_{0m}(y), \left(\alpha_{22}^{n+1} \frac{\partial}{\partial z} + \beta_{22}^{n+1}\right) T_{n+1,m}\Bigg|_{z=l} = g_{lm}(y) \quad (56)$$

$$\left(-\frac{\partial}{\partial y} + h_1\right) T_{jm}\Big|_{y=0} = g_{1jm}(z); \left(\frac{\partial}{\partial y} + h_2\right) T_{jm}\Big|_{y=b} = g_{2jm}(z);\ j = \overline{1, n+1} \quad (57)$$

та умовами спряження

$$\begin{cases} \left[\left(R_p \dfrac{d}{dz} + 1\right) T_{pm} - T_{p+1,m}\right]\Bigg|_{z=l_p} = 0, \\ \left(\nu_p \dfrac{dT_{pm}}{dz} - \nu_{p+1} \dfrac{dT_{p+1,m}}{dz}\right)\Bigg|_{z=l_p} = 0,\ p = \overline{1, n}, \end{cases} \quad (58)$$

де
$$F_{jm}(y,z) = f_{jm}(y,z) + a_{xj}^2 w_m(0)\omega_{1j}(y,z) +$$
$$+ a_{xj}^2 w_m(a)\omega_{2j}(y,z);\ j = \overline{1, n+1}.$$

До задачі (55)-(58) застосуємо інтегральне перетворення Фур'є на декартовому сегменті $[0;b]$ щодо змінної y. Інтегральний оператор Λ_{yk} за правилом (37) внаслідок тотожності (39) крайовій задачі (55)-(58) ставить у відповідність задачу побудови обмеженого на множині K_n^+ розв'язку сепаратної системи звичайних диференціальних рівнянь 2-го порядку зі сталими коефіцієнтами

$$\left[a_{zj}^2\frac{d^2}{dz^2}-\left(a_{xj}^2\delta_m^2+a_{yj}^2\gamma_k^2+\chi_j^2\right)\right]T_{jmk}(z)=-F_{jmk}(z);\ z\in I_j;\ j=\overline{1,n+1} \quad (59)$$

з крайовими умовами

$$\left(\alpha_{11}^0\frac{d}{dz}+\beta_{11}^0\right)T_{1mk}\Bigg|_{z=l_0}=g_{0mk},\quad \left(\alpha_{22}^{n+1}\frac{d}{dz}+\beta_{22}^{n+1}\right)T_{n+1,mk}\Bigg|_{z=l}=g_{lmk} \quad (60)$$

та умовами спряження

$$\begin{cases}\left[\left(R_p\frac{d}{dz}+1\right)T_{pmk}-T_{p+1,mk}\right]\Bigg|_{z=l_p}=0,\\ \left(\nu_p\frac{dT_{pmk}}{dz}-\nu_{p+1}\frac{dT_{p+1,mk}}{dz}\right)\Bigg|_{z=l_p}=0,\ p=\overline{1,n},\end{cases} \quad (61)$$

де $$F_{jmk}(z)=f_{jmk}(z)+a_{xj}^2w_m(0)\omega_{1jk}(z)+a_{xj}^2w_m(a)\omega_{2jk}(z)+$$
$$+a_{yj}^2v_k(0)g_{1jm}(z)+a_{yj}^2v_k(b)g_{2jm}(z).$$

З точністю до позначень крайова задача на спряження (59)-(61) співпадає із задачею (40)-(42). Отже, відповідно до формул (43), єдиний обмежений розв'язок задачі (59)-(61) визначають функції

$$T_{imk}(z)=\sum_{j=1}^{\infty}\left\{\left[\frac{F_{mkj}}{\lambda_j^2+a_{x1}^2\delta_m^2+a_{y1}^2\gamma_k^2+\chi_1^2}-\frac{\sigma_1a_1^2V_1(l_0,\lambda_j)g_{0mk}}{\alpha_{11}^0\left(\lambda_j^2+a_{x1}^2\delta_m^2+a_{y1}^2\gamma_k^2+\chi_1^2\right)}+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{\sigma_{n+1}a_{n+1}^2V_{n+1}(l,\lambda_j)g_{lmk}}{\alpha_{22}^{n+1}\left(\lambda_j^2+a_{x1}^2\delta_m^2+a_{y1}^2\gamma_k^2+\chi_1^2\right)}\right]\frac{V_i(z,\lambda_j)}{\left\|V(z,\lambda_j)\right\|^2}\right\};\quad i=\overline{1,n+1}. \quad (62)$$

Застосувавши послідовно до функцій $T_{imk}(z)$, визначених формулами (62), обернені оператори Λ_{yk}^{-1} та L_{xm}^{-1} одержуємо функції

$$T_i(x,y,z)=\sum_{k=1}^{n+1}\int_0^a\int_0^b\int_{l_{k-1}}^{l_k}E_{ik}(x,\xi,y,\eta,z,\zeta)f_k(\xi,\eta,\zeta)\sigma_k d\xi d\eta d\zeta+$$
$$+\int_0^a\int_0^b\left[W_i^1(x,\xi,y,\eta,z)g_0(\xi,\eta)+W_i^2(x,\xi,y,\eta,z)g_l(\xi,\eta)\right]d\xi d\eta+$$
$$+a_{xi}^2\sum_{k=1}^{n+1}\int_0^b\int_{l_{k-1}}^{l_k}W_{xik}(x,y,\eta,z,\zeta)\omega_{1k}(\eta,\zeta)\sigma_k d\eta d\zeta+$$

$$+a_{xi}^2\sum_{k=1}^{n+1}\int_0^b\int_{l_{k-1}}^{l_k}W_{xik}(x,y,\eta,z,\zeta)\omega_{2k}(\eta,\zeta)\sigma_k d\eta d\zeta+$$

$$+a_{yi}^2\sum_{k=1}^{n+1}\int_0^{+\infty}\int_{l_{k-1}}^{l_k}W_{yik}^1(x,\xi,y,z,\zeta)g_{1k}(\xi,\zeta)\sigma_k d\xi d\zeta+$$

$$+a_{yi}^2\sum_{k=1}^{n+1}\int_0^{+\infty}\int_{l_{k-1}}^{l_k}W_{yik}^2(x,\xi,y,z,\zeta)g_{2k}(\xi,\zeta)\sigma_k d\xi d\zeta;\ i=\overline{1,n+1},\qquad(63)$$

які описують структуру стаціонарного температурного поля в розглянутому середовищі.

У формулах (63) беруть участь компоненти:

фундаментальної матриці розв’язків

$$E_{ik}(x,\xi,y,\eta,z,\zeta)=\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{V_i(z,\lambda_j)V_k(\zeta,\lambda_j)}{\left\|V(z,\lambda_j)\right\|^2}\times$$
$$\times\frac{w_r(x)w_r(\xi)v_p(y)v_p(\eta)}{\left(\lambda_j^2+a_{x1}^2\delta_r^2+a_{y1}^2\gamma_p^2+\chi_1^2\right)\left\|w_r\right\|^2\left\|v_p\right\|^2};i,k=\overline{1,n+1},\qquad(64)$$

нижньої аплікатної матриці Гріна

$$W_i^1(x,\xi,y,\eta,z)=-a_1^2\sigma_1\left(\alpha_{11}^0\right)^{-1}E_{i1}(x,\xi,y,\eta,z,l_0),\qquad(65)$$

верхньої аплікатної матриці Гріна

$$W_i^2(x,\xi,y,\eta,z)=\sigma_{n+1}a_{n+1}^2\left(\alpha_{22}^{n+1}\right)^{-1}E_{i,n+1}(x,\xi,y,\eta,z,l),\qquad(66)$$

лівої абсцисної матриці Гріна

$$W_{xik}^1(x,y,\eta,z,\zeta)=E_{ik}(x,0,y,\eta,z,\zeta),\qquad(67)$$

компоненти правої абсцисної матриці Гріна

$$W_{xik}^2(x,y,\eta,z,\zeta)=E_{ik}(x,a,y,\eta,z,\zeta),\qquad(68)$$

лівої ординатної матриці Гріна

$$W_{yik}^1(x,\xi,y,z,\zeta)=E_{ik}(x,\xi,y,0,z,\zeta),\qquad(69)$$

правої ординатної матриці Гріна

$$W_{yik}^2(x,\xi,y,z,\zeta)=E_{ik}(x,\xi,y,b,z,\zeta)\qquad(70)$$

еліптичної крайової задачі (1)-(3), (51), (35).

Зазначимо, що: 1) зауваження 1-4 поширюються на випадок розглянутої температурної задачі; 2) параметри $p_j,h_j\ (j=1,2)$ дають можливість виділяти із формул (63) розв’язки крайових задач у випадках задання на поверхнях $x=0$, $x=a$; $y=0$, $y=b$ крайових умов 1-го роду й 2-го роду та їх можливих комбінацій; 3) аналіз розв'язку (63) в залежності від аналітичного виразу функцій $f_j(x,y,z)$, $\omega_{1j}(y,z)$, $\omega_{2j}(y,z)$, $g_{1j}(x,z)$, $g_{2j}(x,z)$, $j=\overline{1,n+1}$, $g_0(x,y)$ та $g_l(x,y)$ проводиться безпосередньо.

Висновки. При найбільш загальних припущеннях в межах феноменологічної теорії теплопровідності побудовано інтегральні зображення точних аналітичних розв'язків стаціонарних задач в обмежених багатошарових просторових середовищах. Одержані розв'язки носять алгоритмічний характер, неперервно залежать від параметрів та даних задачі й можуть бути використані як в теоретичних дослідженнях, так і в інженерних розрахунках.

Список використаних джерел:

1. Боли Б., Уэйнер Дж. Теория температурных напряжений. – М.: Мир, 1964. – 517 с.
2. Громик А. П., Конет І. М. Стаціонарні задачі теплопровідності в необмежених двоскладових просторових областях // Крайові задачі для диференціальних рівнянь: Зб. наук. пр. – Чернівці: Прут, 2006. – Вип. 13. – С.52-65.
3. Громик А. П., Конет І. М. Крайові задачі теплопровідності в необмежених двоскладових просторових областях // Крайові задачі для диференціальних рівнянь: Зб. наук. пр. – Чернівці: Прут, 2006. – Вип. 14. – С.36-50.
4. Громик А. П., Конет І. М. Крайові задачі теплопровідності в необмежених тришарових просторових областях // Наукові праці Кам'янець-Подільського державного університету. Збірник за підсумками звітної наукової конференції викладачів і аспірантів. Випуск 5. – В 3-х томах. – Кам'янець-Подільський: К-ПДУ, 2006. – Т. 1. – С.94-95.
5. Дейнека В. С., Сергиенко И. В., Скопецкий В. В. Модели и методы решения задач с условиями сопряжения. – К.: Наук. думка, 1998. – 614 с.
6. Карслоу Г., Егер Д. Теплопроводность твердых тел. – М.: Наука, 1964. – 448 с.
7. Коляно Ю. М. Методы теплопроводности и термоупругости неоднородного тела. – К.: Наук. думка, 1992. – 280 с.
8. Конет І. М. Стаціонарні та нестаціонарні температурні поля в ортотропних сферичних областях. – К.: Ін-т математики НАН України, 1998. – 209 с.
9. Конет І. М., Ленюк М. П. Стаціонарні та нестаціонарні температурні поля в циліндрично-кругових областях. – Чернівці: Прут, 2001. – 312 с.
10. Конет І. М., Ленюк М. П. Температурні поля в кусково-однорідних циліндричних областях. – Чернівці: Прут, 2004. – 276 с.
11. Конет І. М., Ленюк М. П. Крайові задачі теплопровідності в необмежених тришарових просторових областях // Крайові задачі для диференціальних рівнянь: Зб. наук. пр., – Чернівці: Прут, 2006. – Вип. 14. – С.84-96.
12. Ленюк М. П. Температурні поля в плоских кусково-однорідних ортотропних областях. – К.: Ін-т математики НАН України, 1997. – 188 с.
13. Ленюк М. П. Интегральные преобразования с разделенными переменными (Фурье, Ханкеля). – К., 1983. – 60 с. – (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 83.4).

14. Подстригач Я. С., Ломакин В. А., Коляно Ю. М. Термоупругость тел неоднородной структуры. – М.: Наука, 1984. – 368 с.
15. Сергиенко И. В., Скопецкий В. В., Дейнека В. С. Математическое моделирование и исследование процессов в неоднородных средах. – К.: Наук. думка, 1991. – 432 с.
16. Снеддон И. Преобразования Фурье. – М.: Из-во иностр. лит., 1956. – 668 с.
17. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1972. – 735 с.

The method of integral transformations builds the exact analytical solution of stationary task of heat conductivity for the limited multi-layer space areas.

Key words: *differential equalization Poisson, integral transformations, fundamental solutions.*

Отримано: 05.06.2008

УДК 517.5

У. В. Гудима

Кам'янець-Подільський національний університет

АПРОКСИМАЦІЯ НЕПЕРЕРВНОГО КОМПАКТНОЗНАЧНОГО ВІДОБРАЖЕННЯ ЧЕБИШОВСЬКИМ ПІДПРОСТОРОМ З ДОДАТКОВИМ ОБМЕЖЕННЯМ

У статті встановлено теореми характеризації, єдиності екстремального елемента, співвідношення двоїстості та привило чебишовського альтернансу для задачі найкращої рівномірної апроксимації компактнозначного відображення чебишовським підпростором з додатковим обмеженням.

Ключові слова: *компактнозначне відображення, чебишовський альтернанс, співвідношення двоїстості.*

Вступ. У даній статті для задачі найкращої рівномірної апроксимації компактнозначного відображення чебишовським підпростором з додатковим обмеженням доведено теорему єдиності, теорему характеризації екстремального елемента, встановлено співвідношення двоїстості та правило чебишовського альтернансу. Отримані результати є узагальненням на випадок задачі відшукання величини (1) відповідних результатів дослідження задачі найкращої рівномірної апроксимації неперервної на компакті функції елементами скінченновимірного підпростору, які задовольняють додатковому обмеженню (див., наприклад, [1-6]).

