References:

1. Pawlikowski J. M., Appl J. Phys. 53, 5 (1982).
2. Sieranski K., Szatkowski J., and Misiewicz J. Phys. Rev. B 50, 11 (1994).
3. Harrison A. W. Electronic structure and the Properties of Solids // The Physics of the Chemical Bond. – San Francisco: W.H. Freeman and Co., 1980.

Напівпровідники групи $A_3^{II}B_2^{V}$ мають структури, сильно наближені до кубічних щільно упакованих кристалічних ґраток. Їхні катіонні вакансії можуть знаходитися у відносному безладі і навпаки. Ця деталь безпосередньо впливає на так звані “структурні фактори” елементів матриці гамільтоніана. Елементи матриці змінюються в залежності від припущення про ступінь впорядкування вакансій. Дослідження показують, що частина енергетичних рівнів знаходяться в прямій залежності від ступеню впорядкування вакансій, тоді як друга їхня частина незалежна.

Ключові слова: $A_3^{II}B_2^{V}$ *сполуки, матриця гамільтоніана, енергетичні зони, катіонні вакансії.*

Отримано: 02.06.2008

УДК 518:517.948

М. В. Дорошенко, Г. П. Коваль, Л. В. Лазурчак

Дрогобицький державний педагогічний університет імені Івана Франка, м. Дрогобич

ЧИСЕЛЬНЕ ЗНАХОДЖЕННЯ ОПТИМАЛЬНОГО РОЗПОДІЛУ ГРАНИЧНИХ ПОТЕНЦІАЛІВ ТА ГЕОМЕТРІЇ ГРАНИЧНИХ ПОВЕРХОНЬ В ЗАДАЧАХ ТЕОРІЇ ПОТЕНЦІАЛУ

Розглядається обернена задача теорії потенціалу знаходження оптимальної геометрії граничних поверхонь та оптимального розподілу граничних потенціалів в осесиметричному випадку. Методика рішення оберненої задачі зводиться до мінімізації деякого функціоналу та розв’язуванні системи інтегральних рівнянь Фредгольма першого роду з логарифмічною особливістю.

Ключові слова: *обернена задача, інтегральні рівняння, сплайн-функції, метод колокації, функціонал.*

Постановка проблеми. Крайові задачі математичної фізики поділяються на прямі та обернені.

У прямих задачах потрібно знайти характеристики поля при відомих геометрії граничних поверхонь та крайових умовах. В оберне-

© М. В. Дорошенко, Г. П. Коваль, Л. В. Лазурчак, 2008

них задачах потрібно знайти крайові умови та геометрію граничних поверхонь, які реалізують задані характеристики поля.

Рішення прямої задачі теорії потенціалу при розрахунку електростатичних полів, які створюють електронно-оптичні системи, зводиться до рішення внутрішньої та зовнішньої задачі Діріхле для рівняння Лапласа.

Задача знаходження оптимального розподілу граничних потенціалів та оптимальної геометрії граничних поверхонь є актуальною при проектуванні електронно-оптичних систем, які реалізують задані параметри електронно-оптичних систем. Така задача зводиться до рішення деяких обернених задач математичної фізики.

Обернені задачі математичної фізики часто в класичному змісті поставлені некоректно, тобто, малим змінам у функціоналах можуть відповідати великі зміни у розв'язку задачі [5, с.356]. Тому розробка ефективних алгоритмів рішення обернених задач математичної фізики є достатньо актуальною проблемою.

Аналіз попередніх публікацій. Ефективним методом рішення прямої задачі є метод інтегральних рівнянь. Метод інтегральних рівнянь застосовувався для рішення задачі Діріхле для рівняння Лапласа в роботах [1, с.12-134; 4, с.215-345]. За допомогою даного методу рішення зовнішньої та внутрішньої задач Діріхле для рівняння Лапласа зводиться до рішення інтегральних рівнянь Фредгольма першого роду зі слабкою особливістю в ядрі. Ефективність методу інтегральних рівнянь полягає в тому, що розмірність задачі зменшується на одиницю.

Задача знаходження оптимальних конструкцій електронно-оптичних систем, яка зводиться до рішення обернених задач теорії потенціалу, розглядалась в роботах [3, с.101-141; 6; 7].

В роботах [3, с.101-141; 6] при знаходженні оптимальних конструкцій електронно-оптичних систем розв'язувались інтегральні рівняння у варіаціях і здійснювалась мінімізація деякого фунціоналу.

В роботі [7] розглянута обернена задача реконструкції границі обмеженого включення в частково необмежену канонічну область задачі Діріхле для рівняння Лапласа. Для розв'язку такої задачі застосовувався гібридний метод, який полягає в наступному: методом Ньютона здійснюється лінеаризація відповідного нелінійного операторного рівняння, до якого зводиться рішення оберненої задачі, використовується техніка функцій Гріна для того, щоб розв'язок задачі звести до розв'язку деякого інтегрального рівняння першого роду.

Мета роботи: розробка чисельних алгоритмів для знаходження оптимального розподілу граничних потенціалів та знаходження оптимальної геометрії граничних поверхонь в осесиметричному випадку при заданому розподілу потенціалу на осі симетрії, які полягають в знаходженні мінімумів деяких функціоналів та розв'язуванні інтегральних рівнянь Фредгольма першого роду.

Виклад основних результатів. На відрізку $[a,b]$ осі OZ циліндричної системи координат (r,z,φ) задана деяка достатньо гладка функція $U_0(z)$. Необхідно знайти розподіл потенціалів $\left\{V_0^{(i)}\right\}_{i=1}^{m}$ на осі симетрії розімкнутих поверхонь $\left\{S=\bigcup_{i=1}^{m} S_i\right\}$, які створюють осесиметричне електростатичне поле $U(r,z)$ при умові, що $U(0,z)=U_0(z)$, $z\in[a,b]$. Функція $U(r,z)$ є розв'язком такої задачі Діріхле для рівняння Лапласа:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0\ ; \qquad (1)$$

$$U(r,z)=V_0^{(i)},\quad (r,z)\in S_i\ ; \qquad (2)$$

$$\lim_{(r,z)\to\infty} U(r,z)=0\ . \qquad (3)$$

Невідомі потенціали $V_0^{(i)}$ потрібно визначати з умови $U(0,z)=U_0(z)$.

Розв'язок задачі (1)-(3) представимо в такому вигляді:

$$U(r,z)=\sum_{i=1}^{m} V_0{}^{(i)}\ \varphi_i(\mathrm{z}), \qquad (4)$$

де $\varphi_i(r,z)$ є розв'язки таких характеристичних крайових задач:

$$\Delta\varphi_{\mathrm{i}}(r,z)=0, \qquad (5)$$

де $\varphi_i(r,z)=\begin{cases}0, & \text{якщо } (r,z)\notin S_i\\ 1, & \text{якщо } (r,z)\in S_i\end{cases}$ і $\lim\limits_{(r,z)\to\infty}\varphi_i(r,z)=0$.

Розв'язки задачі (5) не залежать від заданих на поверхнях потенціалів.

Невідомі потенціали $V_0^{(i)}$ є розв'язком такої задачі:

$$F\left(V_0^{(1)},V_0^{(2)}\ldots,V_0^{(m)}\right)=\min\left\|U_0(z)-\sum_{i=1}^{m}V_0^{(i)}\varphi_i(z)\right\|^2, \qquad (6)$$

де $\|g(z)\|^2=\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b |g(z)|^2\,dz$.

Суттєвим при знаходженні мінімуму функціонала (6) є дослідження лінійної незалежності функцій $\{\varphi_i(z)\}_{i=1}^m$.

Проблема лінійної незалежності пов'язана з дослідженням єдиності розв'язку даної задачі.

Теорема. Якщо $U_0(z)=0$ на $[a,b]$, то задача має тривіальний розв'язок, тобто $V_0^{(i)}=0, i=\overline{1,m}$.

Доведення. Нехай існує деяка функція $W(r,z)$, яка є розв'язком задачі (1)-(3).

Константи $V_0^{(i)}$ не дорівнюють нулю і виконується умова $W(0,z)=U_0(z)=0, \quad z\in[a,b]$.

Покажемо, що $W(r,z)\equiv 0$ в $\mathbb{R}^3$.

Нехай z_0 є середина відрізка $[a,b]$. Опишемо сферу $\sum_\varepsilon(z_0)$ з центром у точці z_0 радіуса ε. Число ε вибираємо так, щоб сфера $\sum_\varepsilon(z_0)$ не дотикалась до граничних поверхонь S_i і точки $z=a$ і $z=b$ знаходились поза сферою. Функція $W(r,z)$ є гармонічною в $\sum_\varepsilon(z_0)$. Позначимо C коло, утворене перетином площини $\varphi=0$ і $\sum_\varepsilon(z_0)$. Оскільки $W(0,z_0+\varepsilon)=W(0,z_0-\varepsilon)=0,$ то з принципу максимуму, випливає, що існує точка $W(\bar{r},\bar{z})$, така, що $W(\bar{r},\bar{z})=0.$

У протилежному випадку $W(r,z)\le 0, W(r,z)\ge 0.$ Припустимо, що $(r,z)\in\sum_\varepsilon(z_0)$. На основі теореми про середнє для гармонічних функцій маємо

$$W(0,z)=\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{\sum\varepsilon(z_0)} W(r,z)ds=0\,.$$

З даної формули отримаємо, що $W(r,z)=0$ на $\sum_\varepsilon(z_0)$. З теореми єдиності випливає, що $W(r,z)\equiv 0$ в кулі $K_\varepsilon(r,z)$. Аналогічно отримуємо такий самий результат у випадку, $W(r,z)\le 0,\ (r,z)\in\sum_{\varepsilon(z_0)}$.

Нехай на частині кола C_ε, обмеженої точками $(0,z_0-\varepsilon)$ і $(r,z)\in\sum_\varepsilon(z_0)$ функція $W(r,z)\ge 0.$ Розглянемо сферу $\sum\varepsilon_1(z_0)$, де $\varepsilon_1<\varepsilon$. Оскільки функція $W(r,z)$ неперервна, то на основі наведених вище міркувань, дістаємо, що існує точка $(\bar{r},\bar{z})\in C$, де $W(\bar{r},\bar{z})=0$.

Виберемо $\varepsilon_2 > \varepsilon_1, ..., \varepsilon_n > \varepsilon_{n-1}$, так, що $\lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$. Ми одержали, що на площині $\varphi = 0$ існує деяка крива Γ з кінцями $(\bar{r}, \bar{z}) \in C$ і $(0, z_0)$, на якій $W(r,z) \equiv 0$. Також в області *G*, яка утворена обертанням навколо осі *Z* кривої Γ і кола $C_{\varepsilon,}$ функція $W(r,z) \equiv 0$. Оскільки $W(r,z) \le 0$ на $\sum_{\Gamma}(z_1)$, то $W(r,z) \equiv 0$ на $\sum_{\Gamma}(z_1)$. З теореми єдиності дістаємо, що $W(r,z) \equiv 0$, якщо $(r,z) \in K_{\Gamma}(z_1)$.

Отже, ми показали, що існує деяка куля *K*, в якій функція $W(r,z) \equiv 0$.

Розглянемо тепер довільну область $B \in R^3$, яка містить дану кулю *K* і гранична поверхня *S* знаходиться поза *B*. Оскільки за умовою функція $W(r,z)$ є гармонічною в *B*, то дістанемо, що $W(r,z) \equiv 0$, якщо $(r,z) \in B$.

Оскільки область *B* вибрана довільно, то отримуємо $W(r,z) \equiv 0$ для довільної точки (r, z) поза *S*, то $W(r,z) \equiv 0$, $(r,z) \in B$, тобто $V_0^{(i)} = 0$, $i = \overline{1,m}$.

Теорема доведена.

Чисельне розв'язування даної задачі зводиться до розв'язування двох таких задач:

1. Системи одномірних інтегральних рівнянь Фредгольма першого роду

$$\sum_{i=1}^{m} \int_{L_i} \mu^{(i)}(r,z) E^{j(i)}(r,z,\bar{r},\bar{z})\, dl_i = \delta_{ij}, \tag{7}$$

де $\mu^{(i)}(r,z)$ – шукані функції,

$$E^{j(i)}(r,z,\bar{r},\bar{z}) = \frac{K^{j(i)}(k) r^{(i)}}{\left(\left(r^{(i)} + \bar{r}^{(j)}\right)^2 + \left(z^{(i)} - \bar{z}^{(j)}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}},$$

$K^{j(i)}(k)$ – повні еліптичні інтеграли першого роду; $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,m}$;

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{якщо } i \ne j; \\ 1, & \text{якщо } i = j. \end{cases}$$

2. Мінімізації функціоналу:

$$F\left(V_0^{(1)},V_0^{(2)},\ldots,V_0^{(m)}\right)=\left\|U_0\left(\bar{z}\right)-\sum_{i=1}^{m}V_0^{(i)}\varphi_i\left(\bar{z}\right)\right\|^2, \qquad (8)$$

де $$U_i\left(0,\bar{z}\right)=\int\limits_{L_i}\mu^{(i)}(r,z)E^{(i)}\left(r,z,0,\bar{z}\right)dl\,,\ \phi_i\left(\bar{z}\right)=U_i\left(0,\bar{z}\right).$$

Невідомі функції $\mu^{(i)}(r,z)$ мають сингулярну особливість на краях розімкнутих поверхонь, а ядро має логарифмічну особливість при суміщенні точки спостереження з точкою інтегрування. Якщо поверхні замкнуті, то отримані інтегральні рівняння Фредгольма мають тільки логарифмічну особливість.

Для розв'язування системи інтегральних рівнянь застосовувався метод колокації, а невідомі функції $\mu^{(i)}(r,z)$ представлялися за допомогою кубічних сплайнів [2], а саме:

Нехай криві L_i задані параметрично

$$r_i=r_i(t),\ z_i=z_i(t),\ a_i\le t\le b_i\,.$$

На відрізках $[a_i,b_i]$ виберемо вузлові точки $a_i=t_0<t_1<\ldots<$ $<t_n=b_i$. Невідомі функції $\mu^{(i)}{}_k(t)=\mu_k{}^{(i)}(r_i(t),z_i(t))$ на кожному інтервалі $[t_k,t_{k+1}]$ представимо в такому вигляді:

$$\mu_k^{(i)}(\tau)=(1-\tau)^2(1+2\tau)\mu_k^{(i)}+(3-2\tau)\tau^2\mu_{k+1}^{(i)}+$$
$$+(1-\tau)^2h_k\mu'^{(i)}_k+\tau^2(\tau-1)h_{k+1}\mu'^{(i)}_{k+1};$$
$$h_k=t_{k+1}-t_k\,,\ \tau=\frac{t-t_k}{h_k}\,.$$

Невідомі функції на L_i представимо так

$$\mu^{(i)}(\tau)=\sum_{k=0}^{n-1}\mu_k^{(i)}(\tau)\theta_k(\tau),$$

де $\theta_k(\tau)$ – функції, які враховують особливість на краю поверхонь S_i [4, с.234] і мають такий вигляд:

$$\theta_1(\tau)=(\tau-a)^{-n_1},\quad \theta_n(\tau)=(b-\tau)^{-n_2},\quad \theta_k(\tau)=1,$$
$$k=\overline{2,n-1},\quad 0\le n_1\le 1,\quad 0\le n_2\le 1.$$

В результаті застосування для розв'язку системи інтегральних рівнянь Фредгольма першого роду (7) методу колокації отримуємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь, коефіцієнти якої мають особливості завдяки особливостям на краю розімкнутих поверхонь та в ядрах інтегральних рівнянь. Особливості на краю розімкнутих поверхонь виділяються заміною змінних [4, с.235-237]. Логарифмічна особливість в ядрі виділяється за методикою ослаблення особливостей Канторовича, тобто, від підінтегральної функції віднімається та додається функція, яка поводить себе в особливій точці як підінтегральна функція, а інтеграл від неї знаходиться аналітично. Для наближеного обчислення коефіцієнтів матриці системи лінійних алгебраїчних рівнянь використовувалась квадратурна формула Гауса. При чисельній реалізації методу колокації для наближеного обчислення інтегралів з логарифмічною особливістю використовувалась квадратурна формула з ваговою функцією $\ln\frac{1}{x}$.

Невідомі $V_0^{(i)}$ знаходилися з необхідної умови мінімуму функціонала (8), тобто такої системи лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\frac{\partial F\left(V_0^{(1)}, V_0^{(2)}, \ldots, V_0^{(m)}\right)}{\partial V_0^{(i)}} = 0, \quad i = \overline{1,m}.$$

Чисельна реалізація запропонованої методики здійснювалась в прикладній системі MatLab. Відносна похибка розрахунку тестових прикладів не перевищувала 0,05%.

Тепер розглянемо обернену задачу теорії потенціалу, яка полягає в знаходженні невідомої геометрії області, якщо відомий осьовий розподіл потенціалу поля $\Phi(z)$ на проміжку $[a, b]$. Наближений розв'язок такої задачі базується на методі інтегральних рівнянь та теорії малих збурень, а саме: малі збурення $\delta\vec{r}$ регулярної області L породжують збурення потенціалу $\delta u = -\left(\nabla U, \delta\vec{r}\right)$, де ∇U – величина градієнта поля на незбуреній границі.

Застосовуючи теорію малих збурень [5, с.356-368], невідоме параметричне представлення геометрії області будемо шукати в такому вигляді:

$$\begin{aligned} r_k(\alpha) &= r_{k-1}(\alpha) + \delta r(\alpha), \\ z_k(\alpha) &= z_{k-1}(\alpha) + \delta z(\alpha), \end{aligned} \tag{9}$$

де $r_0(\alpha), z_0(\alpha)$ – вибираються на основі апріорної інформації про невідому достатньо гладку замкнуту область, а варіації $\delta r(\alpha)$, $\delta z(\alpha)$ представимо таким чином:

$$\delta r(\alpha) = \sum_{i=1}^{n} a_i \varphi_i(\alpha), \quad \delta z(\alpha) = \sum_{i=1}^{m} b_i \psi_i(\alpha), \tag{10}$$

$\varphi_i(\alpha)$, $\psi_i(\alpha)$ – деякі лінійно незалежні системи функції.

Невідому густину будемо представляти аналогічно, а саме:

$$\mu_k(\alpha) = \mu_{k-1}(\alpha) + \delta\mu(\alpha), \tag{11}$$

де
$$\delta\mu(\alpha)=\sum_{i=1}^{l} c_i \tau_i(\alpha).$$

Алгоритм знаходження невідомої геометрії області зводиться до такої ітераційної чисельної схеми:

1. При заданому $r_{k-1}(\alpha)$ і $z_{k-1}(\alpha)$ розв'язуємо інтегральне рівняння Фредгольма першого роду, а саме рівняння виду:
$$\int_L \mu_{k-1}(r,z)E\left(r,z,\bar{r},\bar{z}\right)dl=U_0\,, \tag{12}$$
де $\mu_{k-1}(r,z)$ – шукана густина на $k-1$ кроці ітерації;
$$E\left(r,z,\bar{r},\bar{z}\right)=\frac{K(k)\,r}{\left(\left(r+\bar{r}\right)^2+\left(z-\bar{z}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}}.$$

Для чисельного розв’язування інтегрального рівняння (12) застосовуємо метод колокації, а невідому густину представляємо у вигляді кубічних сплайн-функцій. Логарифмічна особливість в ядрі виділяться методом ослаблення особливостей Канторовича.

2. Визначення невідомих коефіцієнтів a_i, b_i, c_i зводиться до мінімізації такого функціоналу:
$$F\left(a_1, a_2,\ldots,b_n, c_1,\ldots,c_l\right)=\left\|\Phi(z)-u(0,z)-\delta u(z)\right\|^2_{L_2[a,b]}, \tag{13}$$
де
$$\delta U(z)=\int_{L(\alpha)}\left(\delta\mu(\alpha)G_{k-1}(\alpha,z)+\mu_{k-1}(\alpha)V_{k-1}(\alpha,z)\right)d\alpha\,,$$
$$G_{k-1}(\alpha,z)=2\pi\frac{r_{k-1}(\alpha)}{R_{k-1}(\alpha,z)},$$
$$V_{k-1}(\alpha,z)=2\pi\left(\frac{\eta(\alpha)r_{k-1}(\alpha)}{R_{k-1}(\alpha,z)}+\frac{\xi(\alpha)r_{k-1}(\alpha)}{R^3_{k-1}(\alpha,z)}F_{k-1}(\alpha)\right),$$
$$\xi(\alpha)=\delta r(\alpha)(z-z_{k-1}(\alpha))^2+\delta z(\alpha)\,r_{k-1}(\alpha)(z-z_{k-1}(\alpha)),$$
$$R_{k-1}(\alpha)=\sqrt{(z_{k-1}(\alpha)-z)^2+r_{k-1}(\alpha)}\,.$$

Вигляд функції $\eta(\alpha)$ залежить від вибору класу малих збурень. Якщо розміри поверхні не змінюються, то $\eta(\alpha)$=0.

Використовуючи необхідну умову існування екстремума функціонала (13), отримуємо некоректну систему лінійних алгебраїчних рівнянь, яка розв’язується методом Тихонова з вибором параметра регуляризації за принципом нев’язки.

3. Ітераційний процес закінчується у разі виконання наступної умови:

$$\left\| r_k(\alpha) - r_{k-1}(\alpha) \right\| < \varepsilon;$$

$$\left\| z_k(\alpha) - z_{k-1}(\alpha) \right\| < \varepsilon.$$

Чисельна реалізація запропонованої методики здійснювалась у прикладній системі MatLab. Відносна похибка розрахунку тестових прикладів не перевищувала 0,1%.

На основі проведених досліджень можна зробити такі **висновки:**

1. Чисельні розрахунки показали, що досягнута точність достатня для розв'язування практичних задач.
2. Ітераційний алгоритм знаходження оптимальної геометрії граничних поверхонь для модельних прикладів збігається достатньо швидко.
3. Запропонований алгоритм розв'язування інтегральних рівнянь першого роду дозволяє досягнути високу точність при рішенні модельних задач.
4. Для розв'язування інтегральних рівнянь запропонована єдина методика, а саме:
   - невідома густина апроксимується за допомогою кубічних сплайн-функцій;
   - логарифмічна особливість в ядрі виділяється методом ослаблення особливостей Канторовича;
   - для чисельного обчислення інтегралів використовується квадратурна формула Гауса.

Перспективою досліджень є знаходження оптимального розподілу граничних потенціалів та оптимальної геометрії граничних поверхонь для суттєво просторових задач.

Список використаних джерел:

1. Бакалец В. А., Людкевич И. В. Численное решение пространственных задач электронной оптики методом интегральных уравнений. Учебное пособие. – Львов: Изд-во ЛГУ, 1986.
2. Дорошенко М. В., Дудник О. М., Пушак Я. С. Два підходи чисельного розв'язування інтегральних рівнянь першого роду // Вісн. ДУ "Львівська політехніка". – 1998. – № 341. – С.103-105.
3. Иванов В. Я. Методы математического моделирования задач электронной оптики. – Новосибирск: Изд-во ВЦ СО АН СССР, 1986.
4. Ильин В. П. Чисельные методы решения задач электрофизики. – М.: Наука, 1986.
5. Марчук Г. И. Методы вычислительной математики. – М.: Наука, 1980.
6. Монастырский М. А. Интегральные уравнения в экстремальных задачах электронной оптики. – Новосибирск: Прерингт ВЦ СО АН СССР, 1979. – 28 с.

7. Chapko R., Kress R. A hybrid method for inverse boundary value problems in potential theory // Journal of Ill – Posed and Inverse Problems. – 2005. – 13. – P.27-40.

We look at the inverse problem of potential theory for finding optimal geometry of boundary surfaces and optimal distribution of boundary potential in the axisymmetric case. The methodology of solution of the inverse problem comes down to the minimization of some functional and solving of system of the first genus integral Fredgolm equations with a logarithmic peculiarity.

Key words: *inverse problem, integral equations of spine-functions, method of colokation, functional.*

Отримано: 29.05.2008

УДК 517.443

М. П. Ленюк

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

ОБЧИСЛЕННЯ НЕВЛАСНИХ ІНТЕГРАЛІВ ЗА ВЛАСНИМИ ЕЛЕМЕНТАМИ ГІБРИДНОГО ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА (КОНТОРОВИЧА-ЛЄБЄДЄВА)-ЕЙЛЕРА НА ПОЛЯРНІЙ ОСІ $r \geq R_0 > 0$

Методом порівняння розв'язку крайової задачі для системи диференціальних рівнянь Бесселя та Ейлера на полярній осі $r \geq R_0 > 0$ з однією точкою спряження, побудованого, з одного боку, методом функцій Коші, а, з другого боку, методом відповідного гібридного інтегрального перетворення, обчислено поліпараметричну сім'ю невласних інтегралів за власними елементами відповідного гібридного диференціального оператора.

Ключові слова: *невласні інтеграли, функції Коші, головні розв'язки, гібридне інтегральне перетворення, основна тотожність, умова однозначної розв'язності, логічна схема.*

Постановка проблеми та її аналіз. Тонкостінні елементи конструкцій композитного типу, як правило, знаходяться в короткочасовому стаціонарному режимі, на який вони виходять після стрибкоподібного температурного або силового навантаження. Вивчення їх фізико-технічних характеристик приводить до задач термомеханіки (механіки) кусково-однорідних середовищ. Практика показує, що навіть у найпростіших випадках величини, які характеризують стаціонарний режим композита, зображаються поліпараметричним невласним інтегралом, який може бути умовно збіжним навіть тоді, коли зображає аналітичну функцію. Звідси виникає природне бажання за-

 © М. П. Ленюк, 2008