7. Chapko R., Kress R. A hybrid method for inverse boundary value problems in potential theory // Journal of III – Posed and Inverse Problems. – 2005. – 13. – P.27-40.

We look at the inverse problem of potential theory for finding optimal geometry of boundary surfaces and optimal distribution of boundary potential in the axisymmetric case. The methodology of solution of the inverse problem comes down to the minimization of some functional and solving of system of the first genus integral Fredgolm equations with a logarithmic peculiarity.

Key words: *inverse problem, integral equations of spine-functions, method of colokation, functional.*

Отримано: 29.05.2008

УДК 517.443

М. П. Ленюк

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

ОБЧИСЛЕННЯ НЕВЛАСНИХ ІНТЕГРАЛІВ ЗА ВЛАСНИМИ ЕЛЕМЕНТАМИ ГІБРИДНОГО ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА (КОНТОРОВИЧА-ЛЄБЄДЄВА)-ЕЙЛЕРА НА ПОЛЯРНІЙ ОСІ $r \geq R_0 > 0$

Методом порівняння розв'язку крайової задачі для системи диференціальних рівнянь Бесселя та Ейлера на полярній осі $r \geq R_0 > 0$ з однією точкою спряження, побудованого, з одного боку, методом функцій Коші, а, з другого боку, методом відповідного гібридного інтегрального перетворення, обчислено поліпараметричну сім'ю невласних інтегралів за власними елементами відповідного гібридного диференціального оператора.

Ключові слова: *невласні інтеграли, функції Коші, головні розв'язки, гібридне інтегральне перетворення, основна тотожність, умова однозначної розв'язності, логічна схема.*

Постановка проблеми та її аналіз. Тонкостінні елементи конструкцій композитного типу, як правило, знаходяться в короткочасовому стаціонарному режимі, на який вони виходять після стрибкоподібного температурного або силового навантаження. Вивчення їх фізико-технічних характеристик приводить до задач термомеханіки (механіки) кусково-однорідних середовищ. Практика показує, що навіть у найпростіших випадках величини, які характеризують стаціонарний режим композита, зображаються поліпараметричним невласним інтегралом, який може бути умовно збіжним навіть тоді, коли зображає аналітичну функцію. Звідси виникає природне бажання замінити невласний інтеграл його результатом збіжності (функцією), що особливо важливо при інженерних розрахунках. Обчисленню однієї сім'ї невласних інтегралів присвячена дана стаття.

Основна частина. Розглянемо задачу про побудову обмеженого на множині $I_1^+ = \{r : r \in (R_0, R_1) \cup (R_1, \infty); R_0 > 0\}$ розв'язку сепаратної системи звичайних диференціальних рівнянь Бесселя з виродженням при старшій похідній та Ейлера для модифікованих функцій

$$\left(B_{\alpha_1} - q_1^2\right) u_1(r) = -g_1(r), \; r \in (R_0, R_1),$$
$$\left(B_{\alpha_2}^* - q_2^2\right) u_2(r) = -g_2(r), \; r \in (R_1, \infty) \qquad (1)$$

за крайовими умовами

$$\left(\alpha_{11}^0 \frac{d}{dr} + \beta_{11}^0\right) u_1(r)\Big|_{r=R_0} = g_0, \; \lim_{r\to\infty}\left[r^\gamma u_2(r)\right] = 0 \qquad (2)$$

та умовами спряження

$$\left[\left(\alpha_{j1}^1 \frac{d}{dr} + \beta_{j1}^1\right) u_1(r) - \left(\alpha_{j2}^1 \frac{d}{dr} + \beta_{j2}^1\right) u_2(r)\right]\Bigg|_{r=R_1} = \omega_{j1}, \; j = 1,2. \qquad (3)$$

У рівностях (1)-(3) $q_m > 0$, $c_{11}c_{21} > 0$, $c_{j1} = \alpha_{2j}^1 \beta_{1j}^1 - \alpha_{1j}^1 \beta_{2j}^1$;

$$B_{\alpha_1} = r^2 \frac{d^2}{dr^2} + (2\alpha_1 + 1) r \frac{d}{dr} + \alpha_1^2 - \lambda^2 r^2, \; 2\alpha_1 + 1 > 0, \; \lambda \in (0, \infty),$$

$$B_{\alpha_2}^* = r^2 \frac{d^2}{dr^2} + (2\alpha_2 + 1) r \frac{d}{dr} + \alpha_2^2, \; 2\alpha_2 + 1 > 0;$$

B_{α_1} – диференціальний оператор Бесселя [1], $B_{\alpha_2}^*$ – диференціальний оператор Ейлера [2].

Фундаментальну систему розв'язків для диференціального рівняння Бесселя $\left(B_{\alpha_1} - q_1^2\right) v = 0$ утворюють модифіковані функції Бесселя 1-го роду $I_{q_1,\alpha_1}(\lambda r)$ та 2-го роду $K_{q_1,\alpha_1}(\lambda r)$ [1]; фундаментальну систему розв'язків для диференціального рівняння Ейлера $\left(B_{\alpha_1}^* - q_2^2\right) v = 0$ утворюють функції $v_1 = r^{-\alpha_2 - q_2}$ та $v_2 = r^{-\alpha_2 + q_2}$ [2].

Наявність фундаментальної системи розв'язків дозволяє будувати розв'язок крайової задачі (1)-(3) методом функцій Коші [2, 3]:

$$u_1(r) = A_1 I_{q_1,\alpha_1}(\lambda r) + B_1 K_{q_1,\alpha_1}(\lambda r) + \int_{R_0}^{R_1} E_1(r, \rho, q_1) g_1(\rho) \rho^{2\alpha_1 - 1} d\rho,$$

$$u_2(r) = A_2 r^{-\alpha_2 - q_2} + \int\limits_{R_1}^{\infty} E_2(r, \rho, q_2) g_2(\rho) \rho^{2\alpha_2 - 1} d\rho . \qquad (4)$$

Тут $E_j(r, \rho)$ – функції Коші [2, 3]:

$$E_j(r,\rho)\Big|_{r=\rho+0} - E_j(r,\rho)\Big|_{r=\rho-0} = 0, \quad j = 1, 2 ,$$

$$\frac{dE_j(r,\rho)}{dr}\bigg|_{r=\rho+0} - \frac{dE_j(r,\rho)}{dr}\bigg|_{r=\rho-0} = -\rho^{-(2\alpha_j + 1)} . \qquad (5)$$

Припустимо, що функція Коші

$$E_1(r,\rho) = \begin{cases} \overset{-}{E}_1 \equiv C_1 I_{q_1,\alpha_1}(\lambda r) + D_1 K_{q_1,\alpha_1}(\lambda r), & R_0 < r < \rho < R_1, \\ \overset{+}{E}_1 \equiv C_2 I_{q_1,\alpha_1}(\lambda r) + D_2 K_{q_1,\alpha_1}(\lambda r), & R_0 < \rho < r < R_1. \end{cases}$$

Властивості (5) функції Коші дають алгебраїчну систему з двох рівнянь:

$$(C_2 - C_1) I_{q_1,\alpha_1}(\lambda\rho) + (D_2 - D_1) K_{q_1,\alpha_1}(\lambda\rho) = 0 ,$$

$$(C_2 - C_1) I'_{q_1,\alpha_1}(\lambda\rho) + (D_2 - D_1) K'_{q_1,\alpha_1}(\lambda\rho) = -\left(\lambda\rho^{2\alpha_1 + 1}\right)^{-1} .$$

Звідси отримуємо співвідношення:

$$C_2 - C_1 = -\lambda^{2\alpha_1} K_{q_1,\alpha_1}(\lambda\rho), \; D_2 - D_1 = \lambda^{2\alpha_1} I_{q_1,\alpha_1}(\lambda\rho) . \qquad (6)$$

Доповнимо алгебраїчними рівняннями:

$$\begin{array}{l} \left(\alpha_{11}^1 \dfrac{d}{dr} + \beta_{11}^1\right) \overset{-}{E}_1(r,\rho)\Big|_{r=R_0} = 0 : \\ \left(\alpha_{11}^1 \dfrac{d}{dr} + \beta_{11}^1\right) \overset{+}{E}_1(r,\rho)\Big|_{r=R_0} = 0 : \end{array} \begin{cases} U^{01}_{q_1,\alpha_1;11}(\lambda R_0) C_1 + U^{02}_{q_1,\alpha_1;11}(\lambda R_0) D_1 = 0, \\ U^{11}_{q_1,\alpha_1;11}(\lambda R_1) C_2 + U^{12}_{q_1,\alpha_1;11}(\lambda R_1) D_2 = 0. \end{cases} \qquad (7)$$

Алгебраїчна система (7) в силу співвідношень (6) набуває вигляду:

$$U^{01}_{q_1,\alpha_1;11}(\lambda R_0) C_1 + U^{02}_{q_1,\alpha_1;11}(\lambda R_0) D_1 = 0 ,$$

$$U^{11}_{q_1,\alpha_1;11}(\lambda R_1) C_1 + U^{12}_{q_1,\alpha_1;11}(\lambda R_1) D_1 = \lambda^{2\alpha_1} \Psi^{1*}_{q_1,\alpha_1;11}(\lambda R_1, \lambda\rho) .$$

Звідси знаходимо, що

$$C_1 = -\frac{\lambda^{2\alpha_1} U^{02}_{q_1,\alpha_1;11}(\lambda R_0)}{\Delta_{q_1,\alpha_1;11}(\lambda R_0, \lambda R_1)} \Psi^{1*}_{q_1,\alpha_1;11}(\lambda R_1, \lambda\rho) ,$$

$$D_1 = \frac{\lambda^{2\alpha_1} U^{01}_{q_1,\alpha_1;11}(\lambda R_0)}{\Delta_{q_1,\alpha_1;11}(\lambda R_0, \lambda R_1)} \Psi^{1*}_{q_1,\alpha_1;11}(\lambda R_1, \lambda\rho) .$$

Цим функція Коші $E_1(r, \rho)$ визначена й внаслідок симетрії відносно діагоналі $r = \rho$ має структуру:

$$E_1(r,\rho)=\frac{\lambda^{2\alpha_1}}{\Delta_{q_1,\alpha_1;11}(\lambda R_0,\lambda R_1)}\begin{cases}\Psi^{0*}_{q_1,\alpha_1;11}(\lambda R_1,\lambda r)\Psi^{1*}_{q_1,\alpha_1;11}(\lambda R_1,\lambda\rho), \\ \qquad R_0<r<\rho<R_1, \\ \Psi^{0*}_{q_1,\alpha_1;11}(\lambda R_1,\lambda\rho)\Psi^{1*}_{q_1,\alpha_1;11}(\lambda R_1,\lambda r), \\ \qquad R_0<\rho<r<R_1.\end{cases} \tag{8}$$

У формулах (7), (8) беруть участь функції

$$U^{m1}_{q_1,\alpha_1;jk}(\lambda R_m)=\left(\alpha^m_{jk}\frac{q_1-\alpha_1}{R_m}+\beta^m_{jk}\right)I_{q_1,\alpha_1}(\lambda R_m)+\alpha^m_{jk}R_m q_1^2 I_{q_1+1,\alpha_1+1}(\lambda R_m),$$

$$U^{m2}_{q_1,\alpha_1;jk}(\lambda R_m)=\left(\alpha^m_{jk}\frac{q_1-\alpha_1}{R_m}+\beta^m_{jk}\right)K_{q_1,\alpha_1}(\lambda R_m)-$$

$$-\alpha^m_{jk}R_m q_1^2 K_{q_1+1,\alpha_1+1}(\lambda R_m),$$

$$\Psi^{m*}_{q_1,\alpha_1;jk}(\lambda R_m,\lambda r)=U^{m1}_{q_1,\alpha_1;jk}(\lambda R_m)K_{q_1,\alpha_1}(\lambda r)-$$

$$-U^{m2}_{q_1,\alpha_1;jk}(\lambda R_m)I_{q_1,\alpha_1}(\lambda r),\quad j=1,2,$$

$$\Delta_{q_1,\alpha_1;j1}(\lambda R_0,\lambda R_1)=U^{01}_{q_1,\alpha_1;11}(\lambda R_0)U^{12}_{q_1,\alpha_1;j1}(\lambda R_1)-$$

$$-U^{02}_{q_1,\alpha_1;11}(\lambda R_0)U^{11}_{q_1,\alpha_1;j1}(\lambda R_1).$$

Припустимо, що функція Коші

$$E_2(r,\rho)=\begin{cases}\overset{-}{E}_2\equiv C_1 r^{-\alpha_2-q_2}+D_1 r^{-\alpha_2+q_2}, & R_1<r<\rho<\infty, \\ \overset{+}{E}_2\equiv C_2 r^{-\alpha_2-q_2}, & R_1<\rho<r<\infty.\end{cases}$$

Властивості (5) функції Коші дають алгебраїчну систему з двох рівнянь:

$$(C_2-C_1)\rho^{-\alpha_2-q_2}-D_1\rho^{-\alpha_2+q_2}=0,$$

$$(\alpha_2+q_2)(C_2-C_1)\rho^{-\alpha_2-q_2}+(-\alpha_2+q_2)D_1\rho^{-\alpha_2+q_2}=\rho^{-2\alpha_2}.$$

Звідси маємо співвідношення:

$$C_2-C_1=(2q_2)^{-1}\rho^{-\alpha_2+q_2},\ D_1=(2q_2)^{-1}\rho^{-\alpha_2-q_2}. \tag{9}$$

Доповнимо алгебраїчним рівнянням:

$$\left(\alpha^1_{12}\frac{d}{dr}+\beta^1_{12}\right)\overset{-}{E}_2\bigg|_{r=R_1}=0:\ Z^{11}_{\alpha_2,12}C_1+Z^{12}_{\alpha_2,12}D_1=0. \tag{10}$$

Із алгебраїчної системи (9), (10) знаходимо, що

$$C_2=-\left[2q_2 Z^{11}_{\alpha_2,12}(q_2,R_1)\right]^{-1}\Psi^{1*}_{\alpha_2,11}(q_2\rho).$$

Цим функція Коші $E_2(r,\rho)$ визначена й внаслідок симетрії відносно діагоналі $r=\rho$ має структуру:

$$E_2(r,\rho) = -\frac{1}{2q_2 Z^{11}_{\alpha_2,12}(q_2,R_1)} \begin{cases} \rho^{-\alpha_2-q_2}\Psi^{1*}_{\alpha_2;12}(q_2,r), & R_1 < r < \rho < \infty, \\ r^{-\alpha_2-q_2}\Psi^{1*}_{\alpha_2;12}(q_2,\rho), & R_1 < \rho < r < \infty. \end{cases} \quad (11)$$

У рівностях (10), (11) беруть участь функції:

$$Z^{11}_{\alpha_2,12}(q_2,R_1) = \left(-\alpha^1_{12}\frac{\alpha_2+q_2}{R_1} + \beta^1_{12}\right)R_1^{-\alpha_2-q_2} \equiv \left(\alpha^1_{12}\frac{d}{dr} + \beta^1_{12}\right)r^{-\alpha_2-q_2}\Big|_{r=R_1},$$

$$Z^{12}_{\alpha_2,12}(q_2,R_1) \equiv \left(\alpha^1_{12}\frac{d}{dr} + \beta^1_{12}\right)r^{-\alpha_2+q_2}\Big|_{r=R_1} = \left(-\alpha^1_{12}\frac{\alpha_2-q_2}{R_1} + \beta^1_{12}\right)R_1^{-\alpha_2+q_2},$$

$$\Psi^{1*}_{\alpha_2,12}(q_2,r) = Z^{12}_{\alpha_2,12}(q_2,R_1)r^{-\alpha_2-q_2} - Z^{11}_{\alpha_2,12}(q_2,R_1)r^{-\alpha_2+q_2}.$$

Повернемось до формул (4). Крайова умова в точці $r = R_0$ та умови спряження (3) для визначення величин A_1, A_2 та B_1 дають алгебраїчну систему з трьох рівнянь:

$$U^{01}_{q_1,\alpha_1;11}(\lambda R_0)A_1 + U^{02}_{q_1,\alpha_1;11}(\lambda R_0)B_1 = g_0,$$

$$U^{11}_{q_1,\alpha_1;11}(\lambda R_1)A_1 + U^{12}_{q_1,\alpha_1;11}(\lambda R_1)B_1 - Z^{11}_{\alpha_2,12}(q_2,R_1)A_2 = \omega_{11}, \quad (12)$$

$$U^{11}_{q_1,\alpha_1;21}(\lambda R_1)A_1 + U^{12}_{q_1,\alpha_1;21}(\lambda R_1)B_1 - Z^{11}_{\alpha_2,22}(q_2,R_1) = A_2\omega_{21} + G_{12}.$$

У системі (12) бере участь функція

$$G_{12}\ \frac{c_{11}}{R_1^{2\alpha+1}}\int_{R_0}^{R_1}\frac{\Psi^{0*}_{q_1,\alpha_1;11}(\lambda R_0,\lambda R_\rho)}{\Delta_{q_1,\alpha_1;11}(\lambda R_0,\lambda R_1)}g_1(\rho)\rho^{2\alpha_1-1}d\rho +$$

$$+\frac{c_{21}}{R_1^{2\alpha_2+1}}\int_{R_1}^{\infty}\frac{\rho^{-\alpha_2-q_2}}{Z^{11}_{\alpha_2,12}(q_2,R_1)}g_2(\rho)\rho^{2\alpha_2-1}d\rho.$$

Припустимо, що виконана умова однозначної розв'язності крайової задачі (1)-(3): визначник алгебраїчної системи (12) відмінний від нуля для будь-якого ненульового вектора $\vec{q} = \{q_1; q_2\}$ та $(\alpha) = (\alpha_1, \alpha_2)$, тобто

$$\Delta_{(\alpha)}(q_1,q_2) \equiv \Delta_{q_1,\alpha_1;21}(\lambda R_0,\lambda R_1)Z^{11}_{\alpha_2,12}(q_2,R_1) -$$

$$-\Delta_{q_1,\alpha_1;11}(\lambda R_0,\lambda R_1)Z^{11}_{\alpha_2,22}(q_2,R_1) \neq 0. \quad (13)$$

Визначимо головні розв'язки крайової задачі (1)-(3):

1) породжені крайовою умовою в точці $r = R_0$ функції Гріна

$$W_{(\alpha);11}(r,q) = \frac{1}{\Delta_{(\alpha)}(q_1,q_2)}\Big[Z^{11}_{\alpha_2,22}(q_2,R_1)\Psi^{1*}_{q_1,\alpha_1;11}(\lambda R_1,\lambda r) -$$

$$-Z^{11}_{\alpha_2,12}(q_2,R_1)\Psi^{1*}_{q_1,\alpha_1;21}(\lambda R_1,\lambda r)\Big],$$

$$W_{(\alpha);12}(r,q) = -\frac{c_{11}}{\lambda^{2\alpha_1} R_1^{2\alpha_1+1}} \frac{1}{\Delta_{(\alpha)}(q_1,q_2)} r^{-\alpha_2-q_2}, \; q=(q_1,q_2); \quad (14)$$

2) породжені неоднорідністю умов спряження функції Гріна

$$\mathcal{R}^1_{(\alpha);11}(r,q) = -\frac{Z^{11}_{\alpha_2,22}}{\Delta_{(\alpha)}(q_1,q_2)} \Psi^{0*}_{q_1,\alpha_1;11}(\lambda R_0, \lambda r),$$

$$\mathcal{R}^1_{(\alpha);21}(r,q) = \frac{Z^{11}_{\alpha_2,12}}{\Delta_{(\alpha)}(q_1,q_2)} \Psi^{0*}_{q_1,\alpha_1;11}(\lambda R_0, \lambda r),$$

$$\mathcal{R}^2_{(\alpha);11}(r,q) = -\frac{\Delta_{q_1,\alpha_1;21}}{\Delta_{(\alpha)}(q_1,q_2)} r^{-\alpha_2-q_2}, \mathcal{R}^2_{(\alpha);21}(r,q) = \frac{\Delta_{q_1,\alpha_1;11}}{\Delta_{(\alpha)}(q_1,q_2)} r^{-\alpha_2-q_2}; \quad (15)$$

3) породжені неоднорідністю системи (1) функції впливу

$$\mathcal{H}_{(\alpha);11}(r,\rho,q) = -\lambda^{2\alpha_1} \begin{cases} \Psi^{0*}_{q_1,\alpha_1;11}(\lambda R_0, \lambda r) W_{(\alpha);11}(\rho,q), & R_0 < r < \rho < R_1, \\ \Psi^{0*}_{q_1,\alpha_1;11}(\lambda R_0, \lambda \rho) W_{(\alpha);11}(r,q), & R_1 < \rho < r < R_1, \end{cases}$$

$$\mathcal{H}_{(\alpha);12}(r,\rho,q) = \frac{c_{21}}{R_1^{2\alpha_2+1}} \frac{1}{\Delta_{(\alpha)}(q_1,q_2)} \Psi^{0*}_{q_1,\alpha_1;11}(\lambda R_0, \lambda r) \rho^{-\alpha_2-q_2},$$

$$\mathcal{H}_{(\alpha);21}(r,\rho,q) = \frac{c_{11}}{R_1^{2\alpha_1+1}} \frac{1}{\Delta_{(\alpha)}(q_1,q_2)} \Psi^{0*}_{q_1,\alpha_1;11}(\lambda R_0, \lambda \rho) r^{-\alpha_2-q_2}, \quad (16)$$

$$\mathcal{H}^*_{(\alpha);22}(r,\rho,q) = \frac{1}{2q_2\Delta_{(\alpha)}(q_1,q_2)} \begin{cases} \rho^{-\alpha_2-q_2}\Big[\Delta_{q_1,\alpha_1;11}(\lambda R_0, \lambda R_1)\Psi^{1*}_{\alpha_2;22}(q_2,r) - \\ \quad -\Delta_{q_1,\alpha_1;21}(\lambda R_0, \lambda R_1)\Psi^{1*}_{\alpha_2;12}(q_2,r)\Big], & R_1 < r < \rho < \infty; \\ r^{-\alpha_2-q_2}\Big[\Delta_{q_1,\alpha_1;11}(\lambda R_0, \lambda R_1)\Psi^{1*}_{\alpha_2;22}(q_2,\rho) - \\ \quad -\Delta_{q_1,\alpha_1;21}(\lambda R_0, \lambda R_1)\Psi^{1*}_{\alpha_2;12}(q_2,\rho)\Big], & R_1 < \rho < r < \infty. \end{cases}$$

У результаті однозначної розв'язності алгебраїчної системи (12) й підстановки одержаних значень A_1, A_2, B_1 у формули (4) маємо єдиний розв'язок крайової задачі (1)-(3):

$$u_j(r) = W_{(\alpha);1j}(r,q) g_0 + \mathcal{R}^j_{(\alpha);11}(r,q)\omega_{11} + \mathcal{R}^j_{(\alpha);21}(r,q)\omega_{21} + \quad (17)$$

$$+ \int_{R_0}^{R_1} \mathcal{H}_{(\alpha);j1}(r,\rho,q) g_1(\rho) r^{2\alpha_1-1} d\rho + \int_{R_1}^{\infty} \mathcal{H}_{(\alpha);j2}(r,\rho,q) g_2(\rho) \rho^{2\alpha_2-1} d\rho, \; j=1,2.$$

Побудуємо розв'язок крайової задачі (1)-(3) методом інтегрального перетворення, породженого на множині I_1^+ гібридним диференціальним оператором (ГДО)

$$\mathcal{M}_{(\alpha)} = \theta(r-R_0)\theta(R_1-r)B_{\alpha_1} + \theta(r-R_1)B^*_{\alpha_2}, \; (\alpha) = (\alpha_1,\alpha_2), \quad (18)$$

$\theta(x)$ – одинична функція Гевісайда [3].

Оператор $\mathcal{M}_{(\alpha)}$ як сполучення самоспряжених операторів є самоспряженим й має одну особливу точку $r = \infty$. Тому його спектр дійсний та неперервний. Можна вважати, що спектральний параметр $\beta \in (0, \infty)$. Спектральну функцію, яка відповідає власному числу β, знайдемо як розв'язок системи рівнянь:

$$\left(B_{\alpha_1} + b_1^2\right)v_1 = 0\,,\ r \in \left(R_0, R_1\right),\ b_j = \left(\beta^2 + k_j^2\right)^{1/2},$$

$$\left(B_{\alpha_2}^* + b_2^2\right)v_2 = 0\,,\ r \in \left(R_1, \infty\right),\ k_j^2 \geq 0\,, j = 1, 2, \tag{19}$$

за крайовими умовами

$$\left.\left(\alpha_{11}^0 \frac{d}{dr} + \beta_{11}^0\right)v_1\right|_{r=R_0} = 0\,,\ \left|v_2\right|_{r=\infty} < \infty \tag{20}$$

та умовами спряження

$$\left.\left[\left(\alpha_{j1}^1 \frac{d}{dr} + \beta_{j1}^1\right)v_1 - \left(\alpha_{j2}^1 \frac{d}{dr} + \beta_{j2}^1\right)v_2\right]\right|_{r=R_1} = 0\,, j = 1, 2. \tag{21}$$

Фундаментальну систему розв'язків для диференціального рівняння Бесселя $\left(B_{\alpha_1} + b_1^2\right)v_1 = 0$ утворюють функції $C_{\alpha_1}\left(\lambda r, b_1\right)$ та $D_{\alpha_1}\left(\lambda r, b_1\right)$ [1]; фундаментальну систему розв'язків для диференціального рівняння Ейлера $\left(B_{\alpha_2}^* + b_2^2\right)v = 0$ утворюють функції $v_1 = r^{-\alpha_2}\cos\left(b_2 \ln r\right)$ та $v_2 = r^{-\alpha_2}\sin\left(b_2 \ln r\right)$ [2].

Якщо покласти

$$V_{(\alpha);1}\left(r, \beta\right) = A_1 C_{\alpha_1}\left(\lambda r, b_1\right) + B_1 D_{\alpha_1}\left(\lambda r, b_1\right),$$

$$V_{(\alpha);2}\left(r, \beta\right) = A_2 r^{-\alpha_2}\cos\left(b_2 \ln r\right) + B_2 r^{-\alpha_2}\sin\left(b_2 \ln r\right),$$

то крайова умова в точці $r = R_0$ та умови спряження (21) для визначення чотирьох величин A_j, B_j ($j = 1, 2$) дають алгебраїчну систему з трьох рівнянь:

$$X_{\alpha_1;11}^{01}\left(\lambda R_0, b_1\right)A_1 + X_{\alpha_1;11}^{02}\left(\lambda R_0, b_1\right)B_1 = 0\,, j = 1, 2, \tag{22}$$

$$X_{\alpha_1;j1}^{11}\left(\lambda R_1, b_1\right)A_1 + X_{\alpha_1;j1}^{12}\left(\lambda R_1, b_1\right)B_1 -$$

$$-Y_{\alpha_2;j2}^{11}\left(b_2, R_1\right)A_2 - Y_{\alpha_2;j2}^{12}\left(b_2, R_1\right)B_2 = 0\,.$$

Візьмемо $B_1 = A_0 X_{\alpha_1;11}^{01}\left(\lambda R_0, b_1\right)$, $A_1 = -A_0 X_{\alpha_1;11}^{02}\left(\lambda R_0, b_1\right)$, де A_0 підлягає визначенню. Для A_2, B_2 одержуємо алгебраїчну систему з двох рівнянь:

$$Y_{\alpha_2;j2}^{11}\left(b_2, R_1\right)A_2 + Y_{\alpha_2;j2}^{12}\left(b_2, R_1\right)B_2 = A_0\left[-X_{\alpha_1;j1}^{11}\left(\lambda R_1, b_1\right)X_{\alpha_1;11}^{02}\left(\lambda R_0, b_1\right)\right. +$$

$$+X^{12}_{\alpha_1;j1}(\lambda R_1,b_1)X^{01}_{\alpha_1;11}(\lambda R_0,b_1)\Big] \equiv A_0\delta_{\alpha_1,j1}(\beta), \quad j=1,2.$$

Визначник цієї системи

$$q_{\alpha_2}(\beta)\equiv Y^{11}_{\alpha_2;12}Y^{12}_{\alpha_2;22}-Y^{11}_{\alpha_2;22}Y^{12}_{\alpha_2;12} = c_{21}b_2(\beta)R_1^{-(2\alpha_2+1)}\neq 0 .$$

При $A_0=q_{\alpha_2}(\beta)$ знаходимо, що

$$A_2=\omega_{(\alpha);2}(\beta),\ B_2=-\omega_{(\alpha);1}(\beta),$$

$$\omega_{(\alpha);j}(\beta)=\delta_{\alpha_1;11}(\beta)\,Y^{1j}_{\alpha_2;22}(b_2,R_1)-\delta_{\alpha_1;21}(\beta)\,Y^{1j}_{\alpha_2;12}(b_2,R_1);$$

$$X^{m1}_{\alpha_1,j1}(\lambda R_m,b_1)=\left(\alpha^m_{j1}\frac{d}{dr}+\beta^m_{j1}\right)C_{\alpha_1}(\lambda r,b_1)\Big|_{r=R_m};$$

$$X^{m2}_{\alpha_1,j1}(\lambda R_m,b_1)=\left(\alpha^m_{j1}\frac{d}{dr}+\beta^m_{j1}\right)D_{\alpha_1}(\lambda r,b_1)\Big|_{r=R_m};\ m=0,\,1,\,j=1,\,2,$$

$$Y^{11}_{\alpha_2,j2}(b_2,R_1)=\left[\left(\beta^1_{j2}-\alpha^1_{j2}\frac{\alpha_2}{R_1}\right)\cos(b_2\ln R_1)-b_2R_1^{-1}\alpha^1_{j2}\sin(b_2\ln R_1)\right]R_1^{-\alpha_2},$$

$$Y^{12}_{\alpha_2,j2}(b_2,R_1)=\left[\left(\beta^1_{j2}-\alpha^1_{j2}\frac{\alpha_2}{R_1}\right)\sin(b_2\ln R_1)+b_2R_1^{-1}\alpha^1_{j2}\cos(b_2\ln R_1)\right]R_1^{-\alpha_2}.$$

Якщо спектральна функція

$$V_{(\alpha)}(r,\beta)=\theta(r-R_0)\theta(R_1-r)V_{(\alpha);1}(r,\beta)+\theta(r-R_1)V_{(\alpha);2}(r,\beta),$$

то для компонент $V_{(\alpha);j}(r,\beta)$ маємо такі вирази:

$$V_{(\alpha);1}(r,\beta)=q_{\alpha_2}(\beta)\Big[X^{01}_{\alpha_1;11}(\lambda R_0,b_1)D_{\alpha_1}(\lambda r,b_1)-X^{02}_{\alpha_1;11}(\lambda R_0,b_1)C_{\alpha_1}(\lambda r,b_1)\Big],$$

$$V_{(\alpha);2}(r,\beta)=\omega_{(\alpha);2}(\beta)r^{-\alpha_2}\cos(b_2\ln r)-\omega_{(\alpha);1}(\beta)r^{-\alpha_2}\sin(b_2\ln r).$$

Наявність спектральної функції $V_{(\alpha)}(r,\beta)$, спектральної густини

$$\Omega_{(\alpha)}(\beta)=\beta[b_2(\beta)]^{-1}\left([\omega_{(\alpha);1}(\beta)]^2+[\omega_{(\alpha);2}(\beta)]^2\right)^{-1}$$

та вагової функції

$$\sigma(r)=\theta(r-R_0)\theta(R_1-r)\sigma_1r^{2\alpha_1-1}+\theta(r-R_1)\sigma_2r^{2\alpha_1-1},$$

$$\sigma_1=c_{11}R_1^{2\alpha_2+1}:c_{21}R_1^{2\alpha_1+1},\ \sigma_2=1,$$

дозволяють визначити пряме $H_{(\alpha)}$ й обернене $H^{-1}_{(\alpha)}$ гібридне інтегральне перетворення, породжене на множині I_1^+ ГДО $\mathcal{M}_\alpha$ [4]:

$$H_{(\alpha)}[g(r)]=\int_{R_0}^{\infty}g(r)V_{(\alpha)}(r,\beta)\sigma(r)dr\equiv\tilde{g}(\beta), \tag{23}$$

$$H_{(\alpha)}^{-1}[\widetilde{g}(\beta)] = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \widetilde{g}(\beta)V_{(\alpha)}(r,\beta)\Omega_{(\alpha)}(\beta)d\beta \equiv g(r). \qquad (24)$$

Єдиний розв'язок крайової задачі (1)-(3), побудований за відомою логічною схемою [4] методом запровадженого формулами (23), (24) гібридного інтегрального перетворення має структуру:

$$u_j(r) = \int_{R_0}^{R_1}\left(\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{V_{(\alpha);j}(r,\beta)V_{(\alpha);1}(\rho,\beta)}{\beta^2+q^2}\Omega_{(\alpha)}(\beta)d\beta\right)g_1(\rho)\sigma_1\rho^{2\alpha_1-1}d\rho +$$

$$+\int_{R_1}^{\infty}\left(\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{V_{(\alpha);j}(r,\beta)V_{(\alpha);2}(\rho,\beta)}{\beta^2+q^2}\Omega_{(\alpha)}(\beta)d\beta\right)g_2(\rho)\sigma_2\rho^{2\alpha_2-1}d\rho +$$

$$+\left[\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{V_{(\alpha);j}(r,\beta)Z^1_{(\alpha);12}(\beta)}{\beta^2+q^2}\Omega_{(\alpha)}(\beta)d\beta\omega_{21} -\right.$$

$$\left.-\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{V_{(\alpha);j}(r,\beta)Z^1_{(\alpha);22}(\beta)}{\beta^2+q^2}\Omega_{(\alpha)}(\beta)d\beta\omega_{11}\right]\frac{R_1^{2\alpha_2+1}}{c_{21}} +$$

$$+\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{V_{(\alpha);1}(R_0,\beta)V_{(\alpha);j}(r,\beta)}{\left(-\alpha_{11}^0\right)\left(\beta^2+q^2\right)}\Omega_{(\alpha)}(\beta)d\beta\sigma_1 R_0^{2\alpha_1+1}g_0, \qquad (25)$$

$$Z^j_{(\alpha);i2}(\beta) = \left(\alpha_{i2}^1\frac{d}{dr}+\beta_{i2}^1\right)V_{(\alpha);2}(r,\beta)\Big|_{r=R_1}, \; i = 1, 2, \; q^2 = \max\{q_1^2; q_2^2\}.$$

Порівнюючи розв'язки (17) та (25) в силу єдиності, одержуємо наступні формули обчислення поліпараметричних невласних інтегралів:

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty V_{(\alpha);j}(r,\beta)V_{(\alpha);k}(\rho,\beta)\frac{\Omega_{(\alpha)}(\beta)d\beta}{\beta^2+q^2} = \frac{1}{\sigma_k}\mathcal{H}_{(\alpha);jk}(r,\rho,q), \; j, k = 1, 2, \qquad (26)$$

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{V_{(\alpha);1}(R_0,\beta)V_{(\alpha);j}(r,\beta)}{\left(-\alpha_{11}^0\right)\left(\beta^2+q^2\right)}\Omega_{(\alpha)}(\beta)d\beta = \frac{1}{\sigma_1 R_0^{2\alpha_1+1}}W_{(\alpha);1j}(r,q), \; j = 1,2, \qquad (27)$$

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty Z^1_{(\alpha);12}(\beta)V_{(\alpha);j}(r,\beta)\frac{\Omega_{(\alpha)}(\beta)d\beta}{\beta^2+q^2} = \frac{c_{21}}{R_1^{2\alpha_1+1}}\mathcal{R}^j_{(\alpha);21}(r,q), \; j = 1, 2, \qquad (28)$$

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty Z^1_{(\alpha);22}(\beta)V_{(\alpha);j}(r,\beta)\frac{\Omega_{(\alpha)}(\beta)d\beta}{\beta^2+q^2} = -\frac{c_{21}}{R_1^{2\alpha_2+1}}\mathcal{R}^j_{(\alpha);11}(r,q), \; j = 1, 2. \qquad (29)$$

У рівностях (26)-(29) функції Гріна $W_{(\alpha);\,1j}(r, q)$ визначені формулами (14), функції Гріна $\mathcal{R}^{j}_{(\alpha);m1}(r,q)$ – формулами (15), а функції впливу $\mathcal{H}_{(\alpha);\,jk}(r, \rho, q)$ – формулами (16).

Якщо $\max\{q_1^2; q_2^2\} = q_1^2$, то $\beta^2 + q^2 \equiv \beta^2 + q_1^2$. В цьому випадку $k_1^2 = 0$, $k_2^2 = q_1^2 - q_2^2 \geq 0$ $\left(b_1 = \beta, b_2 = \left(\beta^2 + q_1^2 - q_2^2\right)^{1/2}\right)$. Якщо ж $\max\{q_1^2; q_2^2\} = q_2^2$, то $\beta^2 + q^2 \equiv \beta^2 + q_2^2$. В цьому випадку $k_1^2 = q_2^2 - q_1^2$, $k_2^2 = 0$ $\left(b_1 = \left(\beta^2 + q_2^2 - q_1^2\right)^{1/2}, b_2 = \beta\right)$.

Оскільки праві частини в формулах (26)-(29) не залежать від нерівності $\left(q_1^2 - q_2^2\right) \geq 0$ або нерівності $\left(q_2^2 - q_1^2\right) \geq 0$, то можна покласти $q_1^2 = q_2^2 = q_0^2$ ($b_1 = b_2 = \beta$), звужуючи при цьому сім'ю невласних інтегралів.

Висновок 1. Якщо вектор-функція $g_1(r) = \{g_1(r); g_2(r)\}$ належить області визначення ГДО $\mathcal{M}_{(\alpha)}$ та виконується умова (13) однозначної розв'язності крайової задачі (1)-(3), то мають місце формули (26)-(29) обчислення поліпараметричних невласних інтегралів за власними елементами ГДО $\mathcal{M}_{(\alpha)}$, визначеного рівністю (18).

Висновок 2. Одержані формули (26)-(29) поповнюють довідкову математичну літературу в розділі обчислення невласних інтегралів від суперпозиції спеціальних функцій математичної фізики.

Список використаних джерел:

1. Ленюк М. П., Міхалевська Г. І. Інтегральні перетворення типу Конторовича-Лєбєдєва. – Чернівці: Прут, 2002. – 280 с.
2. Степанов В. В. Курс дифференциальных уравнений. – М.: Физматгиз, 1959. – 468 с.
3. Шилов Г. Е. Математический анализ. Второй специальный курс. – М.: Наука, 1965. – 328 с.
4. Ленюк М. П., Шинкарик М. І. Гібридні інтегральні перетворення (Фур'є, Бесселя, Лежандра). Частина 1. – Тернопіль: Економічна думка, 2004. – 368 с.

The method of comparison of the decision of a regional problem for system of differential equations Bessel and Euler on a polar axis $r \geq R_0 > 0$ with one point of the interface constructed, on the one hand, by a method of functions Cauchy, and on the other hand, a method of respective hybrid integrated transformation, calculates a polyparametrical family of not own integrals on own elements of the corresponding hybrid differential operator.

Key words: *functions Cauchy, the main decisions of a regional problem, condition of unequivocal resolvability, own elements of the hybrid differential operator, the basic identity, the logic scheme.*

Отримано: 03.06.2008