УДК 517.5

А. В. Сорич[1], В. А. Сорич[2], Н. М. Сорич[2]

[1]*Інститут математики НАН України, м. Київ*

[2]*Кам'янець-Подільський національний університет*

НАЙКРАЩЕ ОДНОСТОРОННЄ НАБЛИЖЕННЯ ЛІНІЙНОЇ КОМБІНАЦІЇ ФУНКЦІЙ ТА ЇХ ПОХІДНИХ

Досліджена задача найкращого одностороннього наближення лінійної комбінації деяких класів функцій високої гладкості та їх похідних.

Ключові слова: *найкраще одностороннє наближення, ядро Пуассона, згортка.*

Вступ. Нехай L_∞ – простір 2π-періодичних вимірних і суттєво обмежених функцій $f(\cdot)$ із нормою $\|f\|_{L_\infty} = \|f\|_\infty = \operatorname{esssup}|f(x)|$; C – простір неперервних на всій дійсній осі 2π-періодичних функцій $f(\cdot)$ із нормою $\|f\|_C = \max|f(x)|$; L – простір 2π-періодичних сумовних на $(0;2\pi)$ функцій $f(x)$ з нормою $\|f\|_L = \|f\|_1 = \int\limits_0^{2\pi}|f(x)|dx$.

Через $P_{\beta,\infty}^q$ позначимо клас неперервних 2π-періодичних функцій $f(x)$, що подаються у вигляді згортки

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}\varphi(x+t)\mathscr{P}_\beta^q(t)dt, \qquad (1)$$

де $\mathscr{P}_\beta^q(t) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} q^k \cos\left(kt + \frac{\beta\pi}{2}\right)$ – ядро Пуассона, а функції $\varphi(\cdot)$ мають середнє значення на періоді рівне нулю і задовольняють умову $\|\varphi\|_\infty \le 1$. Нехай, далі, числа q, q_i $\left(i = \overline{1,m}\right)$ підпорядковані умові $0 < q < q_1 \le q_2 \le \ldots \le q_m \le 1$, $\beta_i \in R$, $c_i(n)$ – деякі константи залежні від n.

Позначимо через $\sum_{n,m}\left(f;x;t_{n-1,i};\overline{c}\right)$ наступну суму $\sum_{n,m}\left(f;x;t_{n-1,i};\overline{c}\right) = \sum\limits_{i=1}^{m} c_i(n)\left(f_{\beta_i}^{(q_i)}(x) - t_{n-1,i}(x)\right)$, де $t_{n-1,i}(x)$ – тригонометричні многочлени степеня не вище за $n-1$, а $f_{\beta_i}^{(q_i)}(x) - (q_i;\beta_i)$ –

похідна функції $f(x)$ в сенсі Степанця, яка означається наступним чином. Якщо $S[f]=\frac{a_o(f)}{2}+\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k(f)\cos kx+b_k(f)\sin kx$ – ряд Фур'є функції $f(x)$, то

$$S\left[f_{\beta_i}^{(q_i)}\right]=\sum_{k=1}^{\infty}q_i^{-k}\left(a_k(f)\cos\left(kx+\frac{\beta_i\pi}{2}\right)+b_k(f)\sin\left(kx+\frac{\beta_i\pi}{2}\right)\right)$$

(див., напр., [1, с.25], $\psi_i(k)=q_i^k$).

Постановка задачі. Задача найкращого наближення лінійної комбінації ядер Пуассона розглянута в роботі [2].

В даній статті, притримуючись робіт [3; 4], досліджується величина

$$\widehat{E}_{n,m}\left(P_{\beta,\infty}^{q}\right)_L=\sup_{f\in P_{\beta,\infty}^{q}}\ \inf_{t_{n-1}\in T_{n-1}}\ \max_{|\alpha_i|=1}\left\|\sum_{i=1}^{m}c_i(n)\cdot\alpha_i\cdot f_{\beta_i}^{(q_i)}(x)-t_{n-1}(x)\right\|_L, \quad (2)$$

де

$$t_{n-1}(x)\geq\sum_{i=1}^{m}c_i(n)\cdot\alpha_i\cdot f_{\beta_i}^{(q_i)}(x),\ x\in[0;2\pi]; \quad (3)$$

T_{n-1} – множина тригонометричних многочленів із умовою (3), $c_i(n)$ – числові послідовності.

Основні результати. Проводячи міркування, аналогічні наведеним в роботі [4] (див. також [5]), та використовуючи результати роботи [2], встановимо справедливість твердження.

Теорема. Якщо виконуються одна із умов:

1) $\beta-\beta_i\in[4k_i;4k_i+1]\cup[4s_i+2;4s_i+3]$, $k_i,s_i\in Z$, $i=\overline{1,m}$;

2) $\beta-\beta_i\in[4k_i+1;4k_i+2]\cup[4s_i+3;4s_i+4]$, $k_i,s_i\in Z$, $i=\overline{1,m}$,

і при цьому $c_i(n)\geq 0$, коли $\beta-\beta_i\in[4k_i;4k_i+2]$, та $c_i(n)\leq 0$, коли $\beta-\beta_i\in[4s_i+2;4s_i+4]$, то при кожному $n\in N$

$$\widehat{E}_{n,m}\left(P_{\beta,\infty}^{q}\right)_L=8M(n),$$

де

$$M(n)=\left|\sum_{i=1}^{m}\overline{\alpha}_i c_i(n)\sum_{\nu=0}^{\infty}\left(\frac{q}{q_i}\right)^{(2\nu+1)n}\cdot\frac{\sin[(2\nu+1)\theta_n-(\beta-\beta_i)\pi/2]}{2\nu+1}\right|, \quad (4)$$

θ_n – єдиний на $[0;\pi)$ корінь рівняння

$$\sum_{i=1}^{m}\overline{\alpha}_i c_i(n)\sum_{\nu=0}^{\infty}\left(\frac{q}{q_i}\right)^{(2\nu+1)n}\cdot\cos[(2\nu+1)\theta_n-(\beta-\beta_i)\pi/2]=0\,, \qquad (5)$$

$$\overline{\alpha}_i = sign\sin\frac{\beta-\beta_i}{2}\pi\,.$$

Без доведення теорема анонсована в [6].

Доведення.

В роботі [2] знайдена величина найкращого наближення лінійної комбінації ядер Пуассона, а саме величини

$$E_{n,m}\left(P^q_{\beta,\infty}\right)=\sup_{f\in P^q_{\beta,\infty}}\inf_{t_{n-1,i}}\left\|\sum\nolimits_{n,m}\left(f;x;t_{n-1,i};\overline{c}\right)\right\|_C=\frac{4}{\pi}M(n). \qquad (6)$$

Нижня межа в (6) розглядається по m-вимірному вектору, координатами якого виступають тригонометричні многочлени $t_{n-1,i}(x)$. В цій роботі показано також, що для величини (6) має місце рівність

$$E_{n,m}\left(P^q_{\beta,\infty}\right)=\sup_{f\in P^q_{\beta,\infty}}\inf_{t_{n-1}}\left\|\sum_{i=1}^{m}c_i(n)f^{(q_i)}_{\beta_i}(n)-t_{n-1}(x)\right\|_C\,, \qquad (7)$$

а також

$$E_{n,m}\left(P^q_{\beta,\infty}\right)=\sup_{f\in P^q_{\beta,\infty}}\inf_{t_{n-1}}\max_{|\alpha_i|=1}\left\|\sum_{i=1}^{m}c_i(n)\cdot\alpha_i\cdot f^{(q_i)}_{\beta_i}(n)-t_{n-1}(x)\right\|_C\,. \qquad (8)$$

Нехай тепер $f(x)\in P^q_{\beta,\infty}$, а $\overline{\alpha}=(\overline{\alpha}_1,\overline{\alpha}_2,\ldots\overline{\alpha}_m)$ – той вектор α , на якому реалізується максимум в (8). Оскільки підпростір T_{n-1} тригонометричних многочленів степеня не вище за $n-1$ містить константу, то для довільної неперервної функції має місце рівність $E_n(f+c)_C=E_n(f)_C$, де $E_n(f)=\inf\limits_{t_{n-1}\in T_{n-1}}\|f(x)-t_{n-1}\|_C$, а c – довільна константа. Тому далі будемо вважати, що $a_0 = 0$, тобто можемо розглядати лише ті функції $f(x)$ в (1), які подаються у вигляді $f(x)=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}\varphi(x+t)\mathscr{P}^q_\beta(t)dt$. Робимо висновок, що існує тригонометричний многочлен $t_{n-1}(x)=t_{n-1}(x;f)$, для якого виконується нерівність

$$\left\|\sum_{i=1}^{m}\overline{\alpha}_i\cdot c_i(n)\cdot f^{(q_i)}_{\beta_i}(x)-t_{n-1}(x;f)\right\|_C\le\frac{4}{\pi}M(n)\,. \qquad (9)$$

Розглянемо многочлен $t^*_{n-1}(x;f)=t_{n-1}(x;f)+\dfrac{4}{\pi}M(n)$, тоді із (9) отримаємо, що

$$\sum_{i=1}^{m} \overline{\alpha}_i \cdot c_i(n) \cdot f_{\beta_i}^{(q_i)}(x) \le t_{n-1}^{*}(x;f),\ 0 \le x \le 2\pi .$$

Оскільки $\int\limits_0^{2\pi} t_{n-1}(x)dx = 0$, $\int\limits_0^{2\pi} \sum\limits_{i=1}^{m} \overline{\alpha}_i c_i(n) f_{\beta_i}^{(q_i)}(x) dx = 0$, то

$$\int\limits_0^{2\pi} \left(t_{n-1}^{*}(x;f) - \sum_{i=1}^{m} \overline{\alpha}_i c_i(n) f_{\beta_i}^{(q_i)}(x) \right) dx =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} \left| t_{n-1}^{*}(x;f) - \sum_{i=1}^{m} \overline{\alpha}_i c_i(n) f_{\beta_i}^{(q_i)}(x) \right| dx = 8M(n).$$

Таким чином, для довільної функції $f(x) \in P_{\beta,\infty}^{q}$, чисел $c_i(n)$, $\beta - \beta_i$, що задовольняють умови теореми, справедлива оцінка

$$\widehat{E}_n \left(\sum_{i=1}^{m} \overline{\alpha}_i c_i(n) f_{\beta_i}^{(q_i)}(x) \right)_L \overset{df}{=} \inf_{t_{n-1} \in T_{n-1}} \left\| \sum_{i=1}^{m} \overline{\alpha}_i c_i(n) f_{\beta_i}^{(q_i)}(x) - t_{n-1}(x) \right\|_L \le 8M(n).$$

Із останньої нерівності для величини $\widehat{E}_{n,m}\left(P_{\beta,\infty}^{q}\right)_L$ отримаємо

$$\widehat{E}_{n,m}\left(P_{\beta,\infty}^{q}\right)_L \le 8M(n). \tag{10}$$

Покажемо, що існують функція $f^{*} \in P_{\beta,\infty}^{q}$, многочлен t_{n-1}^{*}, для яких при зафіксованих значеннях констант $\overline{\alpha}_i$ виконується нерівність

$$\left\| \sum_{i=1}^{m} \overline{\alpha}_i c_i(n) f_{\beta_i}^{(q_i)}(x) - t_{n-1}^{*}(x) \right\|_L \ge 8M(n).$$

Якщо функція $f(x)$ належить класу $P_{\beta,\infty}^{q}$, то її (q_i, β_i)-похідна, як показано в [1, с.25] є згорткою ядра $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \left(\dfrac{q}{q_i} \right)^k \cos\left(kt + \dfrac{\beta - \beta_i}{2}\pi \right)$ з деякою функцією $\varphi(x) \equiv f_{\beta}^{(q)}(x)$.

Введемо позначення $F(x;\overline{c}) = \sum\limits_{i=1}^{m} \overline{\alpha}_i c_i(n) f_{\beta_i}^{(q_i)}(x)$. Оскільки для довільної функції $f \in P_{\beta,\infty}^{q}$ її $(q_i;\beta_i)$-похідна знаходиться в класі $P_{\beta-\beta_i,\infty}^{q/q_i}$, то для суми $F(x;\overline{c})$ отримаємо

$$F(x;\overline{c}) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(x+t)\sum_{i=1}^{m}\overline{\alpha}_i c_i(n)\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{q}{q_i}\right)^k \cos\left(kt + \frac{\beta-\beta_i}{2}\pi\right)dt .$$

Нехай $\varphi^*(x) = sign\sin(nx-\theta_n)$ (число θ_n – корінь рівняння (5)), $f^{*(q)}_{\beta}(x) \equiv \varphi^*(x)$, $F^*(x;\overline{c}) = \sum_{i=1}^{m}\overline{\alpha}_i c_i(n) f^{*(q_i)}_{\beta_i}(x)$. Якщо $t_{n-1}(x)$ – довільний тригонометричний многочлен степеня не вище $n-1$, для якого $t_{n-1}(x) \geq F^*(x;\overline{c})$, $0 \leq x \leq 2\pi$, то

$$\sum_{k=0}^{n-1}\left(t_{n-1}\left(x+\frac{2\pi k}{n}\right) - F^*\left(x+\frac{2\pi k}{n};\overline{c}\right)\right) \geq 0 . \tag{11}$$

Для тригонометричного многочлена $t_{n-1}(x)$ та для суми $F^*(x;\overline{c})$ будемо мати

$$\left\|F^*(x;\overline{c}) - t_{n-1}(x)\right\|_L = \int_0^{2\pi}\left(t_{n-1}(x) - F^*(x;\overline{c})\right)dt .$$

Мають місце співвідношення

$$\sum_{k=0}^{n-1}\cos\frac{2lk\pi}{n} = 0 \qquad \text{при } l \,\overline{\vdots}\, n,$$

$$\sum_{k=0}^{n-1}\cos\frac{2lk\pi}{n} = n \qquad \text{при } l \,\vdots\, n,$$

$$\sum_{k=0}^{n-1}\sin\frac{2lk\pi}{n} = 0 \qquad \text{при } k,l,n \in N .$$

Оскільки при довільному $k = \overline{0,n-1}$ інтеграли від 2π-періодичної функції $t_{n-1}\left(x+\frac{2k\pi}{n}\right) - F^*\left(x+\frac{2k\pi}{n};\overline{c}\right)$ по проміжку завдовжки період рівні, то

$$\left\|F^*(x;\overline{c}) - t_{n-1}(x)\right\|_L = \int_0^{2\pi}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(t_{n-1}\left(x+\frac{2k\pi}{n}\right) - F^*\left(x+\frac{2k\pi}{n};\overline{c}\right)\right)dx =$$

$$= \int_0^{2\pi}\left(\lambda - \sum_{i=1}^{m}\overline{\alpha}_i c_i f^{*(q_i)}_{\beta_i}(nx)\right)dx ,$$

де
$$\lambda = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}t_{n-1}\left(x+\frac{2k\pi}{n}\right) = const .$$

В силу нерівності $t_{n-1}(x) \geq F^*(x;\overline{c})$, $0 \leq x \leq 2\pi$ має місце співвідношення $\lambda \geq \max\limits_x \frac{1}{\pi} \sum\limits_{i=1}^{m} \overline{\alpha}_i c_i(n) f^{*(q_i)}_{\beta_i}(nx)$.

Із останнього співвідношення, та враховуючи те, що функції $f^{*(q_i)}_{\beta_i}(nx)$ мають середні значення на періоді рівні нулю, отримаємо

$$\int\limits_0^{2\pi} \left(t_{n-1}(x) - F^*(x;\overline{c})\right) dx \geq \max_x 2\pi \cdot \sum_{i=1}^{m} \overline{\alpha}_i c_i(n) f^{*(q_i)}_{\beta_i}(nx) \geq$$

$$\geq \max_x 2\pi \cdot \sum_{i=1}^{m} \overline{\alpha}_i c_i(n) f^{*(q_i)}_{\beta_i}(0) =$$

$$= 2\int\limits_0^{2\pi} \left| \sum_{i=1}^{m} \overline{\alpha}_i c_i(n) \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{q}{q_i}\right)^k \cos\left(kt + \frac{\beta - \beta_i}{2}\pi\right) \right| dt = 8M(n).$$

Звідки

$$\inf_{t_{n-1} \in T_{n-1}} \left\| F^*(x;\overline{c}) - t_{n-1}(x) \right\|_L \geq 8M(n).$$

Отже,

$$\widehat{E}_{n,m}\left(P^q_{\beta,\infty}\right)_L \geq 8M(n). \tag{12}$$

Співставляючи нерівності (10) та (12), переконуємося в справедливості теореми.

Теорема доведена.

Висновок. Таким чином в даній роботі обчислено точні значення найкращих односторонніх наближень в інтегральній метриці класів функцій, що зображаються за допомогою згорток з фіксованими твірними ядрами, коефіцієнти Фур'є яких мають показникові швидкість спадання до нуля.

Список використаних джерел:

1. Степанец А. И. Классификация и приближение периодических функций. – К.: Наук. думка, 1987. – 268 с.
2. Сорич В. А., Сорич Н. М. Найкраще наближення лінійної комбінації ядер Пуассона // Сучасні проблеми математичного моделювання, прогнозування та оптимізації: Збірник наук. праць (за матеріалами Всеукраїнської науково-методичної конференції). – Кам'янець-Подільський: Кам'янець-Подільський державний університет, редакційно-видавничий відділ, 2004. – С.60-69.
3. Ganelius T. On one sided approximation by trigonometric polynomials // Math. Scand. – 1956. – 4. – P.247-258.

4. Сорич В. А., Сорич Н. М. Про найкраще одностороннє сумісне наближення класів W_{β}^{r} в метриці L // Ряди Фур'є: теорія і застосування. – К.: Ін-т математики НАН України, 1998. – С.316-322.
5. Доронин В. Г., Лигун А. А. О наилучшем одностороннем приближении классов $W_{\alpha}^{r}V \ \left(r > -1\right)$ тригонометрическими полиномами в метрике L_1 // Мат. заметки. – 1977. – 22, №3. – С.357-370.
6. Сорич А. В., Сорич В. А., Сорич Н. М. Найкраще одностороннє наближення лінійної комбінації функцій та їх похідних // Дванадцята міжнародна наук. конф. ім. академіка М. Кравчука,15-17 трав., 2008 р., Київ: Матеріали конф. – Т. 1. – К.: ТОВ "Задруга", 2008. – С.796.

The problem of the best one-sided approximation of the line combination of some classes functions with the high differentility was solved.

Key words: *the best one-sided approximation, Poisson's kernel, convolution.*

Отримано: 05.06.2008

УДК 008.1:65.011.03:504.05

Д. В. Стефанишин, Ю. Д. Стефанишина, М. В. Кубай

*Міжнародний економіко-гуманітарний університет
ім. Степана Дем'янчука, м. Рівне*

МЕТОД ПОРІВНЯННЯ ВАРІАНТІВ РІШЕНЬ В ПРИРОДОКОРИСТУВАННІ З ВРАХУВАННЯМ РИЗИКІВ НЕВИКОРИСТАНИХ МОЖЛИВОСТЕЙ

Пропонується метод порівняння варіантів рішень в природокористуванні на основі співставлення сукупних ризиків альтернатив. Сукупні ризики оцінюються у вигляді сум компонент: ризиків збитків (шкоди, втрат), якими може бути обтяжений варіант (в економічній, екологічній, соціальній сферах), та ризиків невикористаних можливостей, які характеризуються потенційними доходами, вигодами, перевагами тощо, що супроводжують альтернативи.

Ключові слова: *альтернатива, порівняння варіантів рішення, невизначеність, носій рішення, природокористування, ризик невикористаних можливостей, схильність до ризику, таблиця рішень.*

Вступ. Необхідність приймати рішення, щодо яких не вдається в повній мірі врахувати визначальні умови, а також наслідки впливу цих умов (зазвичай ці обидві обставини називають ефектом невизначеності), зустрічається в усіх сферах життєдіяльності людини.

