УДК 519.6

А. Н. Хомченко[1], С. О. Камаєва[2]

[1]Херсонський національний технічний університет
[2]Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газу

КРИТЕРІЙ ІНВАРІАНТНОСТІ ТЕМПЕРАТУРНИХ ПОЛІВ СЕРЕНДИПОВИХ ЕЛЕМЕНТІВ ЩОДО АЛЬТЕРНАТИВНИХ ФУНКЦІЙ ФОРМИ

В результаті проведення ряду комп'ютерних експериментів з використанням засобів когнітивної графіки виявлено нові властивості серендипових скінченних елементів вищих порядків в тривимірному просторі. В рамках температурної задачі були встановлені умови, при яких спостерігається стійкість температурного поля по відношенню до базису. Сформульовано критерій інваріантності температурних полів серендипових елементів щодо альтернативних функцій форми.

Ключові слова: *серендиповий елемент, температурне поле, інваріантність, базис.*

Постановка проблеми. Останнім часом застосування скінченних елементів (СЕ) серендипової сім'ї стало настільки розповсюдженим, а їх роль в розв'язуванні різноманітних граничних задач такою значною, що вивчення інтерполяційних якостей серендипових апроксимацій залишається досі актуальним. Особливо це стосується СЕ вищих порядків.

Аналіз попередніх публікацій, постановка задачі. Моделювання серендипових скінченних елементів завжди було цікавим аспектом наукових досліджень. Вперше базисні функції для лінійних, квадратичних та кубічних СЕ були знайдені підбором [1]. Алгебраїчний шлях побудови цих функцій наведений в [2]. Альтернативою цьому підходу стало геометричне моделювання [3-7], яке не лише спростило спосіб побудови базису, але й відкрило шлях для створення альтернативних моделей на елементах вищих порядків та вивчення їх інтерполяційних властивостей. В ході останніх досліджень було виявлено явище стійкості серендипових поверхонь по відношенню до базису на двовимірних СЕ [8].

Ціль статті. На просторових скінченних елементах серендипової сім'ї сформулювати критерій інваріантності температурних полів щодо альтернативних функцій форми.

Основна частина. В результаті проведення ряду комп'ютерних експериментів вдалось виявити нові властивості серендипових скінченних елементів вищих порядків у двовимірному просторі. В рамках температурної задачі були встановлені умови, при яких спостеріга-

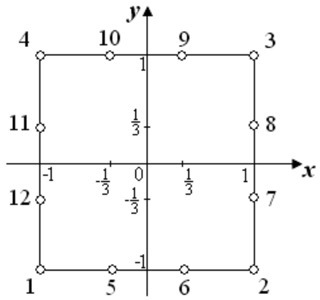


Рис. 1. *Серендиповий скінченний елемент третього порядку в двовимірному просторі*

ється стійкість температурного поля по відношенню до функцій форми. Наведемо результати, отримані в [8], для серендипового СЕ 3-го порядку (*рис. 1*).

Умова стійкості має вигляд:

$$\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4} T_i = \frac{1}{8}\sum_{i=5}^{12} T_i \,, \qquad (1)$$

де T_i – значення температури у вузлах СЕ (*рис. 1*).

Тобто, коли середнє арифметичне значень температури в кутових вузлах дорівнює середньому арифметичному в решті вузлів, температурне поле залежить лише від граничних значень і вибір базису стає несуттєвим. Експериментально отримана умова (1) була доведена аналітично. Зазначимо, що для базисів, побудованих засобами геометричного моделювання, з n-параметричною інтерполяцією ($n > 13$) накладається додаткова умова симетрії граничних значень в деяких вузлах.

Поставимо задачу: дослідити явище стійкості температурного поля по відношенню до базису на просторовому серендиповому СЕ 3-го порядку (*рис. 2*).

Розглянемо два альтернативних базиси, побудованих засобами геометричного моделювання.

Рис. 2*. Серендиповий скінченний елемент третього порядку в тривимірному просторі*

Базис 1. Базисні функції для вузлів, розташованих у вершинах куба (*рис. 2*) будуть мати вигляд:

$$N_i = \frac{1}{64}\left(1 + x_i x\right)\cdot\left(1 + y_i y\right)\cdot\left(1 + z_i z\right)\cdot\left(9\left(x^2 + y^2 + z^2\right) - 19\right),$$

$$x_i, y_i, z_i = \pm 1; \quad (i = \overline{1,8}).$$

Базисні функції для проміжних вузлів матимуть вигляд:

$$N_i = \frac{9}{64}\left(1 - x^2\right)\cdot\left(1 + y_i y\right)\cdot\left(1 + z_i z\right)\cdot\left(1 + 9x_i x\right),$$

$$x_i = \pm\frac{1}{3}; \quad y_i, z_i = \pm 1; \quad (i = 9,10,13,14,25,26,29,30).$$

Інші базисні функції отримуються з даних циклічною перестановкою координат x, y, z.

Базис 2. Для цього базису функції форми:
для кутових вузлів

$$N_i = \frac{1}{64}\left(1 + x_i x\right)\cdot\left(1 + y_i y\right)\cdot\left(1 + z_i z\right)\cdot\left(9\left(2 - x_i x - y_i y - z_i z\right)^2 - 1\right),$$

$$x_i, y_i, z_i = \pm 1; \quad (i = \overline{1,8}),$$

для проміжних вузлів

$$N_i = \frac{9}{64}\left(1 - x^2\right)\cdot\left(1 + y_i y\right)\cdot\left(1 + z_i z\right)\cdot\left(9x_i x + y_i y + z_i z - 1\right),$$

$$x_i = \pm\frac{1}{3}; \quad y_i, z_i = \pm 1; \quad (i = 9,10,13,14,25,26,29,30).$$

Інші базисні функції, як і в базисі 1, отримуються з даних шляхом циклічної перестановки x, y, z. Зауважимо, що ці базиси суттєво відрізняються, так як поліном, що відповідає першому базису, містить 32 параметри, а другому – 38 параметрів.

Проводячи аналогію з двовимірним випадком, зробимо припущення, що умова стійкості для просторового СЕ має вигляд:

$$\frac{1}{8}\sum_{i=1}^{8} T_i = \frac{1}{24}\sum_{i=9}^{32} T_i\,, \tag{2}$$

де T_i – значення температури у вузлах просторового СЕ (*рис. 2*).

Перевіримо, чи це дійсно так. Задамо температури $T_1 - T_{32}$ у вузлах елемента згідно умови (2) та занесемо їх в *таблицю 1*.

Оскільки температурне поле для просторового випадку залежить від трьох координат x, y, z, то виникає проблема його геометричного уявлення. З метою вирішення цієї проблеми використаємо технічні засоби інтерактивної комп'ютерної графіки (ІКГ), яка за допомогою ілюстративної та когнітивної її функцій забезпечує не лише впізнання зображуваних об'єктів, а й відкриває можливість мислити "складними просторовими образами” [9]. Дійсно, проілюструвати можна тільки те, що вже відомо і реально існує. А когнітивна функція ІКГ полягає в тому, щоб використовуючи деякі ІКГ-зображення, отримати нові знання про досліджуваний об’єкт.

Таблиця 1

Значення температури в граничних точках, [^oC]

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
T_i	75	20	65	40	25	30	5	10	35	60	15	45	50	– 20	25	90
i	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32
T_i	43	49	– 6	0	13	– 44	21	– 35	80	5	70	– 10	107	68	100	49

Спробуємо через геометричні зображення температурних полів для кожного з базисів в окремих перерізах (при фіксованих x, y або z) дослідити стійкість температурного поля на СЕ. Покажемо температурні поля та їх лінії рівня для базису 1 (*рис. 3а*) та базису 2 (*рис. 3б*) при фіксованій координаті z (наприклад, $z = 0.5$).

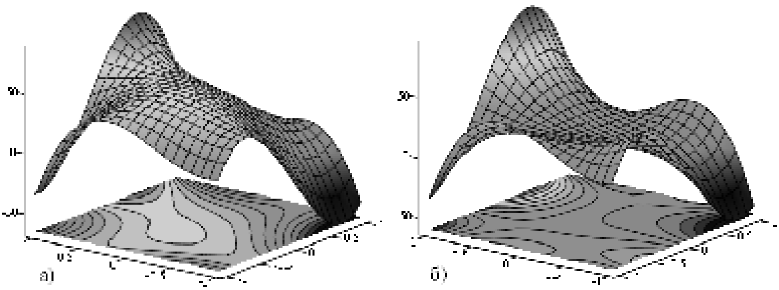


Рис. 3. *Температурні поля та лінії рівня в перерізі* $z = 0.5$ *(табл.1)*

З цих рисунків видно, що умова (2) не забезпечує стійкість температурного поля. Продовжуючи дослідження, розглянемо грані СЕ (наприклад, при $z = 1$) та покажемо температурні поля та їх лінії рівня для базису 1 (*рис. 4а*) та базису 2 (*рис. 4б*).

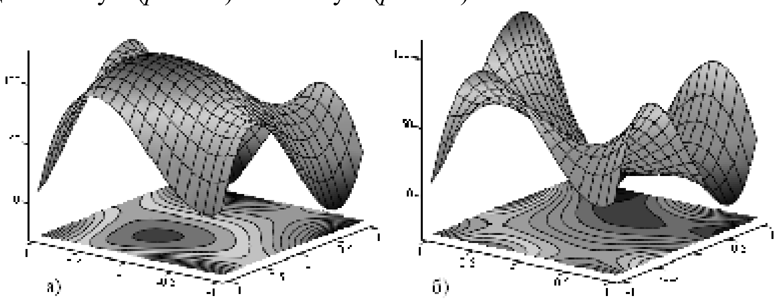


Рис. 4. *Температурні поля та лінії рівня згідно таблиці 1 на грані* $z = 1$

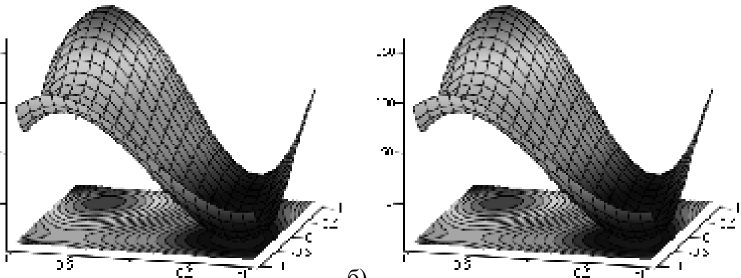
Як бачимо, температурні поля відрізняються. Цього слід було очікувати, оскільки на приведеній грані, як на двовимірному СЕ, не виконується умова (1). Аналогічна картина спостерігається і на інших гранях. З метою забезпечення стійкості температурного поля на всіх гранях СЕ, задамо граничні температури $T_1 - T_{32}$ так, щоб умова (1) виконувалась на кожній з них (*табл. 2*).

Таблиця 2

Значення температури в граничних точках, [^oC]

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
T_i	10	20	30	40	25	65	5	75	35	60	15	45	50	– 20	25	– 10
i	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32
T_i	43	49	– 6	0	13	70	21	80	– 35	5	– 44	90	107	68	100	49

Проведені дослідження на основі даних таблиці 2 показали, що геометричні зображення температурних полів для обох базисів абсолютно збігаються в будь-яких перерізах СЕ (при фіксованих x, y або z). В якості прикладу наведемо поверхні температурних полів та їх лінії рівня при $z = 0.5$ для базису 1 (*рис. 5а*) та базису 2 (*рис. 5б*).



а) б)

Рис. 5. *Температурні поля та лінії рівня в перерізі z =* 0.5 *(табл. 2)*

Виявилось, що при наявності стійкості температурного поля по відношенню до базису на гранях, забезпечується стійкість температурного поля і всередині елемента. Не важко бачити, що при цьому виконується і умова (2), яка є необхідною, але не є достатньою.

З вищесказаного випливає критерій інваріантності температурних полів серендипових СЕ по відношенню до альтернативних функцій форми, який можна сформулювати наступним чином: температурне поле залишається нечутливим до змін функцій форми на просторовому СЕ 3-го порядку, якщо умова стійкості (1) виконується на кожній з його граней.

Після встановлення властивості стійкості на просторовому СЕ було проведено аналітичне доведення цього факту.

Висновки. В даній роботі засобами ІКГ було виявлено явище стійкості температурного поля по відношенню до базису на просторовому серендиповому СЕ 3-го порядку та сформульовано умови інваріантності температурних полів щодо альтернативних функцій форми. Слід зазначити, що дане явище має місце не лише в температурних задачах, а й в задачах іншої фізичної природи.

Важко перебільшити роль когнітивної комп’ютерної графіки, яка, здійснюючи візуалізацію наукових абстракцій, породжує нові знання та відкриває шлях до нових досліджень.

Список використаних джерел:

1. Норри Д., Ж. де Фриз. Введение в метод конечных элементов. – М.: Мир, 1981. – 304 с.
2. Сегерлинд Л. Применение метода конечных элементов. – М.: Мир, 1979. – 392 с.
3. Камаева Л. И., Хомченко А. Н. Вычислительные эксперименты с альтернативными базисами серендиповых аппроксимаций // Прикл. пробл. прочности и пластичности. Анализ и оптимизация деформируемых систем. Всесоюз. межвуз. сб. / Горьк. гос. ун-т. – 1988. – Вып. 39. – С.103-105.
4. Камаева Л. И., Хомченко А. Н. Новые модели конечных элементов серендипова семейства. Ивано-Франк. ин-т нефти и газа. – Ивано-Франковск, 1985. – 14 с. – Деп. в УкрНИИНТИ 5.03.85, № 487.
5. Хомченко А. Н., Камаева Л. И. Геометрические аспекты серендиповых аппроксимаций. Ивано-Франк. ин-т нефти и газа. – Ивано-Франковск, 1987. – 10 с. – Деп. в УкрНИИНТИ 27.03.87, № 1062.
6. Хомченко А. Н., Литвиненко Е. И., Гучек П. И. Геометрия серендиповых аппроксимаций // Прикл. геом. и инж. графика. – К.: Будівельник, 1996. – Вып. 59. – С.40-42.
7. Камаева Л. И., Хомченко А. Н. О моделировании конечных элементов серендипова семейства // Прикл. пробл. прочности и пластичности. Алгоритмизация и автоматизация решения задач упругости и пластичности. Всесоюз. межвуз. сб. / Горьк. гос. ун-т. – 1985. – Вып. 31. – С.14-17.
8. Хомченко А. Н., Камаєва С. О. Конструювання серендипових поверхонь, нечутливих до змін функцій форми // Наукові нотатки. Міжвуз. зб. – Луцьк: ЛДТУ, 2008. – Вип. 22. – С.366-371.
9. Зенкин А. А. Когнитивная компьютерная графика. – М.: Наука, 1991. – 187 с.

As a result of realization computer experiments, using cognitive graphics facilities new properties of the serendipian finite elements of higher orders in three-dimensional space were found out. Firmness conditions of the temperature field in relation to a basis within the framework of temperature task are set. The invariance criterion of the temperature fields over serendipian elements is formulated in relation to the alternative shape functions.

Key words: *serendipian element, temperature field, invariance, basis.*

Отримано: 30.05.2008