8. Хомченко А. Н. Некоторые вероятностные аспекты МКЭ / Ив.-Франк. ин-т нефти и газа. – Ивано-Франковск, 1982. – 9 с.; Деп. в ВИНИТИ 18.03.82, №1213.
9. Хомченко А. Н. О базисных функциях МКЭ для уравнений в частных производных // III Респ. Симп. по диффер. и интегр. уравнениям: Тез. докл. – Одесса: ОГУ, 1982. – С.257-258.
10. Хомченко А. Н., Камаева Л. И. О моделировании конечных элементов серендипова семейства // Прикл. проблемы прочности и пластичности: Всесоюзн. межвуз. сб. – Горький: ГГУ, 1985. – С.14-17.
11. Астионенко И. А., Литвиненко Е. И., Хомченко А. Н. Оптимизация спектров узловых нагрузок на серендиповых элементах высших порядков // Тези доп. V міжн. конф. "Матем. та програм. забезпечення інтелект. систем". – Дніпропетровськ: ДНУ, 2007. – С.11.
12. Хомченко А. Н., Астионенко И. А., Литвиненко Е. И. Обратные задачи об интегральных средних для серендиповых полиномов // Вестн. Херс. нац. техн. ун-та. – 28(2). – Херсон: ХНТУ, 2007. – С.383-389.
13. Стренг Г., Фикс Дж. Теория метода конечных элементов. – М.: Мир, 1977. – 349 с.
14. Козуб Н. А., Манойленко Е. С., Хомченко А. Н. Температурный тест для модифицированных базисов бикубической интерполяции // ААЭКС. – №1(19). – Херсон: ХНТУ, 2007. – С.25-30.
15. Зенкин А. А. Когнитивная компьютерная графика. – М.: Наука, 1991. – 192 с.

It is illustrated three various approaches to a problem of designing of basic polygons on example SFE-12.

Key words: *serendipian eventual element, SFE-12.*

Отримано: 27.03.2008

УДК 519.21+62

Я. М. Чабанюк, І. М. Подун

Національний університет "Львівська політехніка"

АСИМПТОТИЧНІ ПРЕДСТАВЛЕННЯ ГЕНЕРАТОРА СТРИБКОВОЇ ЕВОЛЮЦІЇ З ШВИДКИМИ МАРКОВСЬКИМИ ПЕРЕКЛЮЧЕННЯМИ

В роботі одержано асимптотичні представлення генератора стрибкової еволюції в марковському середовищі, а також побудовано граничний генератор еволюції як розв'язок проблеми сингулярного збурення для отриманих асимптотичних представлень.

Ключові слова: *стрибкова еволюція, марковський процес, розв'язок проблеми сингулярного збурення.*

Вступ. Стійкість динамічної системи, що задовольняє принципу усереднення, була встановлена М. М. Боголюбовим [1] (див. також

[2]). Стійкість динамічної системи з марковським збуренням за умов стійкості усередненої системи вивчалась в роботах [3-5], а також [6-8]. В умовах дифузійної апроксимації динамічної системи з марковським збуренням проблема стійкості вперше була розв'язана в роботі [9] з використанням мартингальної характеризації відповідного марковського процесу (див. також [10]). Зокрема в роботі В. С. Королюка [10] використано властивості асимптотичних представлень породжуючого оператора (генератора) неперервної динамічної системи, а також розв'язок проблеми сингулярного збурення для побудови генератора граничного процесу.

Постановка задачі. Стрибкова еволюція в марковському середовищі в схемі серій задається співвідношенням [11, 12] (покладемо $\sum_{k=0}^{-1} C\left(u_k^\varepsilon, x_k^\varepsilon\right) := 0$)

$$u^\varepsilon(t) = u + \varepsilon \sum_{k=0}^{\nu(t/\varepsilon)-1} C\left(u_k^\varepsilon, x_k^\varepsilon\right), t \ge 0,\ u^\varepsilon(0) = u, \qquad (1)$$

де $\nu(t) := \max\{n > 0 : \tau_n \le t\}$, $t \ge 0$, – лічильний процес моментів відновлення $\tau_n, n \ge 0,$ вкладеного ланцюга Маркова (ВЛМ) $x_n := x(\tau_n)$, $n \ge 0$, у рівномірно ергодичний марковський процес (МП) $x(t), t \ge 0,$ у стандартному фазовому просторі станів $(X, \boldsymbol{X})$, що задається генератором Q [13]

$$Q\varphi(x) = q(x)\int_X P(x, dy)\left[\varphi(y) - \varphi(x)\right],$$

де $q(x)$ – інтенсивність, така, що $\|q(x)\| := \sup_{x \in X} q(x) < \infty$.

Функція швидкості $C(u, x)$, $u \in R^d$, $x \in X$, задовольняє умові існування глобального розв'язку супроводжуючих систем

$$du_x(t)/dt = C\left(u_x(t), x\right),\ x \in X.$$

Генератор Q є зведено-оборотним з потенціалом R_0 [13]. Потенціал R_0 задовольняє властивості:

$$QR_0 = R_0 Q = \Pi - \mathrm{I},$$

де I – тотожний оператор, а Π – проектор на нуль-простір породжуючого оператора Q: $\Pi\ \varphi(x) := \int_X \pi(dx)\varphi(x)$.

Процес марковського відновлення $x_n, \tau_n, n \ge 0,$ задається стохастичним ядром $P(x, B) = P\{x_{n+1} \in B | x_n = x\}, x \in X, B \in \boldsymbol{X}$.

В (1) мають місце вкладеності

$$u_n^\varepsilon := u^\varepsilon\left(\tau_n^\varepsilon\right),\ x_n^\varepsilon := x\left(\tau_n^\varepsilon\right),\ \tau_n^\varepsilon := \varepsilon\tau_n\ ,\ n \ge 0\ .$$

Стаціонарний розподіл $\rho(B), B \in \boldsymbol{X}$, ВЛМ $x_n, n \ge 0$, задається рівнянням

$$\rho(B) = \int_X \rho(dx)P(x,B)\ ,\ \rho(X) = 1\ .$$

Час θ_{n+1} перебування в станах x_n задається функцією розподілу

$$G_x(t) := P\{\theta_{n+1} \le t | x_n = x\} = 1 - e^{-q(x)t},\ x \in X,\ t \ge 0.$$

Неперервна усереднена еволюція задається диференціальним рівнянням

$$\frac{du(t)}{dt} = C(u(t)), u(0) = u, \tag{2}$$

де усереднення визначається за стаціонарним розподілом ВЛМ

$$C(u) = q\int_X \rho(dx)C(u,x).$$

Лема 1. Генератор $\boldsymbol{L}^\varepsilon$ двокомпонентного МП

$$u^\varepsilon(t), x_t^\varepsilon := x(t/\varepsilon)\,, \tag{3}$$

на функціях $\varphi(u) \in C^2\left(R^d\right)$ має наступні асимптотичні представлення

$$\begin{aligned}\boldsymbol{L}^\varepsilon\varphi(u,x) &= \varepsilon^{-1}Q\varphi(u,x) + \varepsilon\theta_1^\varepsilon(x)Q_0\varphi(u,x) = \\ &= \varepsilon^{-1}Q\varphi(u,x) + \boldsymbol{C}(x)Q_0\varphi(u,x) + \varepsilon\theta_2^\varepsilon(x)Q_0\varphi(u,x),\end{aligned} \tag{4}$$

де

$$\boldsymbol{C}(x)\varphi(u) := C(u,x)\varphi'(u)\,,$$

$$\theta_1^\varepsilon(x)\varphi(u) := C(u,x)\varphi'(\tilde{u})\,,$$

$$Q_0\varphi(x) := q(x)\int_X P(x,dy)\varphi(y)\,,$$

$$\theta_2^\varepsilon(x)\varphi(u) := \frac{1}{2}C^T(u,x)\varphi''(\tilde{u})C(u,x)\,,$$

а $\tilde{u}$ проміжна точка з проміжку $(u; u + \theta C(u,x)), 0 \le \theta \le 1$.

Доведення. Генератор $\boldsymbol{L}^\varepsilon$ МП (3) визначається співвідношенням [13]

$$\lim_{\Delta\to 0}\Delta^{-1}\left\{E\left[\varphi\left(u^\varepsilon(t+\Delta), x_{t+\Delta}^\varepsilon\right) \middle| u^\varepsilon(t) = u, x_t^\varepsilon = x\right] - \varphi(u,x)\right\} = \boldsymbol{L}^\varepsilon\ \varphi(u,x)\ . \tag{5}$$

Обчислення умовного математичного сподівання в (5) приводить до наступних перетворень

$$E\left[\varphi\left(u^{\varepsilon}(t+\Delta), x_{t+\Delta}^{\varepsilon}\right) \Big| u^{\varepsilon}(t)=u, x_t^{\varepsilon}=x\right]=E_{u,x}\left[\varphi\left(u^{\varepsilon}(t+\Delta), x_{t+\Delta}^{\varepsilon}\right)\right]=$$
$$=E_{u,x}\left[\varphi\left(u^{\varepsilon}(t+\Delta), x_{t+\Delta}^{\varepsilon}\right)\right] I\left(\theta_x \leq \varepsilon^{-1}\Delta\right)+$$
$$+E_{u,x}\left[\varphi\left(u^{\varepsilon}(t+\Delta), x_{t+\Delta}^{\varepsilon}\right)\right] I\left(\theta_x > \varepsilon^{-1}\Delta\right). \tag{6}$$

З того, що $I\left(\theta_x \leq \varepsilon^{-1}\Delta\right)=1-e^{-\varepsilon^{-1}q(x)\Delta}=\varepsilon^{-1}q(x)\Delta+o(\Delta)$, а приріст $\Delta u^{\varepsilon}(t)=u^{\varepsilon}(t+\Delta)-u^{\varepsilon}(t)$ системи (1) в цьому випадку визначається співвідношенням $\Delta u^{\varepsilon}(t)=\varepsilon C(u,x)$, для першого доданку з (6) маємо

$$E_{u,x}\left[\varphi\left(u^{\varepsilon}(t+\Delta), x_{t+\Delta}^{\varepsilon}\right)\right] I\left(\theta_x \leq \varepsilon^{-1}\Delta\right)=$$
$$=E_{u,x}\left[\varphi\left(u+\varepsilon C(u,x), x_{t+\Delta}^{\varepsilon}\right)\right]\varepsilon^{-1}q(x)\Delta+o(\Delta). \tag{7}$$

Для другого доданку з (6) використаємо представлення $I\left(\theta_x > \varepsilon^{-1}\Delta\right)=e^{-\varepsilon^{-1}q(x)\Delta}=1-\varepsilon^{-1}q(x)\Delta+o(\Delta)$, і те, що при $\Delta\to 0$ отримуємо $\Delta u^{\varepsilon}(t)\to 0$, а також $x_{t+\Delta}^{\varepsilon}\to x$. Отже маємо

$$E_{u,x}\left[\varphi\left(u^{\varepsilon}(t+\Delta), x_{t+\Delta}^{\varepsilon}\right)\right] I\left(\theta_x > \varepsilon^{-1}\Delta\right)=\varphi(u,x)\left[1-\varepsilon^{-1}q(x)\Delta\right]+o(\Delta). \tag{8}$$

Використовуючи зображення (7) та (8) для умовного математичного сподівання отримуємо представлення

$$E_{u,x}\left[\varphi\left(u^{\varepsilon}(t+\Delta), x_{t+\Delta}^{\varepsilon}\right)\right]=\varphi(u,x)-\varepsilon^{-1}q(x)\varphi(u,x)\Delta+$$
$$+\varepsilon^{-1}q(x)E_{u,x}\left[\varphi\left(u+\varepsilon C(u,x), y\right)\right]\Delta+o(\Delta),$$

з врахуванням того, що замість $x_{t+\Delta}^{\varepsilon}$ можна поставити $y\in X$.

Тепер легко бачити, що генератор $\boldsymbol{L}^{\varepsilon}$ можна подати вигляді

$$\boldsymbol{L}^{\varepsilon}\varphi(u,x)=\varepsilon^{-1}Q\varphi(u,x)+\varepsilon^{-1}\left[\boldsymbol{C}^{\varepsilon}(x)-I\right]Q_0\varphi(u,x),$$

де оператор $\boldsymbol{C}^{\varepsilon}(x)$ має представлення

$$\boldsymbol{C}^{\varepsilon}(x)\varphi(u)=\varphi(u+\varepsilon C(u,x)).$$

Використовуючи гладкість тест-функцій $\varphi(u,x)$ по змінній u, отримуємо перше та друге представлення (3) генератора $\boldsymbol{L}^{\varepsilon}$.

Розглянемо збурену функцію Ляпунова

$$V^{\varepsilon}(u,x)=V(u)+\varepsilon V_1(u,x), \tag{9}$$

де $V(u)\in C^2\left(R^d\right)$, є функцією Ляпунова для усередненої системи (2).

Лема 2. Розв'язок проблеми сингулярного збурення для генератора (3) на збуреній функції Ляпунова (9) визначається співвідношеннями:

$$\boldsymbol{L}^{\varepsilon}\ V^{\varepsilon}(u,x) = \boldsymbol{C}\ V(u) + \varepsilon\theta_L^{\varepsilon}(x)V(u), \tag{10}$$

де
$$\boldsymbol{C}V(u) = C(u)V'(u),$$

а залишковий оператор $\theta_L^{\varepsilon}(x)$ має вигляд:

$$\theta_L^{\varepsilon}(x) = \varepsilon\theta_1^{\varepsilon}(x)Q_0R_0\widetilde{\boldsymbol{C}}(x)V(u) + \theta_2^{\varepsilon}(x)q(x)V(u),$$

де
$$\widetilde{\boldsymbol{C}}(x)V(u) = (C(u,x)q(x) - C(u))V'(u).$$

Доведення. Спочатку зауважимо, що розв'язок проблеми сингулярного збурення [10, 13] визначає збурення $V_1(u,x)$ в (9) в вигляді

$$V_1(u,x) = R_0\widetilde{\boldsymbol{C}}(x)V(u).$$

Використовуючи розклади (4) в позначеннях

$$\boldsymbol{L}_{(0)}^{\varepsilon}\varphi(u,x) = \varepsilon^{-1}Q\varphi(u,x) + \varepsilon\theta_1^{\varepsilon}(x)Q_0\varphi(u,x),$$

$$\boldsymbol{L}_{(1)}^{\varepsilon}\varphi(u,x) = \varepsilon^{-1}Q\varphi(u,x) + \boldsymbol{C}(x)Q_0\varphi(u,x) + \varepsilon\theta_2^{\varepsilon}(x)Q_0\varphi(u,x),$$

на збуреній функції Ляпунова (9) маємо представлення генератора

$$\boldsymbol{L}^{\varepsilon}\ V^{\varepsilon}(u,x) = \varepsilon\boldsymbol{L}_{(0)}^{\varepsilon}V_1(u,x) + \boldsymbol{L}_{(1)}^{\varepsilon}V(u). \tag{11}$$

Оскільки

$$\varepsilon\boldsymbol{L}_{(0)}^{\varepsilon}V_1(u,x) = QV_1(u,x) + \varepsilon^2\theta_1^{\varepsilon}(x)Q_0V_1(u,x),$$

а
$$\boldsymbol{L}_{(1)}^{\varepsilon}V(u) = \varepsilon^{-1}QV(u) + \boldsymbol{C}(x)Q_0V(u) + \varepsilon\theta_2^{\varepsilon}(x)Q_0V(u),$$

то з (11) отримуємо (10).

Висновки. Розв'язок проблеми сингулярного збурення (10) забезпечує встановлення достатніх умов стійкості стрибкової еволюції (1) за схемою [10].

Список використаних джерел:

1. Боголюбов М. М. О некоторых статистических методах в математической физике. – Изд. АН УССР, Львов. – 1945. – 137 с.
2. Митропольский Ю. О., Самойленко А. М. Математические проблемы нелинейной механики. – Киев: Вища школа, 1987. – 72 с.
3. Скороход А. В. Асимптотические методы теории стохастических дифференциальных уравнений. – Киев: Наукова думка, 1987. – 328 с.
4. Царьков Е. Ф. Об устойчивости решений линейных дифференциальных уравнений с марковскими коэффициентами // Доповіді НАН України. – 1987. – №2. – С.34-37.
5. Царьков Е. Ф. Случайные возмущения дифференциально-функциональных уравнений. – Рига: Зинатне, 1989. – 421 с.
6. Королюк В. С. Устойчивость автономной динамической системы с быстрыми марковскими переключениями // Укр. мат. журнал. – 1991. – 43, №8. – С.1176-1181.
7. Королюк В. С. Average and stability of dynamical systems with rapid stochastic switchings // Exploring Stochastic Laws. – 1995, VSP. – С.219-232.

8. Королюк В. С. Устойчивость автономной динамической системы с быстрыми марковскими переключениями // Доклады АН Украины. – 1990. – сер. А – №6. – С.16-19.
9. Blankenship G. L., Papanicolaou G. C. Stability and Control of stochastic systems with wide band noise disturbances // SIAM. Appe. Math. – 1978. – 34. – P.437-476.
10. Королюк В. С. Стійкість стохастичних систем у схемі дифузійної апроксимації // Укр. мат. журнал. – 1998. – 50, №1. – С.36-47.
11. Korolyuk V. S., Korolyuk V. V. Stochastic Models of Systems. – Kluwer, Netherland, 1999. – 185 p.
12. Чабанюк Я. М. Асимптотична нормальність стрибкової процедури стохастичної апроксимації у марковському середовищі // Вісник Чернів. ун-ту, Математика. – № 349. – Чернівці. – 2007. – С.128-133.
13. Koroliuk V., Limnios N. Stochastic Systems in Merging Phase Space // World Scientific Publishing. – 2005. – 330 p.

In this work the asymptotic views for the generator jumping evolution in the Markov media and limits generator of evolution with the singular perturbation problem for asymptotic representation are obtained.

Key words: *jumping evolution, Markov process, solution of singular perturbation problem.*

Отримано: 05.06.2008

УДК 517.977.56

Т. В. Ширинов

Азербайджанский технический университет, г. Баку

РАЗНОСТНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА С НЕЛОКАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ

В работе рассмотрена задача оптимизации процессов, описываемых системой Гурса-Дарбу с интегральными граничными условиями. Построена разностная схема для рассматриваемой задачи. Доказано сходимость по функционалу построенной разностной задачи оптимизации к исходной задаче.

Ключевые слова: *задача оптимизации, система Гурса-Дарбу, нелокальные условия, функционал.*

Введение. Задачи оптимизации колебательных процессов имеют многочисленные приложения. Например, при исследовании процессов сорбции, сушки, трения, изнашивания, некоторых химических процессов, а также в задачах математической биологии и демографии часто встречаются краевые задачи типа Гурса-Дарбу [1, с.165-175; 2, с.119-125; 3, с.88-103; 4, с.72-81; 5].

