8. Королюк В. С. Устойчивость автономной динамической системы с быстрыми марковскими переключениями // Доклады АН Украины. – 1990. – сер. А – №6. – С.16-19.
9. Blankenship G. L., Papanicolaou G. C. Stability and Control of stochastic systems with wide band noise disturbances // SIAM. Appe. Math. – 1978. – 34. – P.437-476.
10. Королюк В. С. Стійкість стохастичних систем у схемі дифузійної апроксимації // Укр. мат. журнал. – 1998. – 50, №1. – С.36-47.
11. Korolyuk V. S., Korolyuk V. V. Stochastic Models of Systems. – Kluwer, Netherland, 1999. – 185 p.
12. Чабанюк Я. М. Асимптотична нормальність стрибкової процедури стохастичної апроксимації у марковському середовищі // Вісник Чернів. ун-ту, Математика. – № 349. – Чернівці. – 2007. – С.128-133.
13. Koroliuk V., Limnios N. Stochastic Systems in Merging Phase Space // World Scientific Publishing. – 2005. – 330 p.

In this work the asymptotic views for the generator jumping evolution in the Markov media and limits generator of evolution with the singular perturbation problem for asymptotic representation are obtained.

Key words: *jumping evolution, Markov process, solution of singular perturbation problem.*

Отримано: 05.06.2008

УДК 517.977.56

Т. В. Ширинов

Азербайджанский технический университет, г. Баку

РАЗНОСТНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА С НЕЛОКАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ

В работе рассмотрена задача оптимизации процессов, описываемых системой Гурса-Дарбу с интегральными граничными условиями. Построена разностная схема для рассматриваемой задачи. Доказано сходимость по функционалу построенной разностной задачи оптимизации к исходной задаче.

Ключевые слова: *задача оптимизации, система Гурса-Дарбу, нелокальные условия, функционал.*

Введение. Задачи оптимизации колебательных процессов имеют многочисленные приложения. Например, при исследовании процессов сорбции, сушки, трения, изнашивания, некоторых химических процессов, а также в задачах математической биологии и демографии часто встречаются краевые задачи типа Гурса-Дарбу [1, с.165-175; 2, с.119-125; 3, с.88-103; 4, с.72-81; 5].

В данной работе рассматривается оптимизационная задача для систем нелинейных гиперболических уравнений с нелокальными условиями, где граничные условия заданы в интегральном виде.

Отметим, что задачи оптимизации с интегральными краевыми условиями для нелинейных систем рассмотрены также в работах [6, с.13-20; 7, с.22-29].

Постановка задачи. Рассмотрим задачу поиска минимума функционала

$$J_* = \inf_{u \in U} J(u) \tag{1}$$

$$J(u) = \sum_{i=1}^{k} \Phi\left(z\left(t_{\tau_i}, s_{r_i}\right)\right) + \iint_Q F\left(t, s, z(t,s), z_t(t,s), z_s(t,s), u\right) dt ds, \tag{2}$$

на решениях $z = z(t,s) \equiv z(t,s;u)$ системы Гурса-Дарбу

$$z_{ts} = f(t, s, z(t,s), z_t(t,s), z_s(t,s), u), \ (t,s) \in Q, \tag{3}$$

при условиях

$$z_t(t,0) = \varphi(t, z(t,0)), \ t \in [0,T] \tag{4}$$

$$z_s(0,s) = \psi(s), \quad s \in [0,l] \tag{5}$$

$$\int_0^T n(t) z(t,0) dt = c\ . \tag{6}$$

Будем считать, что класс допустимых управлений состоит из функций $u \in U$, где

$$u = u(\cdot,\cdot) \in U \subset L_2^r(Q)\ . \tag{7}$$

Предполагается, что $\left(t_{\tau_i}, s_{r_i}\right)$, $\left(i = \overline{1,k}\right)$ – произвольный набор точек из Q; τ_i, r_i, k – натуральные числа, $z \in R^n$ – вектор состояния; $u \in R^r$ – управление; t, s – скалярные независимые переменные; T, l – заданные положительные числа; f, F, Φ, φ, ψ – заданные функции; $c \in R^n$ – фиксированная точка; $n(t) = (n_{ij}(t)), i, j = \overline{1,n}$ известная матрица-функция, причем $\det \int_0^T n(t) dt \neq 0$; U – заданное ограниченное замкнутое выпуклое множество.

В дальнейшем будем предполагать, что:

а) функции $F(t,s,z,p,q,u)$, $f(t,s,z,p,q,u)$ и их частные производные

$$F_z = \left(F_{z_1}, \ldots, F_{z_n}\right), F_p = \left(F_{p_1}, \ldots, F_{p_n}\right), F_q = \left(F_{q_1}, \ldots, F_{q_n}\right), F_u = \left(F_{u_1}, \ldots, F_{u_n}\right)$$

$$f_z = \frac{\partial f_i}{\partial z_j}, f_p = \frac{\partial f_i}{\partial p_j}, f_q = \frac{\partial f_i}{\partial q_j}, f_u = \frac{\partial f_i}{\partial u_k}, i, j = \overline{1,n}, k = \overline{1,r}$$

измеримые по (t,s) для всех $(z,p,q,u)\in R^{3n+r}$, непрерывные по совокупности $(z,p,q,u)\in R^{3n+r}$ почти при всех $(t,s)\in Q$;
б) функция $\Phi(z)$ обладает непрерывными частными производными $\Phi_z=\left(\Phi_{z_1},...,\Phi_{z_n}\right)$ при всех $z\in R^n$;
в) функция $\varphi(t,z)$ из (4) для почти всех $t\in[0,T]$ непрерывна по $z\in R^n$, измеримые по $t\in[0,T]$ при каждом фиксированном $z\in R^n$.

Сделаем следующие предположения относительно заданных функций:

I. $$\left|f(t,s,0,0,0,0)\right|\le M_0,\ \left|f_z(t,s,z,p,q,u)\right|\le M_1,$$
$$\left|f_p(t,s,z,p,q,u)\right|\le M_2,\ \left|f_q(t,s,z,p,q,u)\right|\le M_3.$$

II. $$\left|f_u(t,s,z,p,q,u)\right|\le M_4.$$

III. $$F(t,s,0,0,0,0)\in L_\infty(Q),\ \left|F_z(t,s,z,p,q,u)\right|\le K,$$
$$\left|F_p(t,s,z,p,q,u)\right|\le K,\ \left|F_q(t,s,z,p,q,u)\right|\le K,$$
$$\left|F_u(t,s,z,p,q,u)\right|\le K,\left|\Phi_z(z)\right|\le N.$$

IV. $\left|\varphi(t,0)\right|\le L$, где $M_i,\ i=\overline{1,4},\quad K,N,L$ – постоянные.

С помощью метода последовательных приближений можно доказать, что при

$$L(T-t_0)\left[1+\tilde{n}_1(T)\right]\left|\tilde{n}^{-1}(T)\right|<1 \tag{8}$$

начально-краевая задача (3)-(7) при каждом фиксированном допустимом управлении $u\in U$ имеет единственное решение, где

$$\tilde{n}(T)=\int_0^T n(t)dt,\tilde{n}^{-1}(T)=\left(\int_0^T n(t)dt\right)^{-1},n_1(T)=\max_{[0,T]}\left|\int_0^T n(\tau)d\tau\right|.$$

Можно доказать, что если выполняется условие I и (8), то справедливы следующие оценки:

$$\left|z(t,s)-z(\tau,r)\right|\le C_1\left(\left|t-\tau\right|^{1/2}+\left|s-r\right|^{1/2}\right),$$
$$\int_0^T\left|z_t(t,s)-z_t(t,r)\right|dt\le C_2\left|s-r\right|^{1/2},$$
$$\int_0^l\left|z_s(t,s)-z_s(\tau,s)\right|ds\le C_3\left|t-\tau\right|^{1/2}.$$

Если же в дополнение к условию, выполняются и условия II-IV, то

$$\left| \; J(u+\overline{u})-J(u) \; \right| \le C_4 \, \| \, \overline{u} \, \|_{L_2(Q)},$$

где C_i, $i=\overline{1,4}$ постоянные, которые не зависят от выбора $t,\tau \in [0,T]$, $s,r \in [0,l]$ и управлений u, $u \in \overline{u} \in U$.

Дискретизация поставленной задачи. Для приближенного решения задачи (1)-(7) введем на Q последовательность прямоугольных сеток $\left\{\left(t_i, s_j\right)_N\right\}$, $N=1,2,...,$ где $0=t_{0,N}<t_{1,N}<\ldots<t_{\alpha_{N,N}}=T$, $0=s_{0,N}<s_{1,N}<\ldots<s_{\beta_N,N}=l$ и точки $\left(t_{\tau_i}, s_{r_i}\right), i=\overline{1,k}$ входят в эту сетку (для краткости в обозначениях индекс N будем опускать), и обозначим

$$\alpha=\alpha_N\,,\beta=\beta_N\,,t_i=t_{i,N}\,,s_j=s_{j,N}\,,\Delta t_i=t_{i+1}-t_i\,,\Delta s_j=s_{j+1}-s_j\,,$$

$$T_i=\left[t_i,t_{i+1}\right),S_j=\left[s_j,s_{j+1}\right),Q_{ij}=T_i\times S_j,i=\overline{0,\alpha-1},\; j=\overline{0,\beta-1},$$

$$\delta_N s=\min_{j=1,\beta}\Delta s_j\,,\delta_N t=\min_{j=1,\alpha}\Delta t_i\,,\Delta_N s=\max_{j=1,\beta}\Delta s_j\,,\Delta_N t=\max_{i=1,p}\Delta t_i.$$

При обозначении сеточных функций (в целом) будем пользоваться квадратными скобками. Так для дискретных управлений $[u]$ – матрица с элементами $u_{ij}, i=\overline{0,\alpha-1},\; j=\overline{0,\beta-1}$.

Конечно-разностные отношения сеточных функций $[y]$ будем обозначать следующим образом

$$\left(z_{ij}\right)_t=\frac{z_{i+1,j}-z_{ij}}{\Delta t_i},\left(z_{ij}\right)_s=\frac{z_{i,j+1}-z_{ij}}{\Delta s_j},\left(z_{ij}\right)_{ts}=\frac{\left(z_{i,j+1}\right)_t-\left(z_{ij}\right)_t}{\Delta t_i \Delta s_j},$$

$$i=\overline{0,\alpha-1}, j=\overline{0,\beta-1}.$$

Для каждого натурального N рассмотрим задачу минимизации дискретного функционала

$$I_N([u])=\sum_{i=1}^{k}\Phi\left(z_{\tau_i,r_i}\right)+\sum_{i=0}^{\alpha-1}\sum_{j=0}^{\beta-1}\iint_{Q_{ij}}F\left(t,s,z_{ij},\left(z_{ij}\right)_t,\left(z_{ij}\right)_s,u_{ij}\right)dtds \qquad (9)$$

на решениях следующей разностной схемы

$$\left(z_{ij}\right)_{ts}=\frac{1}{\Delta t_i \Delta s_j}\iint_{Q_{ij}}f\left(t,s,z_{ij},\left(z_{ij}\right)_t,\left(z_{ij}\right)_s,u_{ij}\right)dtds,$$

$$i=\overline{0,\alpha-1}, j=\overline{0,\beta-1}\,, \qquad (10)$$

$$\left(z_{i,0}\right)_t=\frac{1}{\Delta t_i}\int_{T_i}\varphi\left(t,z_{i,0}\right)dt \quad ,i=\overline{0,\alpha-1}\;, \qquad (11)$$

$$\left(z_{0,j}\right)_s = \frac{1}{\Delta s_j} \int_{S_j} \psi(s) ds \ , \ j = \overline{0, \beta - 1}, \tag{12}$$

$$\sum_{i=0}^{\alpha-1} \int_{T_i} n(t) dt z_{i+1,0} = c \ . \tag{13}$$

Дискретные управления $[u]$ будем выбирать из множества

$$U_N = \left\{ [u] \in L_{2,N}^r \middle| \ u_{ij} \in U, i = \overline{0, \alpha - 1}, j = \overline{0, \beta - 1} \right\}, \tag{14}$$

где $L_{2,N}^r$ – пространство дискретных функций со скалярным произведением $\langle [u],[\vartheta] \rangle_{L_{2,N}^r} = \sum_{i=0}^{\alpha-1} \sum_{j=0}^{\beta-1} \langle u_{ij}, \vartheta_{ij} \rangle \Delta t_i \Delta s_j$.

Обозначим

$$I_{*N} = \inf_{[u] \in U_N} I_N([u]), N = 1,2,..., \tag{15}$$

V. Последовательность $\{(t_i, s_j)\}$, такова, что

$\lim_{N \to \infty} \alpha_N = \lim_{N \to \infty} \beta_n = +\infty$, $\alpha_N \Delta_N t \le (1 + \gamma_N) T$, $\beta_N \Delta_N s \le (1 + \mu_N) l$

и найдутся такие $c_1^0, c_2^0 > 0$, не зависимые от N , что

$$\Delta_N t \le c_1^0 \delta_N t, \Delta_N s \le c_2^0 \delta_N s ,$$

где $\gamma_N \ge 0, \mu_N \ge 0, \ \gamma_N \to 0, \mu_N \to 0$ при $N \to \infty$.

VI. Функции f, φ, ψ – равностепенно непрерывны в норме L_1, т.е.

$$\iint_Q \left| f(t+\tau, s+r, z(t,s), z_t(t,s), z_s(t,s), u(t,s)) - \right.$$
$$\left. - f(t,s,z(t,s), z_t(t,s), z_s(t,s), u(t,s)) \right| dt ds +$$
$$+ \int_0^T \left| \varphi(t+\tau, z(t,0)) - \varphi(t, z(t,0)) \right| dt +$$
$$+ \int_0^l \left| \psi(s+r) - \psi(s) \right| ds = O(\tau, r) \to 0,$$

при $(\tau, r) \to 0$ равномерно по управлениям $u \in U$.

Основным результатом работы является следующая теорема:

Теорема. Пусть выполняются выше перечисленные условия I-VI. Тогда последовательность разностных экстремальных задач (9)-

(14) будет аппроксимировать задачу оптимизации по функционалу исходной задачи минимизации (1)-(7) в следующем смысле

$$\lim_{N\to\infty} I_{*N} = J_* .$$

Список использованной литературы:

1. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. – Москва, 1972. – 735 с.
2. Галахов М. А., Усов П. П. Дифференциальные и интегральные уравнения математической теории трения. – М.: Наука, 1990. – 280 с.
3. Короткий А. И., Цепелев И. А. Динамическое решение обратной задачи в системе Гурса-Дарбу // Труду ИММ Ур. ОРАН. – 1995. – Т. 3. – С.88-103.
4. Нахушев А. М. Об одном приближенном методе решения краевых задач для дифференциальных уравнений и его приложения к динамике почвенной влаги и грунтовых вод // Дифференциальные уравнения. – 1982. – Т.18. – №1. – С.72-81.
5. Нахушев А. М. Уравнения математической биологии. – М.: Высшая школа, 1995. – 301 с.
6. Ибиев Ф. Т., Шарифов Я. А. Необходимое условие оптимальности в задачах оптимального управления системами Гурса с интегральными условиями // Вестник Бакинского Университета. Серия физико-математических наук. – 2004. – №3. – С.13-20.
7. Ширинов Т. В., Мехтиев М. Ф., Шарифов Я. А. Об условиях оптимальности в задаче оптимального управления для гиперболических систем с нелокальными условиями // Доклады НАН Азербайджана. – 2005. – №2. – С.22-29.

In work the problem of optimization of processes described by system Goursat-Darboux with integrated boundary conditions is considered. The difference scheme for a considered problem is constructed. Convergence on a functional of the constructed difference problem of optimization to an initial problem is proved.

Key words: *problems optimization, Goursat-Darboux system, nonlocal conditions, functional.*

Отримано: 02.04.2008