УДК 517.5

В. О. Гнатюк, канд. фіз.-мат. наук

Кам’янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, м. Кам’янець-Подільський

НАЙКРАЩА РІВНОМІРНА АПРОКСИМАЦІЯ КОМПАКТНОЗНАЧНОГО ВІДОБРАЖЕННЯ ЕЛЕМЕНТАМИ МНОЖИНИ ОДНОЗНАЧНИХ ВІДОБРАЖЕНЬ, ЯКІ Є СЕЛЕКТОРАМИ ОПУКЛОЗНАЧНОГО ВІДОБРАЖЕННЯ

У статті встановлено теореми характеризації екстремального елемента для задачі найкращої рівномірної апроксимації компактнозначного відображення елементами множини однозначних відображень, які є селекторами опуклозначного відображення.

Ключові слова: *компактнозначне відображення, найкраща рівномірна апроксимація, додаткові обмеження*

Вступ. У статті для задачі найкращої рівномірної апроксимації компактнозначного відображення елементами множини однозначних відображень, які є селекторами опуклозначного відображення, встановлено необхідні, достатні умови та критерії екстремального елемента. Отримані результати є узагальненням на випадок вищеназваної задачі відповідних результатів дослідження задачі найкращої рівномірної апроксимації неперервної на компакті функції елементами скінченновимірного підпростору, які задовольняють додатковому обмеженню (див., наприклад, [1—6]).

Постановка задачі. Нехай S — компакт, X — лінійний над полем дійсних чисел нормований простір, $C(S,X)$ — лінійний над полем дійсних чисел нормований простір однозначних відображень g компакту S в X, неперервних на S, з нормою $\|g\| = \max\limits_{s\in S}\|g(s)\|$, $K(X)$ — сукупність компактів простору X, $O(X)$ — сукупність опуклих замкнутих множин простору X, $C(S,K(X))$ — множина багатозначних відображень a компакту S в $K(X)$ таких, що для кожного $s \in S$ $a(s) = K_s \in K(X)$ і вони неперервні на S відносно метрики Хаусдорфа H на $K(X)$, $C(S,O(X))$ — множина багатозначних відображень b компакту S в $O(X)$ таких, що для кожного $s \in S$ $b(s) = O_s \in O(X)$ і вони неперервні на S відносно метрики Хаусдорфа на $O(X)$, $V \subset C(S,X)$, $b \in C(S,O(X))$, $D = \{g : g \in C(S,X),\ g(s) \in b(s),\ s \in S\}$ — множина селекторів відображення b.

Будемо припускати, що $V \bigcap D \neq \varnothing$.

Задачею найкращої рівномірної апроксимації відображення $a \in C(S, K(X))$ елементами множини $V \subset C(S, X)$, які є селекторами відображення $b \in C(S, O(X))$, будемо називати задачу відшукання величини

$$\alpha_a^*(V \bigcap D) = \inf_{g \in V \bigcap D} \max_{s \in S} \max_{y \in a(s)} \left\| g(s) - y \right\|. \quad (1)$$

Якщо існує елемент $g^* \in V \bigcap D$ такий, що $\alpha_a^*(V \bigcap D) = \max_{s \in S} \max_{y \in a(s)} \left\| g^*(s) - y \right\|$, то його будемо називати екстремальним елементом для величини (1).

Надалі будемо припускати, що обмеження $g \in V \bigcap D$ в задачі відшукання величини (1) є істотним, тобто $\alpha_a^* < \alpha_a^*(V \bigcap D)$, де $\alpha_a^* = \inf_{g \in C(S,X)} \max_{s \in S} \max_{y \in a(s)} \left\| g(s) - y \right\|$.

Будемо позначати далі через X^* простір, спряжений з X, через B^* — замкнуту одиничну кулю простору X^*: $B^* = \left\{ f : f \in X^*, \left\| f \right\| \leq 1 \right\}$, а через $E(B^*)$ — множину крайніх точок B^*. Згідно з теоремою Крейна-Мільмана (див., наприклад, [7, с. 497]) $E(B^*) \neq \varnothing$.

Крім того, для будь-якого елемента $z \in X$ множина $B_z^* = \left\{ f : f \in B^*, \ f(z) = \left\| z \right\| \right\}$ є непорожньою опуклою слабко * компактною підмножиною B^* та існує функціонал $f_z \in E(B^*)$ такий, що $f_z(z) = \left\| z \right\|$ (див., наприклад, твердження 3.1 [8, с. 1608]).

Через $\operatorname{int} M$ будемо позначати внутрішність, а через ∂M — межу множини M топологічного простору.

Для $a \in C(S, K(X))$ та $g^* \in V \bigcap D$ покладемо:

$$\alpha_a^{g^*} = \max_{s \in S} \max_{y \in a(s)} \left\| g^*(s) - y \right\|,$$

$$C_a^{g^*} = \left\{ g : g \in C(S, X), \ \max_{s \in S} \max_{y \in a(s)} \left\| g(s) - y \right\| < \alpha_a^{g^*} \right\},$$

$$S_a^{g^*} = \left\{ s : s \in S, \ \max_{y \in a(s)} \left\| g^*(s) - y \right\| = \alpha_a^{g^*} \right\},$$

$$a_s^{g^*} = \left\{ y : y \in a(s), \left\| g^*(s) - y \right\| = \max_{y \in a(s)} \left\| g^*(s) - y \right\| \right\}, s \in S_a^{g^*},$$

$$B_a^*\left(g^*, s, y\right) = \left\{ f :\ f \in B^*, f\left(g^*(s) - y\right) = \left\| g^*(s) - y \right\| \right\}, s \in S_a^{g^*}, y \in a_s^{g^*},$$

$$E\left(B_a^*\left(g^*, s, y\right)\right) = \left\{ f :\ f \in E\left(B^*\right), f\left(g^*(s) - y\right) = \left\| g^*(s) - y \right\| \right\}, s \in S_a^{g^*}, y \in a_s^{g^*},$$

$$F\left(g^*\right) = \left\{ s :\ s \in S, g^*(s) \in \partial b(s) \right\}.$$

Актуальність теми. Результати загального характеру, отримані при дослідженні задачі відшукання величини (1), становлять самостійний інтерес, а також слугуватимуть відправним пунктом для отримання відповідних результатів для конкретних задач, що вкладаються у схему її постановки, та для побудови чисельних методів відшукання величини (1) і її екстремального елемента.

Мета роботи. Отримати подання конуса внутрішніх напрямів множини селекторів неперервного опуклозначного відображення і застосувати його для встановлення необхідних, достатніх умов та критеріїв екстремального елемента для задачі відшукання величини (1).

Допоміжні твердження.

Лема 1. Множини D, $D_s = \left\{ g : g \in C(S, X),\ g(s) \in b(s) \right\}$, $s \in S$, є опуклими множинами простору $C(S, X)$.

Лема 2. Для будь-якого $s \in S$

$$\operatorname{int} D_s = \left\{ g : g \in C(S, X),\ g(s) \in \operatorname{int} b(s) \right\}.$$

Лема 3. Нехай $s_0 \in S$, $x_0 \in \operatorname{int} b(s_0)$. Тоді існують окіл $V(s_0)$ точки s_0 $\left(V(s_0) \subset S\right)$ та окіл $\mathrm{O}(x_0)$ точки x_0 $\left(\mathrm{O}(x_0) \subset X\right)$ такі, що $\mathrm{O}(x_0) \subset b(s)$ для всіх $s \in V(s_0)$.

Доведення. Оскільки $x_0 \in \operatorname{int} b(s_0)$, то існує окіл $\mathrm{O}(x_0, \varepsilon)$ точки x_0 радіуса ε такий, що

$$\mathrm{O}(x_0, \varepsilon) \subset b(s_0). \tag{2}$$

Внаслідок неперервності за Хаусдорфом відображення b існує окіл $V(s_0)$ точки s_0 $\left(V(s_0) \subset S\right)$ такий, що

$$H\left(b(s), b(s_0)\right) < \frac{\varepsilon}{3},\ s \in V(s_0). \tag{3}$$

Позначимо через $\mathrm{O}(x_0) = \mathrm{O}\left(x_0, \frac{\varepsilon}{3}\right)$ окіл точки x_0 радіуса $\frac{\varepsilon}{3}$ $\left(\mathrm{O}\left(x_0, \frac{\varepsilon}{3}\right) \subset X\right)$. Переконаємось, що $\mathrm{O}(x_0) \subset b(s)$ для всіх $s \in V(s_0)$.

Припустимо супротивне. Тоді існують $s' \in V(s_0)$, $x' \in \mathrm{O}(x_0)$ такі, що $x' \notin b(s')$. Оскільки $b(s')$ є опуклою замкнутою множиною простору X та $x' \notin b(s')$, то існує функціонал $f' \in X^*$, $\|f'\| = 1$, який строго розділяє x' та $b(s')$ (див., наприклад, [9, с. 210]), тобто

$$f'(x') > \sup_{x \in b(s')} f'(x). \tag{4}$$

Оскільки $\|f'\| = \sup\{f'(y):\ y \in X,\ \|y\| \le 1\} = 1$, то існує послідовність $\{y_k\}_{k=1}^{\infty}$, $y_k \in X$, $\|y_k\| \le 1$, $k = 1, 2, \ldots$, така, що

$$\lim_{k \to \infty} f'(y_k) = \|f'\| = 1. \tag{5}$$

Для всіх $k = 1, 2, \ldots$ маємо, що

$$\left\| x' + \frac{\varepsilon}{3} y_k - x_0 \right\| \le \|x' - x_0\| + \frac{\varepsilon}{3}\|y_k\| < \frac{2\varepsilon}{3},$$

оскільки $x' \in \mathrm{O}(x_0)$, а $\|y_k\| \le 1$, $k = 1, 2, \ldots$. Тому $x' + \frac{\varepsilon}{3} y_k \in \mathrm{O}(x_0, \varepsilon)$.

Оскільки має місце включення (2), то $x' + \frac{\varepsilon}{3} y_k \in b(s_0)$, $k = 1, 2, \ldots$.

З урахуванням цього, теореми 2.3.1 [10, с. 28], співвідношення (4) одержимо, що для всіх $k = 1, 2, \ldots$

$$H\left(b(s'), b(s_0)\right) \ge \sup_{y \in b(s_0)} \inf_{x \in b(s')} \|y - x\| \ge \inf_{x \in b(s')} \left\| x' + \frac{\varepsilon}{3} y_k - x \right\| =$$

$$= \max_{\substack{f \in X^*, \\ \|f\| \le 1}} \left(f\left(x' + \frac{\varepsilon}{3} y_k \right) - \sup_{x \in b(s')} f(x) \right) \ge$$

$$\ge f'(x') + \frac{\varepsilon}{3} f'(y_k) - \sup_{x \in b(s')} f'(x) > \frac{\varepsilon}{3} f'(y_k).$$

Оскільки має місце рівність (5), то звідси одержимо нерівність $H\left(b(s'), b(s_0)\right) \ge \frac{\varepsilon}{3}$, яка суперечить (3), оскільки $s' \in V(s_0)$. З одержаної суперечності випливає, що для всіх $s \in V(s_0)$ $\mathrm{O}(x_0) \in b(s)$.

Лему доведено.

Лема 4. Нехай $g \in C(S, X)$, $s_0 \in S$, $g(s_0) \in \operatorname{int} b(s_0)$. Тоді існує окіл $V(s_0)$ точки s_0 $(V(s_0) \subset S)$ такий, що $g(s) \in \operatorname{int} b(s)$ для всіх $s \in V(s_0)$.

Доведення. Внаслідок леми 3 існує окіл $V_1(s_0)$ точки s_0 та окіл $\mathrm{O}(g(s_0), \varepsilon)$ точки $g(s_0)$ радіуса ε такі, що $\mathrm{O}(g(s_0), \varepsilon) \subset b(s)$ для всіх $s \in V_1(s_0)$, тобто

$$\{x : x \in X, \|x - g(s_0)\| < \varepsilon\} \subset b(s), \quad s \in V_1(s_0). \tag{6}$$

Розглянемо функцію $\Psi(s) = \|g(s) - g(s_0)\|, s \in S$. Оскільки $\Psi(s_0) = 0 < \varepsilon$ і Ψ є неперервною на S, то існує окіл $V_2(s_0)$ $(V_2(s_0) \subset S)$ точки s_0 такий, що

$$\|g(s) - g(s_0)\| < \varepsilon, s \in V_2(s_0). \tag{7}$$

Нехай $V(s_0) = V_1(s_0) \cap V_2(s_0)$. З (6), (7) випливає, що $g(s) \in \operatorname{int} b(s)$ для всіх $s \in V(s_0)$.

Лему доведено.

Лема 5. Нехай $g_0 \in C(S, X)$. Для того щоб $g_0 \in \operatorname{int} D$, необхідно і достатньо, щоб $g_0(s) \in \operatorname{int} b(s)$, $s \in S$.

Лема 6. Якщо $f \in X^*, f \neq 0, c \in R, A \subset X$, $x_0 \in \operatorname{int} A$ і $f(x) \leq c$ для всіх $x \in A$, то $f(x_0) < c$.

Надалі через $\Gamma(M, x_0)(\Gamma^*(M, x_0))$ будемо позначати конус внутрішніх (граничних) напрямків для множини M лінійного нормованого простору з точки x_0 цього простору (див., наприклад, [6, с. 12, 13]).

Лема 7. Якщо M є опуклою множиною простору X, $\operatorname{int} M \neq \varnothing$, $x_0 \in \partial M$, то

$$\Gamma(M, x_0) = \{x : x \in X,\ f(x) < 0,\ f \in N(M, x_0)\}, \tag{8}$$

де $N(M, x_0)$ — множина опорних функціоналів множини M в точці x_0.

Доведення. Нехай $x \in \Gamma(M, x_0)$, $f \in N(M, x_0)$. Тоді

$$f(z) \leq f(x_0),\ z \in M.$$

Згідно з теоремою 1.3.4 [6, с. 19] існує $\lambda > 0$ таке, що $x_0 + \lambda x \in \operatorname{int} M$.

Відповідно до леми 6 тоді

$$f\left(x_0+\lambda x\right)<f\left(x_0\right).$$

Звідки випливає, що $f\left(x\right)<0$. Тому

$$\Gamma\left(M,x_0\right)\subset\left\{x: x\in X,\ f\left(x\right)<0,\ f\in N\left(M,x_0\right)\right\}. \qquad (9)$$

Нехай тепер

$$x\in\left\{x: x\in X,\ f\left(x\right)<0,\ f\in N\left(M,x_0\right)\right\}. \qquad (10)$$

Переконаємось, що $x\in\Gamma\left(M,x_0\right)$. Припустимо супротивне. Внаслідок теореми 1.3.4 [6, с. 19] тоді $x_0+\lambda x\notin \operatorname{int} M$ для всіх $\lambda\geq 0$. Оскільки $A_{x_0}=\left\{u: u=x_0+\lambda x,\ \lambda\geq 0\right\}$ є опуклою множиною простору X, а M є опуклою множиною цього простору, для якої $\operatorname{int} M\neq\varnothing$, та $\operatorname{int} M\bigcap A_{x_0}=\varnothing$, то відповідно до теореми віддільності (див., наприклад, [9, с. 209]) існує функціонал $f_{x_0}\in X^*$, $f_{x_0}\neq 0$, та число c такі, що

$$f_{x_0}\left(x\right)\leq c \text{ для всіх } x\in M, \qquad (11)$$

$$f_{x_0}\left(u\right)\geq c \text{ для всіх } u\in A_{x_0}. \qquad (12)$$

Оскільки $x_0\in\partial M\bigcap A_{x_0}$, то $f_{x_0}\left(x_0\right)=c$. З урахуванням цього та (11), (12) матимемо, що

$$f_{x_0}\left(x\right)\leq f_{x_0}\left(x_0\right),\ x\in M,\ f_{x_0}\left(x_0\right)+\lambda f_{x_0}\left(x\right)\geq f_{x_0}\left(x_0\right),\ \lambda\geq 0.$$

Тому $f_{x_0}\in N\left(M,x_0\right)$ і $f_{x_0}\left(x\right)\geq 0$, що суперечить (10). Одержана суперечність і доводить, що $x\in\Gamma\left(M,x_0\right)$. Оскільки x вибрано з множини $\left\{x: x\in X,\ f\left(x\right)<0,\ f\in N\left(M,x_0\right)\right\}$ довільним чином, то

$$\left\{x: x\in X,\ f\left(x\right)<0,\ f\in N\left(M,x_0\right)\right\}\subset\Gamma\left(M,x_0\right),$$

що разом з включенням (9) дозволяє зробити висновок щодо справедливості рівності (8).

Лему доведено.

Лема 8. Нехай $g^*\in C\left(S,X\right)$, $g^*\left(s\right)\in b\left(s\right)$, $s\in S$, і $F\left(g^*\right)=\left\{s:\ s\in S, g^*\left(s\right)\in\partial b\left(s\right)\right\}$. Множина $F\left(g^*\right)$ є замкнутою підмножиною S.

Доведення. Нехай $s_0\in S\setminus F\left(g^*\right)$. Тоді $g^*\left(s_0\right)\notin\partial b\left(s_0\right)$. Звідси випливає, що $g^*\left(s_0\right)\in\operatorname{int} b\left(s_0\right)$. Відповідно до леми 4 існує окіл $V\left(s_0\right)$ точки s_0 компакту S такий, що $g^*\left(s\right)\in\operatorname{int} b\left(s\right)$ для всіх $s\in V\left(s_0\right)$.

Тому $V\left(s_0\right)\subset S\setminus F\left(g^*\right)$. Звідси випливає, що $S\setminus F\left(g^*\right)$ є відкритою множиною компакту S. Тому $F\left(g^*\right)$ є замкненою множиною S.

Лему доведено.

Основні результати.

Теорема 1. Нехай $g^*\in D$, $F\left(g^*\right)=\left\{s : s\in S,\ g^*\left(s\right)\in\partial b\left(s\right)\right\}$.

Має місце рівність

$$\Gamma\left(D,g^*\right)=\left\{g : g\in C\left(S,X\right),\ f\left(g\left(s\right)\right)<0,\ s\in F\left(g^*\right),\ f\in N\left(b\left(s\right),g^*\left(s\right)\right)\right\}.$$

Доведення. Маємо, що $D=\left\{g : g\in C\left(S,X\right),\ g\left(s\right)\in b\left(s\right), s\in S\right\}$.

Позначимо, як і вище, для $s\in S$ $D_s=\left\{g : g\in C\left(S,X\right),\ g\left(s\right)\in b\left(s\right)\right\}$.

Зрозуміло, що $D=\bigcap\limits_{s\in S}D_s$. Тому, внаслідок твердження 1.2.2 [6, с. 14],

$$\Gamma\left(D,g^*\right)\subset\bigcap_{s\in S}\Gamma\left(D_s,g^*\right)\subset\bigcap_{s\in F\left(g^*\right)}\Gamma\left(D_s,g^*\right). \qquad (13\ )$$

Нехай $s\in S\setminus F\left(g^*\right)$. Тоді $g^*\left(s\right)\in\operatorname{int}b\left(s\right)$.

Згідно з лемою 2 $g^*\in\operatorname{int}D_s$. Тому $\Gamma\left(D_s,g^*\right)=C\left(S,X\right)$ (див., наприклад, [6, с. 14]).

Тоді

$$\bigcap_{s\in S}\Gamma\left(D_s,g^*\right)=\bigcap_{s\in F\left(g^*\right)}\Gamma\left(D_s,g^*\right).$$

Звідси та із співвідношення (13) випливає, що

$$\Gamma\left(D,g^*\right)\subset\bigcap_{s\in S}\Gamma\left(D_s,g^*\right)=\bigcap_{s\in F\left(g^*\right)}\Gamma\left(D_s,g^*\right). \qquad (14)$$

Нехай $g\in\bigcap\limits_{s\in S}\Gamma\left(D_s,g^*\right)$. Тоді для будь-якого $s\in S$ знайдеться таке число $\lambda_s>0$, що $g^*+\lambda_s g\in\operatorname{int}D_s$ (див., наприклад, [6, с. 19]).

Згідно з лемою 2

$$g^*\left(s\right)+\lambda_s g\left(s\right)\in\operatorname{int}b\left(s\right).$$

З урахуванням леми 4 звідси робимо висновок, що існує окіл $V\left(s\right)$ точки s компакту S такий, що $g^*\left(s'\right)+\lambda_s g\left(s'\right)\in\operatorname{int}b\left(s'\right)$ для всіх $s' \in V(s)$. Оскільки $g^*(s') \in b(s')$, $s' \in S$, $g^*(s') + \lambda_s g(s') \in \operatorname{int} b(s')$, $s' \in V(s)$, то

$$\alpha\left(g^*(s') + \lambda_s g(s')\right) + (1-\alpha) g^*(s') = g^*(s') + \alpha\lambda_s g(s') \in \operatorname{int} b(s')$$

для всіх $\alpha \in (0,1]$ (див., наприклад, [6, с.18]).

Звідси випливає, що

$$g^*(s') + \lambda g(s') \in \operatorname{int} b(s'),\ \lambda \in (0, \lambda_s],\ s' \in V(s).$$

Оскільки S — компакт і $\bigcap\limits_{s \in S} V(s) = S$, то існують точки $s_1, ..., s_k$ із S такі, що $\bigcup\limits_{i=1}^{k} V(s_i) = S$. Покладемо $\overline{\lambda} = \min\limits_{1 \le i \le k} \lambda_{s_i}$.

Тоді для будь-якого $s \in S$ існує таке $i_s \in \{1, 2, ..., k\}$, що $s \in V(s_{i_s})$. Тому $g^*(s) + \overline{\lambda} g(s) \in \operatorname{int} b(s)$, оскільки співвідношення $g^*(s) + \lambda g(s) \in \operatorname{int} b(s_{i_s})$ має місце для всіх $s \in V(s_{i_s})$, $\lambda \in (0, \lambda_{i_s}]$ та $\overline{\lambda} \in (0, \lambda_{i_s}]$.

Згідно з лемою 5 $g^* + \overline{\lambda} g \in \operatorname{int} D$. Внаслідок опуклості множини D (див. лему 1) та теореми 1.3.4 [6, с. 19] робимо висновок, що $g \in \Gamma(D, g^*)$. Отже, для будь-якого $g \in \bigcap\limits_{s \in F(g^*)} \Gamma(D_s, g^*)$ маємо, що $g \in \Gamma(D, g^*)$.

Тому $\bigcap\limits_{s \in F(g^*)} \Gamma(D_s, g^*) \subset \Gamma(D, g^*)$. З урахуванням співвідношення (14) звідси робимо висновок, що

$$\Gamma(D, g^*) = \bigcap_{s \in S} \Gamma(D_s, g^*) = \bigcap_{s \in F(g^*)} \Gamma(D_s, g^*). \qquad (15)$$

Переконаємось, що

$$\bigcap_{s \in F(g^*)} \Gamma(D_s, g^*) =$$

$$= \left\{ g : g \in C(S, X),\ \exists \lambda > 0,\ g^*(s) + \lambda g(s) \in \operatorname{int} b(s),\ s \in F(g^*) \right\}. \qquad (16)$$

Нехай $g \in \bigcap\limits_{s \in F(g^*)} \Gamma(D_s, g^*)$. Тоді $g \in \bigcap\limits_{s \in S} \Gamma(D_s, g^*)$.

Вище було встановлено, що існує $\overline{\lambda} > 0$ таке, що $g^*(s) + \overline{\lambda} g(s) \in \operatorname{int} b(s)$ для всіх $s \in S$. Тому

$$\bigcap_{s \in F(g^*)} \Gamma\left(D_s, g^*\right) \subset$$

$$\subset \left\{ g : g \in C(S, X),\ \exists \lambda > 0,\ g^*(s) + \lambda g(s) \in \operatorname{int} b(s),\ s \in F\left(g^*\right) \right\}. \quad (17)$$

Навпаки, нехай

$$g \in \left\{ g : g \in C(S, X),\ \exists \lambda > 0,\ g^*(s) + \lambda g(s) \in \operatorname{int} b(s),\ s \in F\left(g^*\right) \right\}.$$

Згідно з лемою 2 $g^* + \lambda g \in \operatorname{int} D_s$ для всіх $s \in F\left(g^*\right)$. Оскільки $D_s, s \in F\left(g^*\right)$, є опуклою множиною (див. лему 1), то $g \in \Gamma\left(D_s, g^*\right)$ для всіх $s \in F\left(g^*\right)$ (див., наприклад, теорему 1.3.4. [6, с. 19]). Тому $g \in \bigcap_{s \in F(g^*)} \Gamma\left(D_s, g^*\right)$. Звідси випливає, що

$$\left\{ g : g \in C(S, X),\ \exists \lambda > 0,\ g^*(s) + \lambda g(s) \in \operatorname{int} b(s),\ s \in F\left(g^*\right) \right\} \subset$$

$$\subset \bigcap_{s \in F(g^*)} \Gamma\left(D_s, g^*\right). \quad (18)$$

З (17), (18) робимо висновок, що має місце рівність (16). З рівностей (15) та (16) випливає справедливість рівності

$$\Gamma\left(D, g^*\right) =$$

$$= \left\{ g : g \in C(S, X),\ \exists \lambda > 0,\ g^*(s) + \lambda g(s) \in \operatorname{int} b(s),\ s \in F\left(g^*\right) \right\}. \quad (19)$$

Нехай тепер $g \in \Gamma\left(D, g^*\right)$, $s \in F\left(g^*\right)$, $f \in N\left(b(s), g^*(s)\right)$.

Тоді $f(x) \le f\left(g^*(s)\right)$ для всіх $x \in b(s)$. Оскільки $g \in \Gamma\left(D, g^*\right)$, то внаслідок (19) існує $\lambda > 0$ таке, що

$$g^*(s) + \lambda g(s) \in \operatorname{int} b(s),\ s \in F\left(g^*\right).$$

Звідси (див. лему 6) $f\left(g^*(s) + \lambda g(s)\right) < f\left(g^*(s)\right)$.

Тому $f\left(g(s)\right) < 0$.

Отже,

$$\Gamma\left(D, g^*\right) \subset$$

$$\subset \left\{ g : g \in C(S, X),\ f\left(g(s)\right) < 0, s \in F\left(g^*\right), f \in N\left(b(s), g^*(s)\right) \right\}. \quad (20)$$

Нехай тепер

$$g \in \left\{ g : g \in C(S,X),\ f\left(g(s)\right) < 0,\ s \in F\left(g^*\right),\ f \in N\left(b(s), g^*(s)\right) \right\}.$$

Переконаємось, що $g \in \Gamma\left(D, g^*\right)$.

Згідно з лемою 7 $g(s) \in \Gamma\left(b(s), g^*(s)\right), s \in F\left(g^*\right)$.

Тоді для кожного $s \in F\left(g^*\right)$ існує $\lambda_s > 0$ таке, що $g^*(s) + \lambda_s g(s) \in \operatorname{int} b(s)$.

Згідно з лемою 4 існує окіл $V(s)$ точки s в S такий, що $g^*(s') + \lambda_s g(s') \in \operatorname{int} b(s')$ для всіх $s' \in V(s)$.

Оскільки $g^*(s') \in b(s')$, $g^*(s') + \lambda_s g(s') \in \operatorname{int} b(s')$, $s' \in V(s)$, то внаслідок опуклості множин $b(s)$, $s \in S$,

$$\alpha\left(g^*(s') + \lambda_s g(s')\right) + (1-\alpha) g^*(s') = g^*(s') + \alpha\lambda_s g(s') \in \operatorname{int} b(s')$$

для всіх $\alpha \in (0,1]$, $s' \in V(s)$ (див., наприклад, [6, с. 18]).

Звідси випливає, що

$$g^*(s') + \lambda g(s') \in \operatorname{int} b(s'),\ s' \in V(s),\ \lambda \in (0, \lambda_s]. \tag{21}$$

Оскільки $F\left(g^*\right)$ є компактом (див. лему 8) і $\bigcup_{s \in F\left(g^*\right)} V(s) \supset F\left(g^*\right)$, то існують точки $s_1, s_2, ..., s_p$ із $F\left(g^*\right)$, для яких $\bigcup_{i=1}^{p} V(s_i) \supset F\left(g^*\right)$. Покладемо $\overline{\lambda} = \min_{1 \le i \le p} \lambda_{s_i}$. Тоді згідно з (21)

$$g^*(s') + \overline{\lambda} g(s') \in \operatorname{int} b(s'),\ s' \in V(s_i),\ i = 1, 2, ..., p. \tag{22}$$

Нехай тепер $s \in F\left(g^*\right)$. Оскільки $F\left(g^*\right) \subset \bigcup_{i=1}^{p} V(s_i)$, то існує $i_s \in \{1, ..., p\}$, що $s \in V\left(s_{i_s}\right)$.

Тоді згідно з (22) $g^*(s) + \overline{\lambda} g(s) \in \operatorname{int} b(s)$.

Оскільки $s \in F\left(g^*\right)$ вибрано з $F\left(g^*\right)$ довільно, то $g^*(s) + \overline{\lambda} g(s) \in \operatorname{int} b(s)$ для всіх $s \in F\left(g^*\right)$.

Звідси та рівності (19) випливає, що

$$\left\{g : g \in C(S,X),\ f\left(g(s)\right) < 0,\ s \in F\left(g^*\right),\ f \in N\left(b(s), g^*(s)\right)\right\} \subset$$
$$\subset \Gamma\left(D, g^*\right),$$

що разом з (20) дозволяє зробити висновок про справедливість рівності, про яку мова йде в теоремі.

Теорему доведено.

Теорема 2. Для того щоб елемент $g^* \in V \bigcap D$ був екстремальним елементом для величини (1), необхідно, щоб не існувало такого елемента $z \in \Gamma^*\left(V, g^*\right)$, що для всіх $s \in S_a^{g^*}$, $y \in a_s^{g^*}$, $f \in B_a^*\left(g^*, s, y\right)$ $\left(f \in E\left(B_a^*\left(g^*, s, y\right)\right)\right)$ $f\left(z(s)\right) < 0$, а для всіх $s' \in F\left(g^*\right)$, $f' \in N\left(b(s'), g^*(s')\right)$ справджується нерівність $f\left(z(s)\right) < 0$.

Доведення. Нехай g^* — екстремальний елемент для величини (1). Згідно з теоремою 1.4.1 [6, с. 22] має місце співвідношення

$$\Gamma\left(C_a^{g^*}, g^*\right) \bigcap \Gamma\left(D, g^*\right) \bigcap \Gamma^*\left(V, g^*\right) = \varnothing .$$

Звідси, враховуючи теорему 1, теорему 8 [7, с. 1611], робимо висновок, що не існує $z \in \Gamma^*\left(V, g^*\right)$, що для всіх $s \in S_a^{g^*}$, $y \in a_s^{g^*}$, $f \in B_a^*\left(g^*, s, y\right)$ $\left(f \in E\left(B_a^*\left(g^*, s, y\right)\right)\right)$ справджується нерівність $f\left(z(s)\right) < 0$, а для всіх $s' \in F\left(g^*\right)$, $f' \in N\left(g^*(s'), b(s')\right)$ справджується нерівність $f'\left(z(s)\right) < 0$. У протилежному випадку отримали б, що $\Gamma\left(C_a^{g^*}, g^*\right) \bigcap \Gamma\left(D, g^*\right) \bigcap \Gamma^*\left(V, g^*\right) \neq \varnothing$.

Теорему доведено.

Теорема 3. Якщо $g^* \in V \bigcap D$ є екстремальним елементом для величини (1), то для будь-якого $z \in \Gamma^*\left(V, g^*\right)$ існують елементи $s_z \in S,\ y_z \in a\left(s_z\right)$, $f_z \in B^*$ $\left(f_z \in E\left(B^*\right)\right)$ такі, що

$$f_z\left(g^*(s_z) - y_z\right) = \max_{s \in S} \max_{y \in a(s)} \left\|g^*(s) - y\right\|,\ f_z\left(z(s_z)\right) \geq 0 ,$$

або існують елементи $s_z^{/} \in S,$ $f_z^{/} \in N\left(b\left(s_z^{/}\right), g^*\left(s_z^{/}\right)\right)$ такі, що

$$g^*\left(s_z^{/}\right) \in \partial b\left(s_z^{/}\right),\ f_z^{/}\left(z\left(s_z^{/}\right)\right) \geq 0\,.$$

Надалі будемо користуватись поняттями Γ^* — множина (див., наприклад, [8, с. 1616]) та Γ — множини (див., наприклад, [11, с. 20]) .

Теорема 4. Нехай $g^* \in V \bigcap D$ і V є Γ^* — множиною відносно g^*. Якщо g^* є екстремальним елементом для величини (1), то для будь-якого $g \in V$ існують елементи $s_g \in S$, $y_g \in a\left(s_g\right)$, $f_g \in B^*$ $\left(f_g \in E\left(B^*\right)\right)$ такі, що

$$f_g\left(g^*\left(s_g\right) - y_g\right) = \max_{s \in S} \max_{y \in a(s)} \left\| g^*(s) - y \right\|,\ f_g\left(g\left(s_g\right) - g^*\left(s_g\right)\right) \geq 0\,, \quad (23)$$

або існують елементи $s_g^{/} \in S$, $f_g^{/} \in N\left(b\left(s_g^{/}\right), g^*\left(s_g^{/}\right)\right)$ такі, що

$$g^*\left(s_g^{/}\right) \in \partial b\left(s_g^{/}\right),\ f_g^{/}\left(g\left(s_g^{/}\right) - g^*\left(s_g^{/}\right)\right) \geq 0\,. \quad (24)$$

Теорема 5. Нехай V є Γ — множиною відносно кожного свого елемента, зокрема опуклою множиною, існує елемент $g_0 \in V$, для якого $g_0\left(s\right) \in Intb\left(s\right)$ для всіх $s \in S$. Для того щоб елемент $g^* \in V \bigcap D$ був екстремальним елементом для величини (1) в цьому випадку, необхідно і достатньо, щоб для кожного $g \in V$ існували елементи $s_g \in S$, $y_g \in a\left(s_g\right)$, $f_g \in B^*$ $\left(f_g \in E\left(B^*\right)\right)$, для яких виконуються умови (23), або існували елементи $s_g^{/} \in S$, $f_g^{/} \in N\left(g^*\left(s_g^{/}\right), b\left(s_g^{/}\right)\right)$, для яких виконуються умови (24).

Доведення. Необхідність випливає з теореми 4.

Достатність. Припустимо, що g^* не є екстремальним елементом для величини (1). Тоді знайдеться такий елемент $\overline{g} \in V \bigcap D$, що

$$\max_{s \in S} \max_{y \in a(s)} \left\| \overline{g}(s) - y \right\| < \max_{s \in S} \max_{y \in a(s)} \left\| g^*(s) - y \right\|.$$

Це означає, що $\overline{g} \in C_a^{g^*}$. Оскільки $C_a^{g^*}$ є відкритою множиною простору $C\left(S, X\right)$, то існує окіл $\mathrm{O}\left(\overline{g}\right)$ точки $\overline{g}$ в просторі $C\left(S, X\right)$, який включається в $C_a^{g^*}$. Згідно з лемою 5 $g_0 \in \operatorname{int} D$. Оскільки D є опуклою множиною, то елементи $g_\alpha = \overline{g} + \alpha\left(g_0 - \overline{g}\right) \in IntD$ для всіх $\alpha \in (0,1]$ (див., наприклад, [6, с. 18]).

З урахуванням того, що V є Γ — множиною відносно $\overline{g}$, існує таке $\alpha \in (0,1]$, що для $g = g_\alpha$ будемо мати

$$g \in V\,,\ g \in IntD\,,\ g \in \mathrm{O}\left(\overline{g}\right) \subset C_a^{g^*}\,.$$

Оскільки $C_a^{g^*}$ та D є опуклими множинами, то $g - g^* \in$ $\in \Gamma\left(C_a^{g^*}, g^*\right) \bigcap \Gamma\left(D, g^*\right)$ (див., наприклад, [6, с. 19]).

Згідно з теоремою 1 та теоремою 3.1 [8, с. 1611] (теоремою 3.2 [8, с. 1613]) тоді для всіх $s_g \in S$, $y_g \in a\left(s_g\right)$, $f_g \in B^*$ $\left(f_g \in E\left(B^*\right)\right)$, для яких виконується рівність (23) має місце нерівність $f_g\left(g\left(s_g\right) - g^*\left(s_g\right)\right) < 0$, а для всіх $s_g^/ \in S$, $f_g^/ \in N\left(b\left(s_g^/\right), g^*\left(s_g^/\right)\right)$, для яких виконуються включення (24), справедлива нерівність $f_g\left(g\left(s_g\right) - g^*\left(s_g\right)\right) < 0$, що суперечить умовам теореми. Тому g^* є екстремальним елементом для величини (1).

Теорему доведено.

Наслідок. Нехай V — підпростір простору $C\left(S, X\right)$, існує елемент $g_0 \in V$, для якого $g_0\left(s\right) \in Intb\left(s\right)$ для всіх $s \in S$. Для того щоб елемент $g^* \in V \bigcap D$ був екстремальним елементом для величини (1), необхідно і достатньо, щоб для кожного $g \in V$ існували елементи $s_g \in S$, $y_g \in a\left(s_g\right)$, $f_g \in B^*$ $\left(f_g \in E\left(B^*\right)\right)$ такі, що

$$f_g\left(g^*\left(s_g\right) - y_g\right) = \max_{s \in S}\ \max_{y \in a(s)} \left\|g^*\left(s\right) - y\right\|,\ f_g\left(g\left(s_g\right)\right) \geq 0,$$

або існували елементи $s_g^/ \in S$, $f_g^/ \in N\left(b\left(s_g^/\right), g^*\left(s_g^/\right)\right)$ такі, що

$$g^*\left(s_g^/\right) \in \partial b\left(s_g^/\right),\ f_g^/\left(g\left(s_g^/\right)\right) \geq 0\,.$$

Висновки. Для задачі найкращої рівномірної апроксимації компактнозначного відображення елементами множини однозначних відображень, які є селекторами опуклозначного відображення встановлено необхідні, достатні умови та критерії екстремального елемента.

Список використаних джерел:

1. Taylor G. D. Approximation by polynomials having restricted ranges / G. D. Taylor. — I. SIAM J. Numer. Anal. — 1968. — Vol. 5. — P. 258—268.
2. Taylor G. D. On approximation by functions having restricted ranges / G. D. Taylor. — J. Math. Anal. Appl. — 1969. — Vol. 27. — P. 241—248.
3. Shi Y. G. The limits of a Chebyshev-type theory of restricted range approximation / Y. G. Shi. — J. Approxim. Theory. — 1988. — Vol. 53, № 1 — P. 41—53.
4. Smirnov G. S. Best uniform restricted ranges approximation of complex-valued functions / G. S. Smirnov, R. G. Smirnov. — C.R. Math. Rep. Acad. Sci. Canada. — 1997. — 19, № 2. — P. 58—63.
5. Smirnov G. S. Best uniform approximation of complex-valued functions by generalized polynomials having restricted ranges / G. S. Smirnov, R. G. Smirnov. — J. Approxim. Theory. — 1999. — 100, № 2. — P. 284—303.
6. Лоран П.-Ж. Аппроксимация и оптимизация. / П.-Ж. Лоран. — М. : Мир, 1975. — 496 с.
7. Иосида К. Функциональный анализ / К. Иосида. — М. : Мир, 1967. — 624 с.
8. Гудима У. В. Найкраща рівномірна апроксимація неперервного компактнозначного відображення множинами неперервних однозначних відображень / У. В. Гудима. — Укр. мат. журн. — 2005. — 57, № 12. — С. 1601—1619.
9. Колмогоров А. Н. Элементы теории функций и функционального анализа / А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин. — М. : Наука, 1989. — 623 с.
10. Корнейчук Н. П. Экстремальные задачи теории приближения / Н. П. Корнійчук. — М. : Наука, 1976. — 320 с.
11. Гнатюк Ю. В. Критерії екстремального елемента та його єдиності для задачі найкращої рівномірної апроксимації неперервного компактнозначного відображення множинами однозначних відображень / Ю. В. Гнатюк, У. В. Гудима. — Доп. НАН України, 2005 — № 6 — С. 19—23.

In the article there established the theorems of characterization of the extremal element for the problem of the best uniform approximation continuous compact-valued maps by single-valued maps, which there is selectors closing convex-valued map.

Key words: *the compact-valued maps, best uniform approximation, additional restriction.*

Отримано: 28.09.2009