УДК 517.5

У. В. Гудима, канд. фіз.-мат. наук

Кам’янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, м. Кам’янець-Подільський

МОДИФІКАЦІЯ МЕТОДУ СІЧНИХ ПЛОЩИН НА ВИПАДОК АПРОКСИМАЦІЇ КОМПАКТНОЗНАЧНОГО ВІДОБРАЖЕННЯ СКІНЧЕННОВИМІРНИМ ПІДПРОСТОРОМ З ДОДАТКОВИМ ОБМЕЖЕННЯМ, ЩО ЗАДАЄТЬСЯ СИСТЕМОЮ ЗАМКНУТИХ КУЛЬ

У статті узагальнено метод січних площин розв’язування задачі опуклого програмування на випадок задачі найкращої рівномірної апроксимації компактнозначного відображення скінченновимірним підпростором з додатковим обмеженням, що задається системою замкнутих куль.

Ключові слова: *компактнозначне відображення, найкраща рівномірна апроксимація, метод січних площин.*

Вступ. У роботі для розв’язування задачі найкращої рівномірної апроксимації неперервного компакнозначного відображення елементами скінченновимірного підпростору однозначних неперервних відображень, які задовольняють додатковому обмеженню, що задається системою замкнутих куль, які змінюються неперервно, модифіковано метод січної площини розв’язування задачі опуклого програмування, запропонований у праці [1], а також доведено його збіжність. Побудований метод узагальнює також на випадок вищезгаданої задачі метод розв’язування задачі найкращої рівномірної апроксимації неперервного компатнозначного відображення чебишовським підпростором з додатковим обмеженням, розглянутий у праці [2].

Постановка задачі. Нехай S — метричний компакт, X — лінійний над полем комплексних чисел нормований простір, $C(S,X)$ — лінійний над полем дійсних чисел нормований простір однозначних відображень компакту S в X, неперервних на S, з нормою $\|g\| = \max\limits_{s\in S}\|g(s)\|$, $K(X)$ — сукупність компактів простору X, $C(S,K(X))$ — множина багатозначних відображень a компакту S в X таких, що для кожного s $a(s)\in K(X)$ і вони неперервні на S відносно метрики Хаусдорфа на $K(X)$, V — лінійний підпростір простору $C(S,X)$, породжений лінійно незалежними відображеннями $g_i \in C(S,X)$, $i=\overline{1,n}$, $u \in C(S,X)$, $r \in C(S,R)$, $r(s)>0$, $b(s)=\{x : x \in X, \|x-u(s)\| \le r(s)\}$, $s \in S$, $D=\{g : g \in C(S,X),$ $g(s) \in b(s),\ s \in S\}$.

Будемо припускати, що $V \cap D \ne \varnothing$.

Задачею найкращої рівномірної апроксимації відображення $a \in C(S, K(X))$ скінченновимірним підпростором $V \subset C(S,X)$ з додатковим обмеженням, що задається системою замкнутих куль $b(s)$, $s \in S$, які неперервно змінюються, будемо називати задачу відшукання величини

$$\alpha_a^*(V \cap D) = \inf_{g \in V \cap D} \max_{s \in S} \max_{y \in a(s)} \|g(s)-y\|. \qquad (1)$$

Згідно з теоремою 2.1 [3, с. 1605] існує елемент $g^* \in V \cap D$ такий, що

$$\alpha_a^*(V \cap D) = \max_{s \in S} \max_{y \in a(s)} \|g^*(s)-y\|.$$

Цей елемент будемо називати екстремальним елементом для величини (1).

Актуальність теми. Практичне використання величини (1) та її екстремального елемента вимагає чисельних методів їх відшукання.

Мета роботи. Узагальнити метод січних площин розв’язування задачі опуклого програмування на випадок задачі відшукання величини (1) та її екстремального елемента.

Допоміжні твердження.

Позначимо через X^* простір, спряжений з X, через B^* — замкнуту одиничну кулю простору X^*: $B^*=\{f : f \in X^*,\ \|f\| \le 1\}$. Як відомо (див., наприклад, [4, с. 156]), для будь-якого елемента $z \in X$ існує елемент $f \in B^*$ такий, що $f(z)=\|z\|$. Звідси випливає, що для всіх $z \in X$

$$\|z\| = \max_{f \in B^*} \operatorname{Re} f(z). \qquad (2)$$

Поряд із задачею відшукання величини (1) будемо розглядати таку задачу лінійного програмування з нескінченною кількістю обмежень:

$$\inf \theta \qquad (3)$$

при обмеженнях

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \operatorname{Re} f(g_i(s)) - \theta \le \operatorname{Re} f(y), s \in S, y \in a(s), f \in B^*, \qquad (4)$$

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i \operatorname{Re}\varphi\big(g_i(t)\big) \le \operatorname{Re}\varphi\big(u(t)\big) + r(t), t \in S, \varphi \in B^*. \tag{5}$$

Має місце таке твердження.

Лема 1. Задача (3)—(5) має оптимальний розв'язок. Справедлива рівність

$$\theta^* = \alpha_a^*(V \cap D),$$

де θ^* — оптимальне значення цільової функції задачі (3)—(5).

Для того щоб елемент $g^* = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i^* g_i$ був екстремальним елементом для величини (1), необхідно і достатньо, щоб вектор $\left(\alpha_1^*,...,\alpha_n^*,\theta^*\right)$ був оптимальним розв'язком задачі (3)—(5).

Доведення. Нехай $g^* = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i^* g_i$ є екстремальним елементом для величини (1). Тоді відповідно до (2)

$$\alpha_a^*(V \cap D) = \max_{s\in S}\max_{y\in a(s)}\left\|\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^* g_i(s) - y\right\| =$$

$$= \max_{s\in S}\max_{y\in a(s)}\max_{f\in B^*}\operatorname{Re} f\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^* g_i(s) - y\right) =$$

$$= \max_{s\in S}\max_{y\in a(s)}\max_{f\in B^*}\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^* \operatorname{Re} f\big(g_i(s)\big) - \operatorname{Re} f(y)\right),$$

причому

$$\left\|\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^* g_i(t) - u(t)\right\| = \max_{\varphi\in B^*}\operatorname{Re}\varphi\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^* g_i(t) - u(t)\right) =$$

$$= \max_{\varphi\in B^*}\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^* \operatorname{Re}\varphi\big(g_i(t)\big) - \operatorname{Re}\varphi\big(u(t)\big)\right) \le r(t), t \in S.$$

Звідси випливає, що

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^* \operatorname{Re} f\big(g_i(s)\big) - \alpha_a^*(V \cap D) \le \operatorname{Re} f(y), s \in S, y \in a(s), f \in B^*,$$

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^* \operatorname{Re}\varphi\big(g_i(t)\big) \le \operatorname{Re}\varphi\big(u(t)\big) + r(t), t \in S, \varphi \in B^*.$$

Тому вектор $\left(\alpha^*;\alpha_a^*(V \cap D)\right) = \left(\alpha_1^*,...,\alpha_n^*;\alpha_a^*(V \cap D)\right)$ є допустимим розв'язком задачі (3)—(5). У зв'язку з цим

$$\inf\left\{\theta : \text{при обмеженнях}\,(4)-(5)\right\} \le \alpha_a^*\left(V\cap D\right). \qquad (6)$$

Нехай тепер $\left(\alpha';\theta'\right)=\left(\alpha_1',...,\alpha_n';\theta'\right)$ є довільним допустимим розв'язком задачі (3)—(5). Тоді

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i'\operatorname{Re} f\left(g_i(s)\right)-\operatorname{Re} f(y)\le\theta', s\in S, y\in a(s), f\in B^*,$$

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i'\operatorname{Re}\varphi\left(g_i(t)\right)-\operatorname{Re}\varphi\left(u(t)\right)\le r(t), t\in S, \varphi\in B^*.$$

Внаслідок цих нерівностей отримаємо, що

$$\max_{s\in S}\max_{y\in a(s)}\left\|\sum_{i=1}^{n}\alpha_i' g_i(s)-y\right\|\le\theta',$$

$$\left\|\sum_{i=1}^{n}\alpha_i' g_i(t)-u(t)\right\|\le r(t), t\in S. \qquad (7)$$

Тому вектор $g'=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i' g_i$ належить $V\cap D$.

Крім того,

$$\alpha_a^*\left(V\cap D\right)\le\max_{s\in S}\max_{y\in a(s)}\left\|g'(s)-y\right\|\le\theta'.$$

Звідси випливає, що

$$\alpha_a^*\left(V\cap D\right)\le\inf\left\{\theta : \text{при обмеженнях}\,(4)-(5)\right\}. \qquad (7)$$

З (6), (7) маємо, що

$$\theta^*=\inf\left\{\theta : \text{при обмеженнях}\,(4)-(5)\right\}=\alpha_a^*\left(V\cap D\right). \qquad (8)$$

Оскільки вектор $\left(\alpha^*;\alpha_a^*\left(V\cap D\right)\right)=\left(\alpha_1^*,...,\alpha_n^*;\alpha_a^*\left(V\cap D\right)\right)$ є допустимим розв'язком задачі (3)—(5), то звідси випливає, що він є її оптимальним розв'язком.

Нехай тепер вектор $\left(\alpha^*;\theta^*\right)=\left(\alpha_1^*,...,\alpha_n^*;\theta^*\right)$ є оптимальним розв'язком задачі (3)—(5). З урахуванням (2) звідси отримаємо, що

$$\max_{t\in S}\left(\left\|\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^* g_i(t)-u(t)\right\|-r(t)\right)\le 0 \text{ і } \max_{s\in S}\max_{y\in a(s)}\left\|\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^* g_i(s)-y\right\|\le\theta^*.$$

Оскільки має місце рівність (8), то звідси випливає, що вектор $g^*=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^* g_i$ є екстремальним елементом для величини (1).

Лему доведено.

Основні результати. Перейдемо до описання запропонованого методу. На попередньому кроці методу вибираємо точки $s_j \in S$, функціонали $f_j \in B^*$, $j = \overline{1, m_1}$, такі, що

$$\min_{\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)\in S_{R^n}} \max_{1\le j\le m_1} \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \operatorname{Re} f_j\left(g_i\left(s_j\right)\right) \right) > 0, \tag{9}$$

де $S_{R^n} = \left\{ \alpha : \alpha = \left(\alpha_1, \ldots, \alpha_n\right) \in R^n, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 = 1 \right\}$ — одинична сфера простору R^n. Існування таких точок та функціоналів випливає з лінійної незалежності відображень g_i, $i = \overline{1, n}$. Крім того, на цьому кроці довільним чином вибираємо точки $y_j \in a\left(s_j\right)$, $j = \overline{1, m_1}$.

Нехай на l-му кроці $\left(l \ge 1\right)$ отримано розв’язок $\left(\alpha^l ; \theta^l\right) = \left(\alpha_1^l, \ldots, \alpha_n^l ; \theta^l\right)$ такої задачі лінійного програмування

$$\inf \theta \tag{10}$$

при обмеженнях

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \operatorname{Re} f_j\left(g_i\left(s_j\right)\right) - \theta \le \operatorname{Re} f_j\left(y_j\right), j = \overline{1, m_l}, \tag{11}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \operatorname{Re} \varphi_k\left(g_i\left(t_k\right)\right) \le \operatorname{Re} \varphi_k\left(u\left(t_k\right)\right) + r\left(t_k\right), k = \overline{1, p_l}, \tag{12}$$

де $m_l \ge m_1$, $p_l \ge 0.$, $m_l + p_l = m_1 + l - 1$.

З урахуванням співвідношення (9) легко переконатися, що цільова функція задачі (10)—(12) обмежена знизу на множині допустимих розв’язків цієї задачі. Тому задача лінійного програмування (10)—(12) має оптимальний розв’язок (див., наприклад, [5]).

Теорема 1. Має місце співвідношення

$$\theta^l \le \alpha_a^*\left(V \cap D\right), l = 1, 2, \ldots \ . \tag{13}$$

Якщо для $l \in \{1, 2, \ldots\}$ елемент $g^l = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^l g_i \in D$, то

$$\theta^l \le \max_{s\in S} \max_{y\in a(s)} \left\| g^l\left(s\right) - y \right\|. \tag{14}$$

Якщо $g^l = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^l g_i \in D$ і

$$\theta^l = \max_{s\in S} \max_{y\in a(s)} \left\| g^l\left(s\right) - y \right\|, \tag{15}$$

то g^l є екстремальним елементом для величини (1) і справедлива рівність $\theta^l = \alpha_a^*\left(V \cap D\right)$.

Доведення. Оскільки вектор $\left(\alpha_1^l,...,\alpha_n^l;\theta^l\right)$ є оптимальним розв'язком задачі (10)—(12), то з урахуванням леми 1 одержимо, що

$$\theta^l = \inf\left\{\theta : \text{при обмеженнях}\,(11)-(12)\right\} \le$$

$$\le \inf\left\{\theta : \text{при обмеженнях}\,(4)-(5)\right\} = \alpha_a^*\left(V \cap D\right).$$

Справедливість нерівності (13) встановлено. Якщо елемент $g^l = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i^l g_i$ належить множині D, то $g_l \in V \cap D$. Тому

$$\alpha_a^*\left(V \cap D\right) \le \max_{s\in S}\max_{y\in a(s)}\left\|g^l\left(s\right)-y\right\|.$$

З цієї нерівності та нерівності (13) випливає справедливість нерівності (14).

Якщо $g^l = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i^l g_i \in D$ і має місце рівність (15), то з (13) та (15) одержимо, що $\theta^l = \alpha_a^*\left(V \cap D\right) = \max_{s\in S}\max_{y\in a(s)}\left\|g^l\left(s\right)-y\right\|$.

Це означає, що g^l є екстремальним елементом для величини (1) і $\theta^l = \alpha_a^*\left(V \cap D\right)$.

Теорему доведено.

Продовжимо описання методу. Для $l = 1,2,...$ позначимо через $\varepsilon^l = \max\left\{\max_{s\in S}\max_{y\in a(s)}\left\|g^l\left(s\right)-y\right\| - \theta^l, \max_{t\in S}\left(\left\|g^l\left(t\right)-u\left(t\right)\right\| - r\left(t\right)\right)\right\}$, де, як і вище, $g^l = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i^l g_i$.

З теореми 1 випливає, що $\varepsilon^l \ge 0$. Якщо для деякого $l \in \left\{1,2,...\right\}$ $\varepsilon^l = 0$, то g^l є екстремальним елементом для величини (1) і $\alpha_a^*\left(V \cap D\right) = \theta^l$.

В цьому випадку процес відшукання величини (1) і її екстремального елемента завершено.

Розглянемо випадок, коли $\varepsilon^q > 0$. Нехай

$$\varepsilon^l = \max_{s\in S}\max_{y\in a(s)}\left\|g^l\left(s\right)-y\right\| = \max_{y\in a\left(s_{m_l+1}\right)}\left\|g^l\left(s_{m_l+1}\right)-y\right\| =$$

$$= \left\| g^l\left(s_{m_l+1}\right) - y_{m_l+1} \right\| = \operatorname{Re} f_{m_l+1}\left(g^l\left(s_{m_l+1}\right) - y_{m_l+1}\right),$$

де $s_{m_l+1} \in S$, $y_{m_l+1} \in a\left(s_{m_l+1}\right)$, $f_{m_l+1} \in B^*$.

Тоді до обмежень (11) задачі (10)—(12) добавляємо обмеження

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \operatorname{Re} f_{m_l+1}\left(g_i\left(s_{m_l+1}\right)\right) - \theta \le \operatorname{Re} f_{m_l+1}\left(y_{m_l+1}\right)$$

та розв'язуємо одержану в результаті цього нову задачу лінійного програмування. Позначимо через $\left(\alpha^{l+1};\theta^{l+1}\right) = \left(\alpha_1^{l+1},\ldots,\alpha_n^{l+1};\theta^{l+1}\right)$ її оптимальний розв'язок. Якщо ж

$$\varepsilon^l = \max_{t\in S}\left(\left\| g^l(t) - u(t) \right\| - r(t)\right) = \left\| g^l\left(t_{p_l+1}\right) - u\left(t_{p_l+1}\right) \right\| - r\left(t_{p_l+1}\right) =$$

$$= \operatorname{Re}\varphi_{p_l+1}\left(g^l\left(t_{p_l+1}\right) - u\left(t_{p_l+1}\right)\right) - r\left(t_{p_l+1}\right),$$

то до обмежень (12) задачі (10)—(12) добавляємо обмеження

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \operatorname{Re}\varphi_{p_l+1}\left(g_i\left(t_{p_l+1}\right)\right) \le \operatorname{Re}\varphi_{p_l+1}\left(u\left(t_{p_l+1}\right)\right) + r\left(t_{p_l+1}\right),$$

знаходимо оптимальний розв'язок $\left(\alpha^{l+1};\theta^{l+1}\right) = \left(\alpha_1^{l+1},\ldots,\alpha_n^{l+1};\theta^{l+1}\right)$ отриманої в результаті цього нової задачі лінійного програмування і т.д.

Теорема 2. Послідовність $\left\{\theta^l\right\}_{l=1}^{\infty}$ є неспадною, існує $\lim\limits_{l\to\infty}\theta^l$. Послідовність $\left\{\alpha^l\right\}_{l=1}^{\infty}$, де $\alpha^l = \left(\alpha_1^l,\ldots,\alpha_n^l\right)$, $l = 1,2,\ldots$, є обмеженою послідовність простору R^n. Для будь-якої часткової границі $\alpha^* = \left(\alpha_1^*,\ldots,\alpha_n^*\right)$ послідовності $\left\{\alpha^l\right\}_{l=1}^{\infty}$ елемент $g^* = \sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i^* g_i$ є екстремальним елементом для величини (1). Мають місце співвідношення

$$\lim_{l\to\infty}\theta^l = \alpha_a^*\left(V\cap D\right) = \max_{s\in S}\max_{y\in a(s)}\left\| g^*(s) - y \right\|,$$

$$\overline{\lim_{l\to\infty}}\max_{t\in S}\left(\left\| g^l(t) - u(t) \right\| - r(t)\right) \le 0 .$$

Доведення. Оскільки обмеження задачі лінійного програмування (10)—(12), яка розв'язується на l-му кроці, включаються в обмеження задачі лінійного програмування, яка розв'язується на $l+1$-му кроці методу, а цільові функції цих задач однакові, то для відповідних їх оптимальних розв'язків $\left(\alpha_1^l,\ldots,\alpha_n^l;\theta^l\right)$ і $\left(\alpha_1^{l+1},\ldots,\alpha_n^{l+1};\theta^{l+1}\right)$ виконується нерівність: $\theta^l \le \theta^{l+1}, l = 1,2,\ldots$. Згідно з теоремою 1 $\theta^l \le \alpha_a^*\left(V\cap D\right)$. Тому існує $\lim\limits_{l\to\infty}\theta^l$ і $\lim\limits_{l\to\infty}\theta^l \le \alpha_a^*\left(V\cap D\right)$.

Переконаємося, що послідовність $\left\{\alpha^{l}\right\}_{l=1}^{\infty}$, де $\alpha^{l}=\left(\alpha_{1}^{l},\ldots,\alpha_{n}^{l}\right)$, $l=1,2,\ldots$, є обмеженою послідовністю простору R^{n}. Припустимо супротивне. Тоді існує її підпослідовність $\left\{\alpha^{l_{\nu}}\right\}_{\nu=1}^{\infty}$ така, що $\lim\limits_{\nu\to\infty}\left\|\alpha^{l_{\nu}}\right\|=$ $=+\infty$. Без обмеження загальності будемо вважати, що уже $\lim\limits_{l\to\infty}\left\|\alpha^{l}\right\|=+\infty$. Оскільки $\left(\alpha_{1}^{l},\ldots,\alpha_{n}^{l};\theta^{l}\right)$ є оптимальним розв'язком задачі (10)—(12), то

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_{i}^{l}\operatorname{Re}f_{j}\left(g_{i}\left(s_{j}\right)\right)-\operatorname{Re}f_{j}\left(y_{j}\right)\leq\theta^{l},\ j=\overline{1,m_{1}},\ l=1,2,\ldots.$$

Звідки

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\alpha_{i}^{l}}{\left\|\alpha^{l}\right\|}\operatorname{Re}f_{j}\left(g_{i}\left(s_{j}\right)\right)-\frac{1}{\left\|\alpha^{l}\right\|}\operatorname{Re}f_{j}\left(y_{j}\right)\leq\frac{1}{\left\|\alpha^{l}\right\|}\theta^{l},\ j=\overline{1,m_{1}},\ l=1,2,\ldots.$$

Оскільки $\left(\frac{\alpha_{1}^{l}}{\left\|\alpha^{l}\right\|},\ldots,\frac{\alpha_{n}^{l}}{\left\|\alpha^{l}\right\|}\right)\in S_{R^{n}}$, то з послідовності $\left\{\left(\frac{\alpha_{1}^{l}}{\left\|\alpha^{l}\right\|},\ldots,\frac{\alpha_{n}^{l}}{\left\|\alpha^{l}\right\|}\right)\right\}_{l=1}^{\infty}$ можна вибрати збіжну підпослідовність $\left\{\left(\frac{\alpha_{1}^{l_{\nu}}}{\left\|\alpha^{l_{\nu}}\right\|},\ldots,\frac{\alpha_{n}^{l_{\nu}}}{\left\|\alpha^{l_{\nu}}\right\|}\right)\right\}_{\nu=1}^{\infty}$. Нехай $\lim\limits_{\nu\to\infty}\left(\frac{\alpha_{1}^{l_{\nu}}}{\left\|\alpha^{l_{\nu}}\right\|},\ldots,\frac{\alpha_{n}^{l_{\nu}}}{\left\|\alpha^{l_{\nu}}\right\|}\right)=\left(\alpha_{1}',\ldots,\alpha_{n}'\right)$.

Зрозуміло, що $\left(\alpha_{1}',\ldots,\alpha_{n}'\right)\in S_{R^{n}}$. З урахуванням зазначеного вище, обмеженості послідовності $\left\{\theta^{l}\right\}_{l=1}^{\infty}$ (існує $\lim\limits_{l\to\infty}\theta^{l}$) з (16) одержимо, що

$$\max_{1\leq j\leq m_{1}}\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_{i}'\operatorname{Re}f_{j}\left(g_{i}\left(s_{j}\right)\right)\right)\leq 0,$$

що суперечить (9).

Отже, послідовність $\left\{\alpha^{l}\right\}_{l=1}^{\infty}$ є обмеженою послідовністю простору R^{n}. Нехай $\alpha^{*}=\left(\alpha_{1}^{*},\ldots,\alpha_{n}^{*}\right)$ її часткова границя. Переконаємося, що вектор $g^* = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^* g_i$ є екстремальним елементом для величини (1). Зрозуміло, що існує підпослідовність $\left\{\alpha^{l_\nu}\right\}_{\nu=1}^{\infty}$ така, що

$$\lim_{\nu\to\infty} \alpha^{l_\nu} = \lim_{\nu\to\infty} \left(\alpha_1^{l_\nu}, ..., \alpha_n^{l_\nu}\right) = \left(\alpha_1^*, ..., \alpha_n^*\right) = \alpha^*.$$

Припустимо, що існує підпослідовність $\left\{\alpha^{l_{\nu_\mu}}\right\}_{\mu=1}^{\infty}$ послідовності $\left\{\alpha^{l_\nu}\right\}_{\nu=1}^{\infty}$ така, що $\varepsilon^{l_{\nu_\mu}} = \max_{s\in S} \max_{y\in a(s)} \left\| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^{l_{\nu_\mu}} g_i(s) - y \right\| - \theta^{l_{\nu_\mu}}$, $\mu = 1, 2, ...$.

Без обмеження загальності будемо вважати, що уже

$$\varepsilon^{l_\nu} = \max_{s\in S} \max_{y\in a(s)} \left\| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^{l_\nu} g_i(s) - y \right\| - \theta^{l_\nu} =$$

$$= \operatorname{Re} f_{m_{l_\nu}+1}\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^{l_\nu} g_i\left(s_{m_{l_\nu}+1}\right) - y_{m_{l_\nu}+1} \right) - \theta^{l_\nu}, \nu = 1, 2, ... \qquad (17)$$

Тоді на кроці $l_\nu + 1$ до обмежень задачі лінійного програмування типу (10)—(12), яка розв'язана на кроці l_ν, добавляється обмеження

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \operatorname{Re} f_{m_{l_\nu}+1}\left(g_i\left(s_{m_{l_\nu}+1}\right)\right) - \theta \le \operatorname{Re} f_{m_{l_\nu}+1}\left(y_{m_{l_\nu}+1}\right), \nu = 1, 2, ...$$

Тому уже

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^{l_\nu+1} \operatorname{Re} f_{m_{l_\nu}+1}\left(g_i\left(s_{m_{l_\nu}+1}\right)\right) - \theta^{l_\nu+1} \le \operatorname{Re} f_{m_{l_\nu}+1}\left(y_{m_{l_\nu}+1}\right), \quad \nu = 1, 2, ... (18)$$

Маємо далі з урахуванням (17), (18), що

$$\left| \max_{s\in s} \max_{y\in a(s)} \left\| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^{l_\nu} g_i(s) - y \right\| - \right.$$

$$\left. - \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^{l_\nu+1} \operatorname{Re} f_{m_{l_\nu}+1}\left(g_i\left(s_{m_{l_\nu}+1}\right)\right) - \operatorname{Re} f_{m_{l_\nu}+1}\left(y_{m_{l_\nu}+1}\right) \right) \right| =$$

$$= \left| \operatorname{Re} f_{m_{l_\nu}+1}\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^{l_\nu} g_i\left(s_{m_{l_\nu}+1}\right) - y_{m_{l_\nu}+1} \right) - \right.$$

$$\left. - \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^{l_\nu+1} \operatorname{Re} f_{m_{l_\nu}+1}\left(g_i\left(s_{m_{l_\nu}+1}\right)\right) - \operatorname{Re} f_{m_{l_\nu}+1}\left(y_{m_{l_\nu}+1}\right) \right) \right| =$$

$$= \left| \sum_{i=1}^{n} \left(\alpha_i^{l_\nu} - \alpha_i^{l_\nu+1} \right) \operatorname{Re} f_{m_{l_\nu}+1} \left(g_i \left(s_{m_{l_\nu}+1} \right) \right) \right| \le \sum_{i=1}^{n} \left| \alpha_i^{l_\nu} - \alpha_i^{l_\nu+1} \right| \left\| g_i \right\|, \ \nu = 1, 2, \dots .$$

Оскільки $\lim\limits_{\nu \to \infty} \left(\alpha_1^{l_\nu}, \dots, \alpha_n^{l_\nu} \right) = \left(\alpha_1^*, \dots, \alpha_n^* \right)$, то звідси випливає, що

$$\lim_{\nu \to \infty} \max_{s \in s} \max_{y \in a(s)} \left\| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^{l_\nu} g_i(s) - y \right\| = \max_{s \in s} \max_{y \in a(s)} \left\| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^* g_i(s) - y \right\| =$$

$$= \max_{s \in s} \max_{y \in a(s)} \left\| g^*(s) - y \right\| = \lim_{\nu \to \infty} \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^{l_\nu+1} \operatorname{Re} f_{m_{l_\nu}+1} \left(g_i \left(s_{m_{l_\nu}+1} \right) \right) - \right.$$

$$\left. - \operatorname{Re} f_{m_{l_\nu}+1} \left(y_{m_{l_\nu}+1} \right) \right) \le \lim_{\nu \to \infty} \theta^{l_\nu+1} = \lim_{l \to \infty} \theta^l \le \alpha_a^* \left(V \cap D \right). \qquad (19)$$

З (17), (19) одержуємо

$$0 \le \lim_{\nu \to \infty} \varepsilon^{l_\nu} = \lim_{\nu \to \infty} \max_{s \in s} \max_{y \in a(s)} \left\| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^{l_\nu} g_i(s) - y \right\| - \lim_{\nu \to \infty} \theta^{l_\nu} =$$

$$= \max_{s \in s} \max_{y \in a(s)} \left\| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^* g_i(s) - y \right\| - \lim_{l \to \infty} \theta^l \le 0.$$

Тому $\lim\limits_{\nu \to \infty} \varepsilon^{l_\nu} = 0$.

Маємо, що

$$\max_{t \in S} \left(\left\| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^{l_\nu} g_i(t) - u(t) \right\| - r(t) \right) =$$

$$= \max_{t \in S} \left(\left\| g^{l_\nu}(t) - u(t) \right\| - r(t) \right) \le \varepsilon^{l_\nu}, \nu = 1, 2, \dots .$$

Внаслідок цього та рівності (20) заключаємо, що

$$\max_{t \in S} \left(\left\| g^*(t) - u(t) \right\| - r(t) \right) \le 0.$$

Тому $g^* \in V \cap D$. Тоді з (19) одержимо, що

$$\alpha_a^* \left(V \cap D \right) \le \max_{s \in s} \max_{y \in a(s)} \left\| g^*(s) - y \right\| \le \lim_{l \to \infty} \theta^l \le \alpha_a^* \left(V \cap D \right).$$

Отже, в розглядуваному випадку

$$\lim_{l \to \infty} \theta^l = \alpha_a^* \left(V \cap D \right) = \max_{s \in s} \max_{y \in a(s)} \left\| g^*(s) - y \right\|.$$

Звідси випливає, що g^* є екстремальний елементом для величини (1). Маємо, крім того, що

$$\lim_{\nu \to \infty} \max_{t \in S} \left(\left\| g^{l_\nu}(t) - u(t) \right\| - r(t) \right) \le 0. \qquad (20)$$

Нехай тепер для всіх ν, починаючи з деякого номера,

$$\varepsilon^{l_\nu} = \max_{t\in S}\left(\left\|g^{l_\nu}(t)-u(t)\right\|-r(t)\right)=\max_{t\in S}\left(\left\|\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^{l_\nu}g_i(t)-u(t)\right\|-r(t)\right)=$$

$$=\operatorname{Re}\varphi_{p_{l_\nu}+1}\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^{l_\nu}\left(g_i\left(t_{p_{l_\nu}+1}\right)-u\left(t_{p_{l_\nu}+1}\right)\right)+r\left(t_{p_{l_\nu}+1}\right). \qquad (21)$$

Тоді на кроці $l_\nu+1$ до обмежень задачі лінійного програмування типу (10)—(12), яка розв'язана на кроці l_ν, добавляється обмеження

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i \operatorname{Re}\varphi_{p_{l\nu}+1}\left(g_i\left(t_{p_{l\nu}+1}\right)\right)\le \operatorname{Re}\varphi_{p_{l\nu}+1}\left(u\left(t_{p_{l\nu}+1}\right)\right)+r\left(t_{p_{l\nu}+1}\right).$$

Тоді

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^{l_\nu+1} \operatorname{Re}\varphi_{p_{l\nu}+1}\left(g_i\left(t_{p_{l\nu}+1}\right)\right)\le \operatorname{Re}\varphi_{p_{l\nu}+1}\left(u\left(t_{p_{l\nu}+1}\right)\right)+r\left(t_{p_{l\nu}+1}\right). \qquad (22)$$

З (21), (22) випливає, що

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\alpha_i^{l_\nu+1}-\alpha_i^{l_\nu}\right)\operatorname{Re}\varphi_{p_{l\nu}+1}\left(g_i\left(t_{p_{l\nu}+1}\right)\right)\le -\varepsilon^{l_\nu}\le 0. \qquad (23)$$

Тому $\lim\limits_{\nu\to\infty}\varepsilon^{l_\nu}=0$.

Звідси та з (21) маємо, що

$$\max_{t\in S}\left(\left\|\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^{*}g_i(t)-u(t)\right\|-r(t)\right)=0.$$

Це означає, що $g^{*}\in V\cap D$. Оскільки $\max\limits_{s\in S}\max\limits_{y\in a(s)}\left\|g^{l_\nu}(s)-y\right\|-$ $-\theta^{l_\nu}\le\varepsilon^{l_\nu}$ і має місце рівність (23), то

$$\alpha_a^{*}(V\cap D)\le \max_{s\in s}\max_{y\in a(s)}\left\|g^{*}(s)-y\right\|\le\lim_{l\to\infty}\theta^{l}.$$

Вище було встановлено, що $\lim\limits_{l\to\infty}\theta^{l}\le\alpha_a^{*}(V\cap D)$.

Тому і в розглядуваному випадку

$$\lim_{l\to\infty}\theta^{l}=\alpha_a^{*}(V\cap D)=\max_{s\in s}\max_{y\in a(s)}\left\|g^{*}(s)-y\right\|.$$

Звідси випливає, що g^{*} є екстремальним елементом для величини (1). Крім того, внаслідок (21) і (23)

$$\lim_{\nu\to\infty}\max_{t\in S}\left(\left\|g^{l_\nu}(t)-u(t)\right\|-r(t)\right)=0. \qquad (24)$$

З (19) та (24) випливає, що

$$\overline{\lim_{l\to\infty}}\max_{t\in S}\left(\left\|g^l(t)-u(t)\right\|-r(t)\right)\le 0 .$$

Теорему доведено.

Висновки. Для розв'язування задачі найкращої рівномірної апроксимації неперервного компактнозначного відображення елементами скінченновимірного підпростору однозначних неперервних відображень, які задовольняють додатковому обмеженню, що задається системою замкнутих куль, які змінюються неперервно, модифіковано метод січної площини розв'язування задачі опуклого програмування та доведено його збіжість.

Список використаних джерел:

1. Kelly J. E. The „Cutting plane" methods for solving convex programs// SIAM J. — 1960. — 8, № 4. — P. 703—712.
2. Гнатюк В. О. Модифікація методу січних площин на випадок апроксимації компактнозначного відображення чебишовським підпростором з додатковим обмеженням / В. О. Гнатюк, Ю. В. Гнатюк, У. В. Гудима. — Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки : зб. наук. праць / Кам'янець-Подільський національний університет, Інститут кібернетики імені В. М. Глушкова Національної академії наук України ; [редкол.: В. В. Скопецький (відп. ред.) та ін.]. — Кам'янець-Подільський : Кам'янець-Подільський національний університет, 2008. — Вип. 1. — С. 51—60.
3. Гудима У. В. Найкраща рівномірна апроксимація неперервного компактнозначного відображення множинами неперервних однозначних відображень / У. В. Гудима. — Укр. мат. журн. — 2005. — 57, № 12. — С. 1601—1619.
4. Иосида К. Функциональный анализ. — М. : Мир, 1967. — 624 с.
5. Юдин Д. Б., Гольштейн Е. Г. Линейное программирование (теория и конечные методы) / Д. Б. Юдин, Е. Г. Гольштейн. — М. : Физматгиз, 1963. — 774 с.

In the article the cutting plane methods is generalized on the case of problem of the best uniform approximation continuous compact-valued maps by finite dimensional space of continuous single-valued maps with additional restriction.

Key words: *the compact-valued maps, best uniform approximation, cutting plane methods, additional restriction.*

Отримано: 28.09.2009