

4. Sherwood T. R. Mass Transfer / T. R. Sherwood, R. L. Pigford, C. R. Wilke. — New York : McGraw Hill, 1975.
5. Ляшко И. И. Численное решение задач тепло- и массопереноса в пористых средах / И. И. Ляшко, Л. И. Демченко, Г. Е. Мистецкий. — К. : Наук. думка, 1991. — 264 с.
6. Власюк А. П. Математичне моделювання фільтраційної консолідації зростаючого шару ґрунту за наявності солепереносу в неізотермічних умовах / А. П. Власюк, П. М. Мартинюк // Мат. методи та фіз.-мех. поля. — 2006. — 49, №4. — С. 157–166.

Mathematical model of diffusion and chemical processes in soil, which takes in account influence of concentration of salts in filtrate on migration process, has been considered in the paper. Numerical experiments results, which show substantial influence of this factors on pollution migration modelling, have been given. Extension of parallel algorithm of solving problems for this model has been proposed.

Key words: *geochemical processes, mathematical modelling, pollution migration, parallel algorithms.*

Отримано: 14.06.2010

УДК 519.6

А. Я. Бомба, д-р техн. наук, канд. фіз.-мат. наук,
А. В. Тербус, аспірант

Рівненський державний гуманітарний університет, м. Рівне

МЕТОД КВАЗІКОНФОРМНИХ ВІДОБРАЖЕНЬ МОДЕЛЮВАННЯ ІДЕАЛЬНИХ ПОЛІВ ДЛЯ ОДНОГО КЛАСУ ПРОСТОРОВИХ ОБЛАСТЕЙ

Розглядається ідеальний процес у двозв'язній мало просторовій області – криволінійному паралелепіпеді з деякою циліндричною порожниною, обмеженому чотирма поверхнями течії та трьома еквіпотенціальними поверхнями, серед яких – дві протилежні грані та внутрішня поверхня, як носій керуючого потенціалу. Проведено системний аналіз випадків формування течії залежно від потенціалу керування, побудовано алгоритм вибору та наведено алгоритм розв'язання задачі у випадку рівності нулю потоку через внутрішню поверхню.

Ключові слова: *квазіконформне відображення, керуючий потенціал, алгоритм вибору.*

Вступ. У роботах [1], [5]-[7] побудовані просторові аналоги крайових задач на конформні та квазіконформні відображення для областей, обмежених поверхнями течії та еквіпотенціальними поверхнями

ми. Зокрема, введено поняття просторово комплексно-спряжених функцій, запропоновано аналітичні та числові підходи реалізації розв'язків таких задач. У працях [3]-[5] на основі системного підходу до моделювання плоских та просторових ідеальних і квазіідеальних полів розв'язана проблема неоднозначності нелінійного обернення відповідних крайових задач на конформні і квазіконформні відображення та їх просторових аналогів за умов оптимізації та керування.

У цій роботі йдеться про ідеальний процес у спеціального типу двозв'язній мало просторовій області – криволінійному паралелепіпеді з деякою циліндричною порожниною, обмеженому чотирма поверхнями течії та трьома екіпотенціальними поверхнями (двома протилежними гранями та внутрішньою поверхнею – носієм керуючого потенціалу). При цьому, під малою просторовістю тут, в першу чергу, розуміється така структурна конфігурація області, що існує можливість зведення задачі моделювання просторової ідеальної течії до моделювання плоскої квазіідеальної течії (задачі на квазіконформне відображення). Проведено системний аналіз усіх можливих випадків формування течії залежно від потенціалу керування, побудовано алгоритм вибору [3]-[5] та наведено алгоритм розв'язання задачі у випадку рівності нулю потоку через внутрішню поверхню.

Загальна постановка задачі. У просторовій області G – криволінійному паралелепіпеді $ABCD A_* B_* C_* D_*$ (див. рис. 1), обмеженому екіпотенціальними поверхнями $AA_* B_* B$ ($f_*(x, y) = 0$) та $CC_* D_* D$ ($f^*(x, y) = 0$) та непроникними стінками (поверхнями течії) $ABCD$ ($z = 0$), $A_* B_* C_* D_*$ ($z = g(x, y)$), $ADD_* A_*$ ($g_*(x, y) = 0$), $CB B_* C_*$ ($g^*(x, y) = 0$) з порожниною, породженою заданою екіпотенціальною циліндричною поверхнею Π – носієм керуючого потенціалу, розглядається деяке ідеальне поле.

Існують різні підходи до постановок та розв'язання відповідних крайових задач. В одному з них, дослідження базуються на розв'язанні рівняння Лапласа у цій області з наступним введенням функцій течії (просторово комплексно-спряжених до потенціалу), побудовою динамічної сітки, поля швидкостей, розрахунку величин різних перетоків, зокрема, повного потоку. У роботах [5]-[7] такого роду задачі ставились і розв'язувались шляхом побудови просторових аналогів конформних відображень просторових криволінійних областей на відповідні області просторового комплексного потенціалу (див., напр., рис. 1 б).

Ми розглядаємо спеціальний тип такого роду просторових ідеальних полів, моделювання і прогнозування яких зводиться до

розв'язання плоских крайових задач на квазіконформні відображення (див., напр., [9]). При цьому, за відповідну плоску область G_2 приймаємо нижню основу («підшову» $ABCD$) заданої просторової області G (див. рис. 2 а, 3 а) без внутрішності контуру l , що є перетином даної «підшови» із поверхнею Π . Відносно цієї області закон руху (Дарсі) та рівняння нерозривності представимо відповідно у вигляді: $\bar{v} = \kappa \cdot g(x, y) \text{grad} \varphi$, $\text{div} \bar{v} = 0$, де $\bar{v} = (v_x, v_y)$ і $\varphi = \varphi(x, y)$ – відповідно вектор та квазіпотенціал швидкості, κ – коефіцієнт провідності (для зручності викладок надалі покладемо $\kappa = 1$). Зауважимо, що при фіксованому значенні параметра φ_0 квазіпотенціал може бути знайдено у результаті розв'язку такої задачі (див. [8]-[11]):

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(g(x, y) \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(g(x, y) \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) = 0, \quad (1)$$

$$\varphi|_{AB} = \varphi_*, \quad \varphi|_{CD} = \varphi^*, \quad \varphi|_l = \varphi_0 \quad (\varphi_* \leq \varphi_0 \leq \varphi^*), \quad \varphi'_n|_{AD \cup BC} = 0. \quad (2)$$

Очевидно, що в залежності від значення параметру φ_0 можливі різні випадки формування течії (див. рис. 2-3), а, отже, і форми області комплексного квазіпотенціалу G_{φ} . Задача (1)-(2) ускладнюється ще й тим, що крім значення квазіпотенціалу та його швидкості, потрібно знайти величини перетоків, лінії розділу течії, зокрема, точки «призупинки» течії $S = \bar{S} = \underline{S} = (x_S, y_S)$, або $L = \bar{L} = \underline{L} = (x_L, y_L)$ і $L' = (x_{L'}, y_{L'})$, або $S' = \bar{S}' = \underline{S}' = (x_{S'}, y_{S'})$.

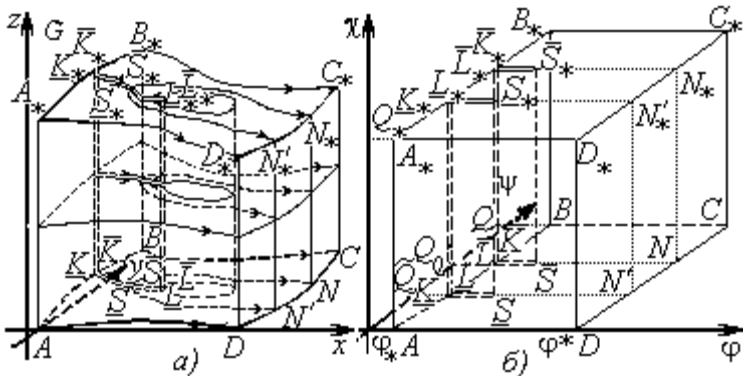


Рис. 1. Просторова криволінійна область G та відповідна їй область просторового комплексного потенціалу при $\varphi_0 = \varphi_*$

Шляхом введення функції течії $\psi = \psi(x, y)$ – квазі-комплексно-спряженої до $\varphi(x, y)$, аналогічно до [2]-[3], приходимо сукупності наступних чотирьох типів крайових задач ((3)-(4)-(5. i), $i = \overline{1, 4}$) на квазіконформне відображення області G_z із невідомими розрізами вздовж ліній розділу течії на відповідну область комплексного квазі-потенціалу G_ω або на обернене квазіконформне відображення $G_\omega \rightarrow G_z$ при відповідності кутових точок із паралельним знаходженням невідомих параметрів (витрат-перетоків):

$$g(x, y) \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad g(x, y) \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad (3)$$

$$\varphi|_{AB} = \varphi_*, \quad \varphi|_{CD} = \varphi^*, \quad \varphi|_l = \varphi_0 \quad (\varphi_* \leq \varphi_0 \leq \varphi^*),$$

$$\psi|_{AD} = 0, \quad \psi|_{BC} = Q, \quad (4)$$

$$\varphi|_{\underline{S}\overline{S}} = \tilde{\varphi}, \quad \psi|_{\underline{K}S'N'} = \psi|_{\underline{L}SN'} = \tilde{Q},$$

$$\psi|_{\underline{K}SN} = \psi|_{\underline{L}SN} = Q^0, \quad v(x_S, y_S) = 0, \quad (5.1)$$

$$\psi|_{K'L'N'} = \tilde{Q}, \quad \psi|_{\underline{K}L} = Q_0,$$

$$\psi|_{\underline{L}N} = Q^0, \quad v(x_L, y_L) = 0, \quad v(x_{L'}, y_{L'}) = 0, \quad (5.2)$$

$$\psi|_{K'L'N'} = \tilde{Q}, \quad \psi|_{\underline{L}N} = Q^0,$$

$$\psi|_{\underline{K}\overline{L}N} = Q_0, \quad v(x_L, y_L) = 0, \quad v(x_{L'}, y_{L'}) = 0, \quad (5.3)$$

$$\varphi|_{\underline{S}'\overline{S}'} = \tilde{\varphi}, \quad \psi|_{K'S'L} = \psi|_{K'S'N} = \tilde{Q},$$

$$\psi|_{\underline{K}\overline{S}'\overline{L}} = \psi|_{\underline{K}\overline{S}'\overline{N}} = Q_0, \quad v(x_{S'}, y_{S'}) = 0. \quad (5.4)$$

Дійсно, на основі евристичних міркувань (з наступним логічним обґрунтуванням) нами встановлено усі можливі випадки формування течії (їх надалі «іменуватимемо» як $p \cdot q$, де p – номер відповідного рисунка, $p = \overline{1, 2}$, q – порядковий номер випадку згідно рис. 2-3). Легко бачити, що усі такі ситуаційні стани можна змоделювати чотирма типами сформульованих вище крайових задач (при цьому, формулювання задачі для конкретного випадку, взагалі кажучи, вимагає ще й деяких додаткових умов).

Особливий інтерес представляють так звані «ключові», зокрема «оптимізаційно-ключові» випадки, які характеризуються такими значеннями керуючого потенціалу φ_0 , при яких, за додаткових умов, досягається мінімум (чи максимум) величини одного з пере-

токів між внутрішніми контурами області. При цьому, всі інші випадки (ситуаційні стани) називатимемо – «проміжними».

Системний аналіз і алгоритм вибору. Для ситуаційних станів формування течії за умови відсутності перетоку від AB до l (випадки 2.1-2.3) задача ставиться у формулюванні (3)-(4)-(5.1) ($\varphi_* \leq \varphi_0 \leq \varphi_0^1$), при цьому, у випадку 2.3 (першому із «ключових») параметри Q_* ($Q_* = Q^0 - \bar{Q}$ – сумарний потік через контур l) та $\varphi_0 = \varphi_0^1$ рівні своїм відповідно мінімальному та максимальному значенням, а точка призупинки та розходження течії S (з потенціалом $\tilde{\varphi}$) досягає свого граничного положення L .

Ситуаційні стани 2.4, 3.5-3.6 характеризуються наявністю, як втоку, так і витоку з контуру l : $\varphi_* < \varphi^1 < \varphi_0 < \varphi^2 < \varphi^*$. При цьому, для випадків 2.4 («оптимізаційно-ключового») і 3.5 задача ставиться у формулюванні типу (3)-(4)-(5.2) (при додатковій умові $Q_* = Q^0 - Q_0 = 0$ та невідомому значенні $\varphi_0 = \bar{\varphi}_0$ для першого з них), а для випадку 3.6 – у формулюванні (3)-(4)-(5.3).

Випадки (3.6-3.8) характеризують усі можливі ситуаційні стани формування течії при $Q_* = Q^0 - Q_0 < 0$ і, в певному сенсі, є «симетричними» до ситуаційних станів за умови $Q_* > 0$ (розв'язання відповідних їм задач типу (3)-(4)-(5.3)–(3)-(4)-(5.4) є аналогічним до розв'язання задач типу (3)-(4)-(5.1)–(3)-(4)-(5.2)). Надалі розглядатимемо лише випадки, при яких $Q_* \geq 0$.

Зауважимо, що у кожному із описаних вище випадків область комплексного квазіпотенціалу $G_{\bar{w}}$ є внутрішністю многокутника, сторони якого паралельні координатним площинам. З огляду на неповну визначеність геометричної конфігурації цієї області виникає необхідність не тільки побудови алгоритмів числового розв'язання поставленої задачі для кожного із зазначених випадків окремо, але й побудови «алгоритму вибору», призначеного для вибору одного із описаних вище випадків залежно від величин параметрів φ_0 і відповідно Q_* , а також Q_0 , Q^0 . Розв'язки оптимізаційних задач часто одержують, як граничні випадки розв'язків відповідних проміжних задач. Ми ж, при побудові «алгоритму вибору», «відштовхуємось», в першу чергу, від розв'язання «ключових» (оптимізаційних) задач.

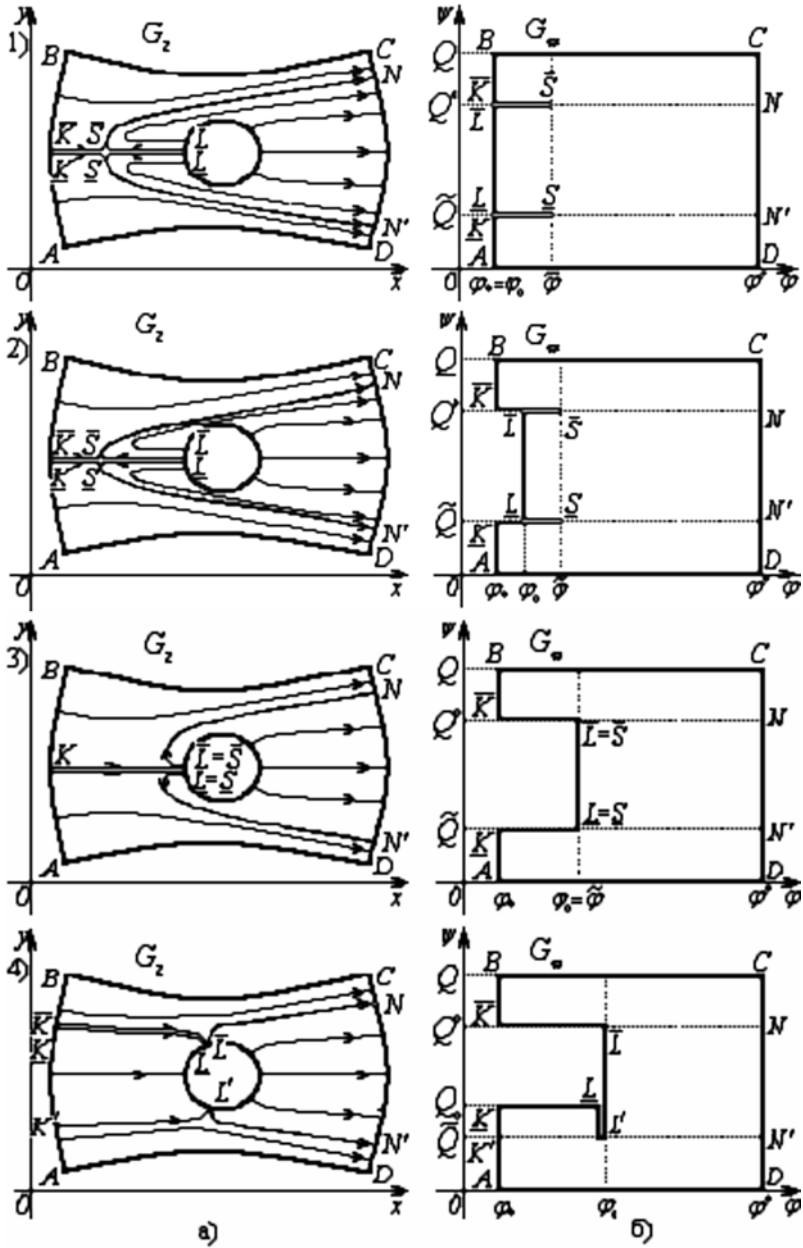


Рис. 2. Ситуаційні стани формування течії при $\varphi_* \leq \varphi_0 < \bar{\varphi}_0$

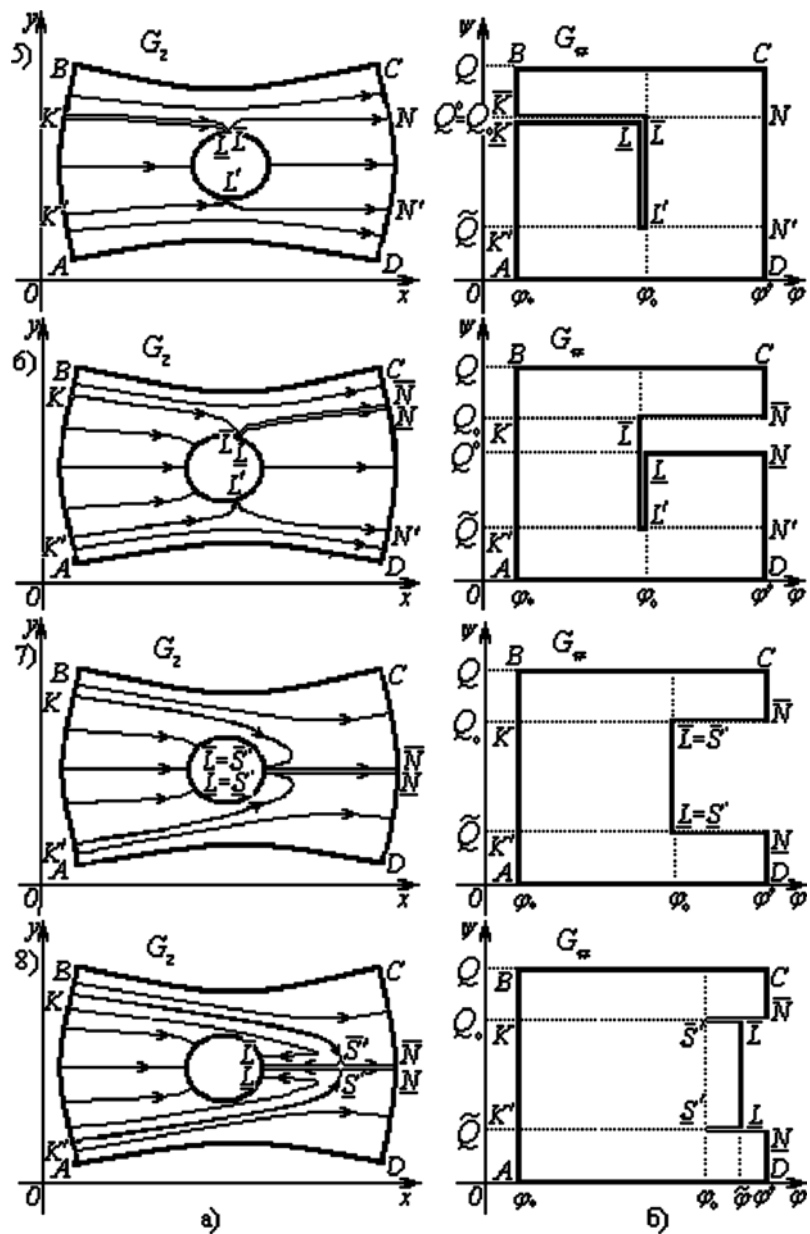


Рис. 3. Ситуаційні стани формування течії при $\bar{\varphi}_0 \leq \varphi_0 \leq \varphi^*$

А саме, спочатку пропонуємо розв'язувати задачу (3)-(4)-(5.2) для випадку 3.5 при невідомому $\bar{\varphi}_0$ та додатковій умові $Q_0 = Q^0$. Якщо задане в умові значення φ_0 задовольняє нерівність $\varphi_0 < \bar{\varphi}_0$, то переходимо до випадків 2.1-2.4, у разі $\varphi_0 > \bar{\varphi}_0$ – до 3.6-3.8. Припустимо, що $\varphi_0 < \bar{\varphi}_0$ (для інших випадків – алгоритм вибору будується аналогічно). В результаті розв'язання задачі (3)-(4)-(5.1) для випадку 2.3 (при умові $S = L$) визначимо, зокрема, φ_0^1 . Якщо отримане значення $\varphi_0^1 > \varphi_0$, то переходимо до випадку (2.2), а при $\varphi_0^1 < \varphi_0$ – до випадку (2.3).

Приклад розв'язання однієї з конкретних задач. Проілюструємо алгоритм розв'язку задачі для «ключового» випадку 2.5 – задачі на квазіконформне відображення криволінійної чотирикутної однозв'язної області $G_z^0 = G_z \setminus KL$ ($KL = \overline{KL} = \underline{KL}$) на область комплексного квазіпотенціалу (прямокутний багатокутник)

$$G_{\varpi} = \tilde{G}_{\varpi}^1 \cup \tilde{G}_{\varpi}^2 \cup \tilde{G}_{\varpi}^3 \cup \tilde{G}_{\varpi}^4 \cup \tilde{G}_{\varpi}^5 \cup \tilde{G}_{\varpi}^6,$$

$$\tilde{G}_{\varpi}^1 = \{\varpi : \varphi_* < \varphi \leq \varphi_0, 0 < \psi < \tilde{Q}\}, \quad \tilde{G}_{\varpi}^2 = \{\varpi : \varphi_0 < \varphi \leq \varphi^*, 0 < \psi \leq \tilde{Q}\},$$

$$\tilde{G}_{\varpi}^3 = \{\varpi : \varphi < \varphi < \bar{\varphi}_0, \tilde{Q} \leq \psi < Q^0\}, \quad \tilde{G}_{\varpi}^4 = \{\varpi : \bar{\varphi}_0 < \varphi < \varphi^*, \tilde{Q} < \psi \leq Q_0\},$$

$$\tilde{G}_{\varpi}^5 = \{\varpi : \varphi_* < \varphi \leq \bar{\varphi}_0, Q_0 < \psi < Q\},$$

$$\tilde{G}_{\varpi}^6 = \{\varpi : \bar{\varphi}_0 < \varphi < \varphi^*, Q_0 < \psi < Q\}$$

з невідомими параметрами – витратами Q , \tilde{Q} , $Q_0 = Q^0$ та потенціалом $\varphi_0 = \bar{\varphi}_0$. При розв'язанні цієї задачі за аналогією до [2] переходимо до відповідної оберненої задачі на квазіконформне відображення $G_{\varpi} \rightarrow G_z^0$, яка, в свою чергу, зводиться до знаходження розв'язку ($x = x(\varphi, \psi)$, $y = y(\varphi, \psi)$) нелінійної еліптичної системи диференціальних рівнянь:

$$\frac{\partial x}{\partial \varphi} = g(x, y) \frac{\partial y}{\partial \psi}, \quad \frac{\partial x}{\partial \psi} = -\frac{1}{g(x, y)} \frac{\partial y}{\partial \varphi},$$

а отже, розв'язків $x = x(\varphi, \psi)$, $y = y(\varphi, \psi)$ відповідних рівнянь:

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{g(x, y)} \frac{\partial x}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial}{\partial \psi} \left(g(x, y) \frac{\partial x}{\partial \psi} \right) = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{g(x, y)} \frac{\partial y}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial}{\partial \psi} \left(g(x, y) \frac{\partial y}{\partial \psi} \right) = 0,$$
(6)

за крайових умов:

$$\left\{ \begin{array}{l} f_*(x(\varphi_*, \psi), y(\varphi_*, \psi)) = 0, \quad 0 \leq \psi \leq Q_0 \vee Q^0 \leq \psi \leq Q, \\ f^*(x(\varphi^*, \psi), y(\varphi^*, \psi)) = 0, \quad 0 \leq \psi \leq Q, \\ g_*(x(\varphi, 0), y(\varphi, 0)) = 0, \quad \varphi_* \leq \varphi \leq \varphi^*, \\ g^*(x(\varphi, Q), y(\varphi, Q)) = 0, \quad \varphi_* \leq \varphi \leq \varphi^*, \\ f_0(x(\bar{\varphi}_0, \psi), y(\bar{\varphi}_0, \psi)) = 0, \quad 0 \leq \psi < Q_0 \vee 0 \leq \psi < Q^0, \\ v(x(\bar{\varphi}_0, Q_0), y(\bar{\varphi}_0, Q_0)) = v(x(\bar{\varphi}_0, Q^0), y(\bar{\varphi}_0, Q^0)) = 0, \\ v(x(\bar{\varphi}_0, \tilde{Q}), y(\bar{\varphi}_0, \tilde{Q})) = 0, \quad Q_0 = Q^0. \end{array} \right. \quad (7)$$

Алгоритм наближеного розв'язання останньої задачі побудуємо так:

1. Задаємо рівняння обмежуючих криволінійний чотирикутник $G_z = ABCD$ ліній: $AB = \{w: f_*(x, y) = 0\}$, $CD = \{w: f^*(x, y) = 0\}$, $AD = \{w: g_*(x, y) = 0\}$, $CB = \{w: g^*(x, y) = 0\}$, $l = \{w: f_0(x, y) = 0\}$ та функцію (що характеризує просторовість вихідної області) $g = g(x, y)$; параметри φ_* , φ^* , m , m_0 , n , n_0 , n_1 , сіткової області

$$G_\omega^\gamma = \bigcup_{s=1}^6 G_\omega^{(s)}(\gamma_s), \quad G_\omega^{(1)}(\gamma_1) = \left\{ (\varphi_i, \psi_j) : \varphi_i = \varphi_* + \Delta\varphi_1 i, \quad i = \overline{0, m_0}, \right. \\ \left. \psi_j = \Delta\psi_1 j, \quad j = \overline{0, n_0}, \quad \gamma_1 = \frac{\Delta\varphi_1}{\Delta\psi_1} \right\},$$

$$G_\omega^{(2)}(\gamma_2) = \left\{ (\varphi_i, \psi_j) : \varphi_{i+m_0+1} = \overline{\varphi_0} + \Delta\varphi_2 i, \quad i = \overline{0, m-m_0}, \quad \psi_j = \Delta\psi_1 j, \right. \\ \left. j = \overline{0, n_0}, \quad \gamma_2 = \frac{\Delta\varphi_2}{\Delta\psi_1} \right\},$$

$$G_\omega^{(3)}(\gamma_3) = \left\{ (\varphi_i, \psi_j) : \varphi_i = \varphi_* + \Delta\varphi_1 i, \quad i = \overline{0, m_0}, \quad \psi_{j+n_0} = \tilde{Q} + \Delta\psi_2 j, \right. \\ \left. j = \overline{0, n_1 - n_0}, \quad \gamma_3 = \frac{\Delta\varphi_1}{\Delta\psi_2} \right\},$$

$$G_\omega^{(4)}(\gamma_4) = \left\{ (\varphi_i, \psi_j) : \varphi_{i+m_0+1} = \overline{\varphi_0} + \Delta\varphi_2 i, \quad i = \overline{0, m-m_0}, \right. \\ \left. \psi_{j+n_0} = \tilde{Q} + \Delta\psi_2 j, \quad j = \overline{0, n_1 - n_0}, \quad \gamma_4 = \frac{\Delta\varphi_2}{\Delta\psi_2} \right\},$$

$$G_{\omega}^{(5)}(\gamma_5) = \left\{ \left(\varphi_i, \psi_j \right) : \varphi_i = \overline{\varphi_* + \Delta\varphi_1 i}, \quad i = \overline{0, m_0}, \quad \psi_{j+n_1} = \overline{Q^0 + \Delta\psi_3 j}, \right. \\ \left. j = \overline{0, n-n_1}, \quad \gamma_5 = \frac{\Delta\varphi_1}{\Delta\psi_3} \right\},$$

$$G_{\omega}^{(6)}(\gamma_6) = \left\{ \left(\varphi_i, \psi_j \right) : \varphi_{i+m_0+1} = \overline{\varphi_0 + \Delta\varphi_2 i}, \quad i = \overline{0, m-m_0}, \right. \\ \left. \psi_{j+n_1} = \overline{Q^0 + \Delta\psi_3 j}, \quad j = \overline{0, n-n_1}, \quad \gamma_6 = \frac{\Delta\varphi_3}{\Delta\psi_3} \right\},$$

$$\text{де } \Delta\varphi_1 = \frac{\varphi_0 - \varphi_*}{m_0}; \quad \Delta\varphi_2 = \frac{\varphi^* - \overline{\varphi_0}}{m - m_0}; \quad \Delta\psi_1 = \frac{\tilde{Q}}{n_0}; \quad \Delta\psi_2 = \frac{Q_0 - \tilde{Q}}{n_1 - n_0};$$

$$\Delta\psi_3 = \frac{Q - Q^0}{n - n_1}, \text{ значення параметра точності } \varepsilon.$$

2. Задаємо початкові наближення $(x_{i,j}^{(0)}, y_{i,j}^{(0)})$ координат внутрішніх вузлів

$$(x_{i,j}, y_{i,j}) = (x(\varphi_i, \psi_j), y(\varphi_i, \psi_j)),$$

$$(i, j) = (1; m) \times (1, n-1) / \left\{ (m_0, m_0+1) \times (n_0; n_1) \right\}$$

(зокрема, вузлів розрізу KL : $i = \overline{1, m_0-1}$, $j = n_1$), причому $(x_{m_0,j}, y_{m_0,j}) = (x_{m_0+1,j}, y_{m_0+1,j})$ для $j = \overline{1, n_0-1} \cup \overline{n_1+1, n-1}$; граничних вузлів так, щоб виконувались рівності:

$$f_*(x_{0,j}^{(0)}, y_{0,j}^{(0)}) = 0, \quad f^*(x_{m,j}^{(0)}, y_{m,j}^{(0)}) = 0, \quad j = \overline{0, n}, \quad g_*(x_{i,0}^{(0)}, y_{i,0}^{(0)}) = 0,$$

$$g^*(x_{i,n}^{(0)}, y_{i,n}^{(0)}) = 0, \quad i = \overline{0, m+1}, \quad f_0(x_{m_0,j}^{(0)}, y_{m_0,j}^{(0)}) = f_0(x_{m_0+1,j}^{(0)}, y_{m_0+1,j}^{(0)}) = 0,$$

$$j = \overline{n_0, n_1}, \quad (x_{m_0,n_0}^{(0)}, y_{m_0,n_0}^{(0)}) = (x_{m_0+1,n_0}^{(0)}, y_{m_0+1,n_0}^{(0)}), \quad (x_{m_0,n_1}^{(0)}, y_{m_0,n_1}^{(0)}) =$$

$$= (x_{m_0+1,n_1}^{(0)}, y_{m_0+1,n_1}^{(0)}), \quad v(x_{m_0,n_0}^{(0)}, y_{m_0,n_0}^{(0)}) = v(x_{m_0,n_1}^{(0)}, y_{m_0,n_1}^{(0)}) = 0,$$

$$\text{де: } v_{m_0,n_0} = \frac{(\Delta\varphi_1 + \Delta\varphi_2)g_{m_0,n_0}}{J_{m_0,n_0}} \sqrt{(x_{m_0,n_0} - x_{m_0,n_0-1})^2 + (y_{m_0,n_0} - y_{m_0,n_0-1})^2},$$

$$J_{m_0,n_0} = (x_{m_0+2,n_0} - x_{m_0-1,n_0})(y_{m_0,n_0} - y_{m_0,n_0-1}) - (y_{m_0+2,n_0} - y_{m_0-1,n_0}) \times \\ \times (x_{m_0,n_0} - x_{m_0,n_0-1}),$$

$$v_{m_0,n_1} = \frac{(\Delta\varphi_1 + \Delta\varphi_2)g_{m_0,n_1}}{J_{m_0,n_1}} \sqrt{(x_{m_0,n_1+1} - x_{m_0,n_1})^2 + (y_{m_0,n_1+1} - y_{m_0,n_1})^2},$$

$$J_{m_0,n_1} = (x_{m_0+2,n_1} - x_{m_0-1,n_1}) \times (y_{m_0,n_1+1} - y_{m_0,n_1}) -$$

$$-(y_{m_0+2,n_1} - y_{m_0-1,n_1})(x_{m_0,n_1+1} - x_{m_0,n_1}), \quad g_{i,j} = g(x_{i,j}, y_{i,j}).$$

3. Знаходимо відповідне наближення параметрів квазі-конформності $\gamma_s = \gamma_s(x_{i,j}, y_{i,j})$ в кожній з областей $G_\omega^{(s)}$ ($s = \bar{1}, \bar{6}$):

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \frac{1}{m_0 n_0} \sum_{i,j=0}^{m_0-1, n_0-1} \gamma_{i,j}, \quad \gamma_2 = \frac{1}{(m-m_0)n_0} \sum_{i,j=m_0+1,0}^{m,n_0-1} \gamma_{i,j}, \\ \gamma_3 &= \frac{1}{m_0(n_1-n_0)} \sum_{i,j=0, n_0}^{m_0-1, n_1-1} \gamma_{i,j}, \quad \gamma_4 = \frac{1}{(m-m_0)(n_1-n_0)} \sum_{i,j=m_0+1, n_0}^{m, n_1-1} \gamma_{i,j}, \\ \gamma_5 &= \frac{1}{m_0(n-n_1)} \sum_{i,j=0, n_1}^{m_0-1, n-1} \gamma_{i,j}, \quad \gamma_6 = \frac{1}{(m-m_0)(n-n_1)} \sum_{i,j=m_0+1, n_1}^{m, n-1} \gamma_{i,j}, \\ \gamma_{i,j} &= \left(\sqrt{(x_{i+1,j} - x_{i,j})^2 + (y_{i+1,j} - y_{i,j})^2} + \right. \\ &+ \left. \sqrt{(x_{i+1,j+1} - x_{i,j+1})^2 + (y_{i+1,j+1} - y_{i,j+1})^2} \right) \times \\ &\times g_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}}^{-1} \left(\sqrt{(x_{i,j+1} - x_{i,j})^2 + (y_{i,j+1} - y_{i,j})^2} + \right. \\ &+ \left. \sqrt{(x_{i+1,j+1} - x_{i+1,j})^2 + (y_{i+1,j+1} - y_{i+1,j})^2} \right)^{-1}, \\ g_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}} &= g\left(\frac{(x_{i,j} + x_{i+1,j})}{2}, \frac{(y_{i,j} + y_{i,j+1})}{2}\right). \end{aligned}$$

На основі одержаних значень γ_s визначаємо кроки розбиття $\Delta\varphi_1, \Delta\psi_1, \Delta\psi_2, \Delta\psi_3$, наприклад, за формулами:

$$\Delta\varphi_1 = \frac{\gamma_1(\varphi^* - \varphi_*)}{\gamma_1 m_0 + \gamma_2(m - m_0)}, \quad \Delta\psi_1 = \frac{\Delta\varphi_1}{\gamma_1}, \quad \Delta\psi_2 = \frac{\Delta\varphi_1}{\gamma_3}, \quad \Delta\psi_3 = \frac{\Delta\varphi_1}{\gamma_5}$$

і знаходимо відповідні значення параметрів $\bar{\varphi}_0, \bar{Q}, Q_0, Q$:

$$\begin{aligned} \bar{\varphi}_0 &= \Delta\varphi_1 \cdot m_0, \quad \bar{Q} = \Delta\psi_1 \cdot n_0, \quad Q_0 = Q^0 = \Delta\psi_2 \cdot (n_1 - n_0) + \bar{Q}, \\ Q &= \Delta\psi_3 \cdot (n - n_1) + Q_0. \end{aligned}$$

4. Проводимо уточнення координат внутрішніх вузлів $(x_{i,j}^{(p)}, y_{i,j}^{(p)})$ ($p = 1, 2, \dots$ – крок ітерації) кожної з шести розглянутих підобластей (на основі різницевих аналогів умов (8), де значення γ вибирається залежно від номеру під області, в якій ведуться обчислення):

$$\begin{aligned}
 x_{i,j}^{(k+1)} &= \left(x_{i+1,j}^{(k)} + x_{i-1,j}^{(k+1)} + \gamma^{(k)2} g_{i,j}^2 \left(x_{i,j-1}^{(k+1)} + x_{i,j+1}^{(k)} \right) + \right. \\
 &+ \frac{1}{4} \gamma^{(k)2} g_{i,j} \left(g'_{x \ i,j} \left(x_{i,j+1}^{(k)} - x_{i,j-1}^{(k+1)} \right) + g'_{y \ i,j} \left(y_{i,j+1}^{(k)} - y_{i,j-1}^{(k+1)} \right) \right) \left(x_{i,j+1}^{(k)} - x_{i,j-1}^{(k+1)} \right) - \\
 &\quad - \frac{1}{4g_{i,j}} \left(g'_{x \ i,j} \left(x_{i+1,j}^{(k)} - x_{i-1,j}^{(k+1)} \right) + \right. \\
 &\quad \left. + g'_{y \ i,j} \left(y_{i+1,j}^{(k)} - y_{i-1,j}^{(k+1)} \right) \right) \left(x_{i+1,j}^{(k)} - x_{i-1,j}^{(k+1)} \right) \Big/ 2 \left(1 + \gamma^{(k)2} g_{i,j}^2 \right), \\
 y_{i,j}^{(k+1)} &= \left(y_{i+1,j}^{(k)} + y_{i-1,j}^{(k+1)} + \gamma^{(k)2} g_{i,j}^2 \left(y_{i,j-1}^{(k+1)} + y_{i,j+1}^{(k)} \right) + \right. \\
 &+ \frac{1}{4} \gamma^{(k)2} g_{i,j} \left(g'_{x \ i,j} \left(x_{i,j+1}^{(k)} - x_{i,j-1}^{(k+1)} \right) + g'_{y \ i,j} \left(y_{i,j+1}^{(k)} - y_{i,j-1}^{(k+1)} \right) \right) \left(y_{i,j+1}^{(k)} - y_{i,j-1}^{(k+1)} \right) - \\
 &\quad - \frac{1}{4g_{i,j}} \left(g'_{x \ i,j} \left(x_{i+1,j}^{(k)} - x_{i-1,j}^{(k+1)} \right) + g'_{y \ i,j} \times \right. \\
 &\quad \left. \times \left(y_{i+1,j}^{(k)} - y_{i-1,j}^{(k+1)} \right) \right) \left(y_{i+1,j}^{(k)} - y_{i-1,j}^{(k+1)} \right) \Big/ 2 \left(1 + \gamma^{(k)2} g_{i,j}^2 \right)
 \end{aligned}$$

(тут i надалі $g'_{x \ i,j} = g'_x(x_{i,j}, y_{i,j})$, $g'_{y \ i,j} = g'_y(x_{i,j}, y_{i,j})$, $i = \overline{1, m-1} \setminus \{m_0\}$, $i = \overline{1, n-1} \setminus \{n_0, n_1\}$. На межах підобластей уточнення внутрішніх вузлів проводимо за наступними формулами:

$$\begin{aligned}
 x_{m_0+1,j}^{(k+1)} &= x_{m_0,j}^{(k+1)} = \left(2\gamma_* x_{m_0+2,j}^{(k+1)} + 2\gamma^* x_{m_0-1,j}^{(k+1)} + g_{i,j}^2 \left(x_{m_0,j+1}^{(k)} + x_{m_0,j-1}^{(k+1)} \right) \gamma_* \gamma^* \left(\gamma_* + \gamma^* \right) - \right. \\
 &\quad - \frac{\gamma_* \gamma^*}{\left(\gamma_* + \gamma^* \right) g_{m_0,j}} \left(g'_{x \ m_0,j} \left(x_{m_0+2,j}^{(k)} - x_{m_0-1,j}^{(k+1)} \right) + g'_{y \ m_0,j} \left(y_{m_0+2,j}^{(k)} - y_{m_0-1,j}^{(k+1)} \right) \right) \times \\
 &\quad \times \left(x_{m_0+2,j}^{(k)} - x_{m_0-1,j}^{(k+1)} \right) + \frac{g_{m_0,j}}{4} \frac{\gamma_* \gamma^*}{\gamma_* + \gamma^*} \left(g'_{x \ m_0,j} \left(x_{m_0,j+2}^{(k)} - x_{m_0,j-1}^{(k+1)} \right) + g'_{y \ m_0,j} \times \right. \\
 &\quad \times \left. \left(y_{m_0,j+1}^{(k)} - y_{m_0,j-1}^{(k+1)} \right) \right) \left(y_{m_0,j+1}^{(k)} - y_{m_0,j-1}^{(k+1)} \right) \Big/ \left(2\gamma_*^* + 2\gamma_* + 2\gamma_* \gamma^* \left(\gamma_* + \gamma^* \right) g_{m_0,j}^2 \right), \\
 y_{m_0+1,j}^{(k+1)} &= y_{m_0,j}^{(k+1)} = \left(2\gamma_* y_{m_0+2,j}^{(k)} + 2\gamma^* y_{m_0-1,j}^{(k+1)} + g_{i,j}^2 \left(y_{m_0,j+1}^{(k)} + y_{m_0,j-1}^{(k+1)} \right) \times \right. \\
 &\quad \times \gamma_* \gamma^* \left(\gamma_* + \gamma^* \right) - \frac{\gamma_* \gamma^*}{\left(\gamma_* + \gamma^* \right) g_{m_0,j}} \left(g'_{x \ m_0,j} \left(x_{m_0+2,j}^{(k)} - x_{m_0-1,j}^{(k+1)} \right) + \right. \\
 &\quad \left. + g'_{y \ m_0,j} \left(y_{m_0+2,j}^{(k)} - y_{m_0-1,j}^{(k+1)} \right) \right) \left(y_{m_0+2,j}^{(k)} - y_{m_0-1,j}^{(k+1)} \right) + \frac{g_{m_0,j}}{4} \times
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \times \frac{\gamma_* \gamma^*}{\gamma_* + \gamma^*} \left(g'_{x m_0, j} \left(x_{m_0, j+1}^{(k)} - x_{m_0, j-1}^{(k+1)} \right) + g'_{y m_0, j} \left(y_{m_0, j+1}^{(k)} - y_{m_0, j-1}^{(k+1)} \right) \right) \times \\ & \quad \times \left(y_{m_0, j+1}^{(k)} - y_{m_0, j-1}^{(k+1)} \right) \Big/ \left(2\gamma^* + 2\gamma_* + 2\gamma_* \gamma^* \left(\gamma_* + \gamma^* \right) g_{m_0, j}^2 \right), \\ & \gamma_* = \gamma_1, \gamma^* = \gamma_2 \text{ при } j = \overline{1, n_0 - 1}, \gamma_* = \gamma_5, \gamma^* = \gamma_6 \text{ при } j = \overline{n_1 + 1, n - 1}; \\ & x_{i, \tilde{n}}^{(k+1)} = \left(x_{i+1, \tilde{n}}^{(k)} + x_{i, \tilde{n}}^{(k+1)} + 2g_{i, \tilde{n}}^2 \frac{\gamma_* \gamma^*}{\gamma_* + \gamma^*} \left(\gamma^* x_{i, \tilde{n}+1}^{(k)} + \gamma_* x_{i, \tilde{n}-1}^{(k+1)} \right) + \left(g'_{x i, \tilde{n}} \times \right. \right. \\ & \quad \times \left(x_{i+1, \tilde{n}}^{(k)} - x_{i-1, \tilde{n}}^{(k+1)} \right) + g'_{y i, \tilde{n}} \left(y_{i+1, \tilde{n}}^{(k)} - y_{i-1, \tilde{n}}^{(k+1)} \right) \Big) \frac{\left(x_{i+1, \tilde{n}}^{(k)} - x_{i-1, \tilde{n}}^{(k+1)} \right)}{g_{i, \tilde{n}}} + \frac{\left(\gamma_* \gamma^* \right)^2}{\left(\gamma_* + \gamma^* \right)^2} \times \\ & \quad \times g_{i, \tilde{n}} \left(g'_{x i, \tilde{n}} \left(x_{i, \tilde{n}+1}^{(k)} - x_{i, \tilde{n}-1}^{(k+1)} \right) + g'_{y i, \tilde{n}} \left(y_{i, \tilde{n}+1}^{(k)} - y_{i, \tilde{n}-1}^{(k+1)} \right) \right) \left(x_{i, \tilde{n}+1}^{(k)} - x_{i, \tilde{n}-1}^{(k+1)} \right) \Big/ \left(2 \times \right. \\ & \quad \times \left. \left(1 + \gamma_* \gamma^* g_{i, \tilde{n}}^2 \right) \right), y_{i, \tilde{n}}^{(k+1)} = \left(y_{i+1, \tilde{n}}^{(k)} + y_{i, \tilde{n}}^{(k+1)} + 2g_{i, \tilde{n}}^2 \frac{\gamma_* \gamma^*}{\gamma_* + \gamma^*} \left(\gamma^* y_{i, \tilde{n}+1}^{(k)} + \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \gamma_* y_{i, \tilde{n}-1}^{(k+1)} \right) + \frac{\left(y_{i+1, \tilde{n}}^{(k)} - y_{i-1, \tilde{n}}^{(k+1)} \right)}{g_{i, \tilde{n}}} \left(g'_{x i, \tilde{n}} \left(x_{i+1, \tilde{n}}^{(k)} - x_{i-1, \tilde{n}}^{(k+1)} \right) + g'_{y i, \tilde{n}} \left(y_{i+1, \tilde{n}}^{(k)} - \right. \right. \right. \\ & \quad \left. \left. \left. - y_{i-1, \tilde{n}}^{(k+1)} \right) \right) + \frac{\left(\gamma_* \gamma^* \right)^2}{\left(\gamma_* + \gamma^* \right)^2} g_{i, \tilde{n}} \left(g'_{x i, \tilde{n}} \left(x_{i, \tilde{n}+1}^{(k)} - x_{i, \tilde{n}-1}^{(k+1)} \right) + g'_{y i, \tilde{n}} \left(y_{i, \tilde{n}+1}^{(k)} - y_{i, \tilde{n}-1}^{(k+1)} \right) \right) \times \\ & \quad \times \left(y_{i, \tilde{n}+1}^{(k)} - y_{i, \tilde{n}-1}^{(k+1)} \right) \Big/ \left(2 \left(1 + \gamma_* \gamma^* g_{i, \tilde{n}}^2 \right) \right), \end{aligned}$$

якщо $i = \overline{1, m_0 - 1}$, то $\gamma_* = \gamma_1, \gamma^* = \gamma_3$ при $\tilde{n} = n_0$ або $\gamma_* = \gamma_3, \gamma^* = \gamma_5$ при $\tilde{n} = n_1$; якщо $i = \overline{m_0 + 1, m - 1}$, то $\gamma_* = \gamma_2, \gamma^* = \gamma_4$ при $\tilde{n} = n_0$ або $\gamma_* = \gamma_4, \gamma^* = \gamma_6$ при $\tilde{n} = n_1$.

5. Уточнення координат граничних вузлів здійснюємо, виходячи з умов колінеарності:

$$\begin{aligned} f'_{*x} \left(x_{0, j}^{(k)}, y_{0, j}^{(k)} \right) \Big/ \left(x_{1, j}^{(k)} - x_{0, j}^{(k)} \right) &= f'_{*y} \left(x_{0, j}^{(k)}, y_{0, j}^{(k)} \right) \Big/ \left(y_{1, j}^{(k)} - y_{0, j}^{(k)} \right), \\ f_x^{*r} \left(x_{m, j}^{(k)}, y_{m, j}^{(k)} \right) \Big/ \left(x_{m, j}^{(k)} - x_{m-1, j}^{(k)} \right) &= f_y^{*r} \left(x_{m, j}^{(k)}, y_{m, j}^{(k)} \right) \Big/ \left(y_{m, j}^{(k)} - y_{m-1, j}^{(k)} \right), j = \overline{1, n-1}; \\ g'_{*x} \left(x_{i, 0}^{(k)}, y_{i, 0}^{(k)} \right) \left(x_{i, 1}^{(k)} - x_{i, 0}^{(k)} \right)^{-1} &= g'_{*y} \left(x_{i, 0}^{(k)}, y_{i, 0}^{(k)} \right) \Big/ \left(y_{i, 1}^{(k)} - y_{i, 0}^{(k)} \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_{x'}^* \left(x_{i,n}^{(k)}, y_{i,n}^{(k)} \right) \left(x_{i,n}^{(k)} - x_{i,n-1}^{(k)} \right)^{-1} &= g_{y'}^* \left(x_{i,n}^{(k)}, y_{i,n}^{(k)} \right) / \left(y_{i,n}^{(k)} - y_{i,n-1}^{(k)} \right), \quad i = \overline{1, m-1}; \\ f'_{0x} \left(x_{m_0,j}^{(k)}, y_{m_0,j}^{(k)} \right) / \left(x_{m_0-1,j}^{(k)} - x_{m_0,j}^{(k)} \right) &= f'_{0y} \left(x_{m_0,j}^{(k)}, y_{m_0,j}^{(k)} \right) / \left(y_{m_0-1,j}^{(k)} - y_{m_0,j}^{(k)} \right), \\ f'_{0x} \left(x_{m_0+1,j}^{(k)}, y_{m_0+1,j}^{(k)} \right) / \left(x_{m_0+2,j}^{(k)} - x_{m_0+1,j}^{(k)} \right) &= \\ = f'_{0y} \left(x_{m_0+1,j}^{(k)}, y_{m_0+1,j}^{(k)} \right) / \left(y_{m_0+2,j}^{(k)} - y_{m_0+1,j}^{(k)} \right), \quad j = \overline{n_0+1, n_1-1} \end{aligned}$$

та відповідних дискретних аналогів умов (7).

6. При виконанні умов: $\left| Q^{(k+1)} - Q^{(k)} \right| < \varepsilon$, $\left| \varphi_0^{(k+1)} - \varphi_0^{(k)} \right| < \varepsilon$;
 $\max_{x_{i,j}, y_{i,j}} \left(\left| x_{i,j}^{(k+1)} - x_{i,j}^{(k)} \right|, \left| y_{i,j}^{(k+1)} - y_{i,j}^{(k)} \right| \right) < \varepsilon$, $i = \overline{0, m}$, $j = \overline{0, n}$ обчислювальний процес припиняємо; у протилежному випадку переходимо до пункту 3, де визначаємо нові наближення параметрів $\gamma_s = \gamma_s(x_{i,j}, y_{i,j})$, φ_0 , Q .

Висновки. Задачу прогнозування ідеальної течії у спеціального типу просторовій області – криволінійному паралелепіпеді з деякою циліндричною порожниною, обмеженому чотирма поверхнями течії та трьома еквіпотенціальними поверхнями, зведено до задачі на квазіконформне відображення криволінійної двозв'язної області з розрізом вздовж лінії течії, що проходить через точку призупинки, на внутрішність прямокутного многокутника із паралельними осям координат сторонами. Для розв'язання останньої здійснено евристичний опис (з наступним логічним обґрунтуванням) усіх можливих випадків формування течії та розроблено процедуру автоматизованого вибору відповідного випадку на основі аналізу «ключових» (оптимізаційних) випадків залежно від заданого значення керуючого потенціалу $\varphi_* \leq \varphi_0 \leq \varphi^*$. Наведено алгоритм розв'язання задачі у випадку рівності нулю потоку через внутрішній контур.

Зауважимо, що при побудові програмного комплексу розв'язання задачі, який включає і алгоритм вибору, і алгоритми розв'язування задач у конкретних трьох «ключових», двох «оптимізаційно-ключових» та чотирьох проміжних випадках, взагалі кажучи, крім загальної оболонки, потрібно мати ще й 9 відповідних підпрограм. При цьому, розв'язки «ключових» та «оптимізаційно-ключових» задач одержуються автономно, і на їх основі будується алгоритм вибору. У перспективі є побудова загального алгоритму розв'язку, на основі послідовного (із зміною кроку) перебору характерних значень $\varphi_0 \in [\varphi_*, \varphi^*]$.

Список використаних джерел:

1. Бомба А. Я. Нелінійні математичні моделі процесів геогідродинаміки / А. Я. Бомба, В. М. Булавацький, В. В. Скопечкий. – К. : Наук. думка, 2007. – 308 с.
2. Бомба А. Я. Чисельне розв'язання обернених нелінійних крайових задач на конформні та квазіконформні відображення / А. Я. Бомба, С. С. Каштан // Волинський математичний вісник. – 2001. – Вип.8. – С. 9–23.
3. Бомба А. Я. Про розв'язання одного класу нелінійних обернених крайових задач на конформні відображення / А. Я. Бомба, С. С. Каштан // Волинський математичний вісник. – 1999. – Вип. 6. – С. 25–36.
4. Бомба А. Я. Чисельне розв'язання одного класу обернених крайових задач на конформні відображення для трив'язних областей з потенціалом керування / А. Я. Бомба, Д. О. Пригорницький // Вісник Київського університету. Серія фізико-математичні науки. – 2003. – Вип. 4. – С. 155–162.
5. Бомба А. Я. Просторові узагальнення крайових задач на конформні відображення з особливостями / А. Я. Бомба, А. В. Теревус // Вісник Харк. нац. ун-ту. – 2009. – № 863. Сер. «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління». – Вип. 12. – С. 13–20.
6. Бомба А. Я. Просторові гармонічні многочлени та аналоги задач на конформні відображення / А. Я. Бомба, А. В. Теревус // Волинський математичний вісник. Серія “прикладна математика”. – 2008. – 5(14). – С. 39–63.
7. Климюк Ю. Є. Числове розв'язання обернених крайових задач на просторові конформні відображення криволінійних паралелепедів на прямокутні / Ю. Є. Климюк, Д. О. Пригорницький // Волинський математичний вісник. Серія “прикладна математика”. – 2008. – 5(14). – С. 104–143.
8. Лаврентьев М. А. Проблемы гидродинамики и их математические модели / М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат. – М. : Наука, 1977. – 408 с.
9. Кочин Н. Е. Теоретическая гидродинамика / Н. Е. Кочин, И. А. Кибель, Н. В. Розе. – Ч. 1, 6-е изд. перераб. и доп. – М. : Физматгиз, 1963. – 583 с.
10. Пивень В. Ф. Теория и приложения математических моделей фильтрационных течений жидкости / В. Ф. Пивень. – Орёл : Изд. ГОУ ВПО «Орловский государственный университет» ; полиграфическая фирма «Картуш», 2006. – 508 с.
11. Рауз Х. Механика жидкости / Х. Рауз. – М. : Стройиздат, 1967. – 390 с.

An ideal process in a double-connected spatial area of the special type, such as the curvilinear parallelepiped with certain cylindrical cavity restricted by four surfaces of the flow and three equipotential surfaces (two opposite faces and the interior surface, the last is the carrier of the control potential) is considered. The system analysis of the cases of flow formation depending on the control potential was realized, the decision algorithm was built and the problem in the case when the flow through the interior contour is equal to zero (as an example) was solved.

Key words: *quasiconformal mappings, control potential, decision algorithm.*

Отримано: 13.05.2010