УДК 517.954:532.546

В. М. Булавацкий, д-р техн. наук,
В. В. Скопецкий, д-р физ.-мат. наук, чл.-кор. НАН Украины
Институт кибернетики им. В. М. Глушкова НАН Украины, г. Киев

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ ОДНОГО НЕИЗОТЕРМИЧЕСКОГО КОНСОЛИДАЦИОННОГО ПРОЦЕССА

Построена математическая модель, описывающая в первом приближении динамику неизотермического процесса консолидации пористых сред насыщенных бикомпонентными растворами. Поставлена соответствующая предложенной модели нелинейная краевая задача и разработана методика ее приближенного решения.

Ключевые слова: *математическое моделирование, пористые среды, консолидация, массоперенос, нелинейные краевые задачи, приближенные решения.*

Введение. Математическое моделирование консолидационных процессов в деформируемых насыщенных пористых средах является одним из актуальных направлений геогидродинамики, причем указанное моделирование развивается преимущественно в предположении насыщенности пористых массивов чистой водой [1, 2]. Однако, в настоящее время ведутся комплексные исследования в области математического моделирования динамики указанных процессов в условиях насыщенности массивов солевыми растворами, учета релаксационных свойств как жидкости, так и грунтового скелета, учета неизотермичности условий протекания процессов и др. [3−8].

Некоторые математические модели консолидации деформируемых пористых сред при фильтрации однокомпонентных солевых растворов в неизотермических условиях рассмотрены, в частности, в [9]. В настоящей работе построена новая математическая модель, описывающая в первом приближении динамику неизотермического процесса консолидации деформируемых пористых сред насыщенных бикомпонентными растворами, поставлена соответствующая предложенной модели нелинейная краевая задача о фильтрационном уплотнении пористого массива конечной мощности, расположенного на проницаемом основании и разработана методика ее приближенного решения.

Построение математической модели процесса. Постановка краевой задачи. В случае неизотермической одномерной фильтрационной консолидации деформируемой пористой среды насыщенной бикомпонентным раствором будем исходить из следующего обобщения закона Дарси:

$$u_x = -k\frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\nu_1 C_1 + \nu_2 C_2\right) + \mu\frac{\partial T}{\partial x}, \tag{1}$$

где u_x – скорость фильтрации, k – коэффициент фильтрации, H – избыточный напор, C_i – концентрация *i*-го компонента смеси в подвижной фазе $(i = 1, 2)$, ν_i – коэффициент химического осмоса для *i*-го компонента $(i = 1, 2)$, T – температура жидкой фазы, μ – коэффициент термоосмоса.

Предположим, что в неизотермических условиях деформирования насыщенной пористой среды величина теплового расширения жидкой фазы пропорциональна T_t' с коэффициентом термического расширения β_T. Тогда уравнение неразрывности жидкой фазы с учетом линейного закона уплотнения и теплового расширения запишется в виде

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{k}{C_\upsilon}\frac{\partial H}{\partial t} = \beta_T \sigma \frac{\partial T}{\partial t}, \tag{2}$$

где C_υ – коэффициент консолидации [1, 2], σ – среднее значение пористости среды. Подставляя в (2) соотношение (1), получаем уравнение для определения избыточного напора $H(x, t)$ в виде

$$\frac{\partial H}{\partial t} = C_\upsilon \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\kappa_1 C_1 + \kappa_2 C_2 + \theta T\right) + \alpha_T \frac{\partial T}{\partial t}, \tag{3}$$

где
$$\kappa_i = \frac{\nu_i C_\upsilon}{k} \quad (i = 1, 2), \quad \theta = \frac{\mu C_\upsilon}{k}, \quad \alpha_T = \frac{\sigma \beta_T C_\upsilon}{k}. \tag{4}$$

Поскольку в неизотермических условиях имеет место явление термодиффузии, то удельные потоки растворимых веществ для каждого из компонентов имеют вид

$$q_i = u_x C_i - D_i \frac{\partial C_i}{\partial x} - D_T \frac{\partial T}{\partial x} \quad (i = 1, 2), \tag{5}$$

где D_i – коэффициент диффузии *i*-го компонента, D_T – коэффициент термодиффузии. Тогда из уравнения закона сохранения массы для каждого компонента, пренебрегая термическим расширением, получаем уравнения конвективной диффузии растворимых веществ при фильтрации бикомпонентного порового раствора в виде

$$\sigma \frac{\partial C_i}{\partial t} = D_i \frac{\partial^2 C_i}{\partial x^2} - u_x \frac{\partial C_i}{\partial x} + D_T \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad (i = 1, 2). \tag{6}$$

Термическое состояние среды будем моделировать уравнением

$$C_T \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \rho C_\rho u_x \frac{\partial T}{\partial x}, \tag{7}$$

где C_T – объемная теплоемкость среды, ρ – плотность порового раствора, C_ρ – удельная теплоемкость порового раствора, λ – коэффициент теплопроводности [10].

Таким образом, искомая математическая модель, описывающая в первом приближении динамику неизотермического процесса фильтрационной консолидации насыщенной бикомпонентным раствором деформируемой пористой среды, базируется на нелинейной системе дифференциальных уравнений (3), (6), (7), где величина скорости u_x определяется согласно соотношения (1).

Соответствующая рассматриваемой математической модели краевая задача о консолидации в неизотермических условиях насыщенного бикомпонентным раствором пористого массива конечной мощности l, расположенного, например, на проницаемом основании и находящегося под действием мгновенно приложенной к его поверхности постоянной нагрузки заданной интенсивности, сводится к решению в области $(0, l)\times(0, +\infty)$ системы уравнений (3), (6), (7) при следующих краевых условиях:

$$H(0,t)=0\,,\quad H(l,t)=0\,,\quad H(x,0)=H_0\,, \tag{8}$$

$$C_i(0,t)=C_i^{(0)}\,,\ \ \frac{\partial C_i(l,t)}{\partial x}=0\,,\ \ C_i(x,0)=0\,,\ \ (i=1,2)\,. \tag{9}$$

$$T(0,t)=T^{(0)}\,,\ \ \frac{\partial T(l,t)}{\partial x}=0\,,\ \ T(x,0)=T_0\,, \tag{10}$$

где $H_0, T_0, T^{(0)}, C_i^{(0)}$ $(i=1,2)$ – заданные величины.

Введем безразмерные переменные и параметры соотношениями

$$x'=\frac{x}{l}\,,\ \ t'=\frac{C_\upsilon t}{l^2}\,,\ \ H'=\frac{H}{H_0}\,,\ \ T'=\frac{T}{T^{(0)}}\,,\ \ C_i'=\frac{C_i}{C_i^{(0)}}\quad (i=1,2)\,,$$

$$T_0'=\frac{T_0}{T^{(0)}}\,,\ \kappa_i'=\frac{\kappa_i C_i^{(0)}}{C_\upsilon H_0}\quad (i=1,2)\,,\ \ \theta'=\frac{\theta T^{(0)}}{C_\upsilon H_0}\,,\ \ \alpha_T'=\frac{\alpha_T T^{(0)}}{H_0}\,,$$

$$D_i'=\frac{D_i}{C_\upsilon}\ \ (i=1,2)\,,\ \nu_i'=\frac{\nu_i C_i^{(0)}}{H_0}\quad (i=1,2)\,,\ \ \mu_1'=\frac{\mu_1 T^{(0)}}{C_\upsilon}\,, \tag{11}$$

$$r_i'=\frac{D_T T^{(0)}}{C_\upsilon C_i^{(0)}}\quad (i=1,2)\,,\ \lambda'=\frac{\lambda}{C_T C_\upsilon}\,,\ \ u_1'=\frac{\rho C_\rho k H_0}{C_\upsilon C_T}\,,\ \ \gamma_1'=\frac{\rho C_\rho \mu T^{(0)}}{C_\upsilon C_T}\,,$$

$$\delta_i'=\frac{\rho C_\rho \nu_i C_i^{(0)}}{C_\upsilon C_T}\quad (i=1,2)\,,\ \ u'=\frac{kH_0}{C_\upsilon}.$$

Тогда в переменных (11) рассматриваемая краевая задача запишется в виде (знак “штрих” над безразмерными величинами опущен)

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} + \alpha_T \frac{\partial T}{\partial t}, \tag{12}$$

$$\sigma \frac{\partial C_i}{\partial t} = D_i \frac{\partial^2 C_i}{\partial x^2} + U(C_1, C_2, H, T) \frac{\partial C_i}{\partial x} + r_i \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad (i = 1, 2), \tag{13}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + V(C_1, C_2, H, T) \frac{\partial T}{\partial x}, \tag{14}$$

$$H(0,t) = 0, \quad H(1,t) = 0, \quad H(x,0) = 1, \tag{15}$$

$$C_i(0,t) = 1, \quad \frac{\partial C_i(1,t)}{\partial x} = 0, \quad C_i(x,0) = 0, \quad (i = 1, 2), \tag{16}$$

$$T(0,t) = 1, \quad \frac{\partial T(1,t)}{\partial x} = 0, \quad T(x,0) = T_0, \tag{17}$$

где

$$G(C_1, C_2, T) = \kappa_1 C_1 + \kappa_2 C_2 + \theta T, \tag{18}$$

$$U(C_1, C_2, H, T) = \frac{\partial}{\partial x}\left(uH - \nu_1 C_1 - \nu_2 C_2 - \mu_1 T\right), \tag{19}$$

$$V(C_1, C_2, H, T) = \frac{\partial}{\partial x}\left(u_1 H - \delta_1 C_1 - \delta_2 C_2 - \gamma_1 T\right). \tag{20}$$

Методика получения приближенного решения краевой задачи. Ниже кратко излагается методика построения приближенного решения краевой задачи (12)–(17).

Введем в рассмотрение следующие пространства допустимых функций:

$$V_{h,0} = \{s_1(x) \in W_2^1(0, 1) \mid s_1(0) = 0, \quad s_1(1) = 0\},$$

$$V_{C,0} = \{s(x) \in W_2^1(0, 1) \mid s(0) = 0\},$$

$$V_{h,1} = \{f_1(x,t) \in L_2(0, 1), \quad \frac{\partial f_1}{\partial t}, \quad \frac{\partial f_1}{\partial x} \in L_2(0, 1) \mid f_1(0,t) = 0, \quad f_1(1,t) = 0\},$$

$$V_{C,1} = \{f_2(x,t) \in L_2(0, 1), \quad \frac{\partial f_2}{\partial t}, \quad \frac{\partial f_2}{\partial x} \in L_2(0, 1) \mid f_2(0,t) = 1\},$$

где $W_2^1(0, 1)$ – пространство Соболева [14].

Вариационную формулировку рассматриваемой краевой задачи запишем в виде

$$\left(\frac{\partial H}{\partial t}, s_1(x)\right) + \left(\frac{\partial H}{\partial x}, \frac{ds_1(x)}{dx}\right) - \alpha_T \left(\frac{\partial T}{\partial t}, s_1(x)\right) + \omega_1\left(C_1, C_2, T, s_1\right) = 0, \tag{21}$$

$$\left(H(x, 0), s_1(x)\right) = \left(1, s_1(x)\right), \tag{22}$$

$$\sigma\left(\frac{\partial C_1}{\partial t}, s_2(x)\right) + D_1\left(\frac{\partial C_1}{\partial x}, \frac{ds_2(x)}{dx}\right) + \omega_2\left(C_1, C_2, H, T, s_2\right) = 0, \quad (23)$$

$$\left(C_1(x,0), s_2(x)\right) = 0, \quad (24)$$

$$\sigma\left(\frac{\partial C_2}{\partial t}, s_3(x)\right) + D_2\left(\frac{\partial C_2}{\partial x}, \frac{ds_3(x)}{dx}\right) + \omega_3\left(C_1, C_2, H, T, s_3\right) = 0, \quad (25)$$

$$\left(C_2(x,0), s_3(x)\right) = 0, \quad (26)$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial t}, s_4(x)\right) + \lambda\left(\frac{\partial T}{\partial x}, \frac{ds_4(x)}{dx}\right) + \omega_4\left(C_1, C_2, H, T, s_4\right) = 0, \quad (27)$$

$$\left(T(x,0), s_4(x)\right) = \left(T_0, s_4(x)\right), \quad (28)$$

где
$$\omega_1\left(C_1, C_2, T, s_1\right) = -\left(\frac{\partial G}{\partial x}, \frac{ds_1(x)}{dx}\right),$$

$$\omega_2\left(C_1, C_2, H, T, s_2\right) = r_1\left(\frac{\partial T}{\partial x}, \frac{ds_2(x)}{dx}\right) - \left(U\frac{\partial C_1}{\partial x}, s_2(x)\right),$$

$$\omega_3\left(C_1, C_2, H, T, s_2\right) = r_2\left(\frac{\partial T}{\partial x}, \frac{ds_3(x)}{dx}\right) - \left(U\frac{\partial C_2}{\partial x}, s_3(x)\right),$$

$$\omega_4\left(C_1, C_2, H, T, s_4\right) = -\left(V\frac{\partial T}{\partial x}, s_4(x)\right), \ \left(\varphi, \psi\right) = \int_0^1 \varphi(x)\psi(x)dx,$$

$$H(x,t) \in V_{h,1}, \ C_1(x,t), C_2(x,t), T(x,t) \in V_{C,1}, \ s_1(x) \in V_{h,0},$$
$$s_2(x), s_3(x), s_4(x) \in V_{C,0}.$$

Обобщенным решением краевой задачи (12)-(17) назовем вектор-функцию $\left(H(x,t), C_1(x,t), C_2(x,t), T(x,t)\right)$, которая $\forall s_1(x) \in V_{h,0}$ и $\forall s_2(x)$, $s_3(x), s_4(x) \in V_{C,0}$ удовлетворяет интегральным соотношениям (21)-(27).

Приближенное обобщенное решение рассматриваемой краевой задачи будем искать в виде

$$\widehat{H}(x,t) = \sum_{i=1}^{n_1} a_i(t) N_i^{(1)}(x) + W_1(x,t), \quad (29)$$

$$\widehat{C}_1(x,t) = \sum_{i=1}^{n_2} b_i(t) N_i^{(2)}(x) + W_2(x,t), \quad (30)$$

$$\widehat{C}_2(x,t) = \sum_{i=1}^{n_3} q_i(t) N_i^{(3)}(x) + W_3(x,t), \quad (31)$$

$$\widehat{T}(x,t) = \sum_{i=1}^{n_4} p_i(t) N_i^{(4)}(x) + W_4(x,t), \quad (32)$$

где $\left\{N_i^{(1)}(x)\right\}_{i=1}^{n_1}$ – базис n_1-мерного подпространства $M_{h,0} \subset V_{h,0}$; $\left\{N_i^{(2)}(x)\right\}_{i=1}^{n_2}$, $\left\{N_i^{(3)}(x)\right\}_{i=1}^{n_3}$, $\left\{N_i^{(4)}(x)\right\}_{i=1}^{n_4}$ – базисные вектор-функции конечномерного подпространства $M_{C,0} \subset V_{C,0}$; $W_i(x,t)$ $(i=\overline{1,4})$ – известные функции, удовлетворяющие условиям $W_1(0,t)=W_1(1,t)=0$, $W_k(0,t)=1$ $(k=\overline{2,4})$.

Из (21)-(28), с учетом соотношений (29)-(32), получаем задачу Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений относительно неизвестных коэффициентов $a_i(t)$ $(i=\overline{1,n_1})$, $b_i(t)$ $(i=\overline{1,n_2})$, $q_i(t)$ $(i=\overline{1,n_3})$, $p_i(t)$ $(i=\overline{1,n_4})$ вида

$$M_1 \cdot \frac{d\vec{A}(t)}{dt} + L \cdot \vec{A}(t) - \alpha_T M_2 \cdot \frac{d\vec{P}(t)}{dt} + \vec{F}_1(\vec{B},\vec{Q},\vec{P}) = \vec{0}, \tag{33}$$

$$M_1 \cdot \overrightarrow{A}^{(0)} = \overrightarrow{F_1}^{(0)}, \tag{34}$$

$$\sigma M_3 \cdot \frac{d\vec{B}(t)}{dt} + L_1(\vec{A},\vec{Q},\vec{P}) \cdot \vec{B}(t) + \overrightarrow{F}_2(\vec{A},\vec{B},\vec{Q},\vec{P}) = \vec{0}, \tag{35}$$

$$M_3 \cdot \overrightarrow{B}^{(0)} = \overrightarrow{F}_2^{(0)}, \tag{36}$$

$$\sigma M_4 \cdot \frac{d\vec{Q}(t)}{dt} + L_2(\vec{A},\vec{B},\vec{P}) \cdot \vec{Q}(t) + \overrightarrow{F}_3(\vec{A},\vec{B},\vec{Q},\vec{P}) = \vec{0}, \tag{37}$$

$$M_4 \cdot \overrightarrow{Q}^{(0)} = \overrightarrow{F}_3^{(0)}, \tag{38}$$

$$M_5 \cdot \frac{d\vec{P}(t)}{dt} + L_3(\vec{A},\vec{B},\vec{Q}) \cdot \vec{P}(t) + \vec{F}_4(\vec{A},\vec{B},\vec{Q},\vec{P}) = \vec{0}, \tag{39}$$

$$M_5 \cdot \vec{P}^{(0)} = \overrightarrow{F}_4^{(0)}, \tag{40}$$

где обозначено:

$$\overrightarrow{A}(t) = (a_1(t), a_2(t), \ldots, a_{n_1}(t))^T, \qquad \overrightarrow{B}(t) = (b_1(t), b_2(t), \ldots, b_{n_2}(t))^T,$$

$$\vec{Q}(t) = (q_1(t), q_2(t), \ldots, q_{n_3}(t))^T, \qquad \vec{P}(t) = (p_1(t), p_2(t), \ldots, p_{n_4}(t))^T,$$

$$\overrightarrow{A}^{(0)} = (a_1(0), a_2(0), \ldots, a_{n_1}(0))^T, \qquad \overrightarrow{B}^{(0)} = (b_1(0), b_2(0), \ldots, b_{n_2}(0))^T,$$

$$\vec{Q}^{(0)} = (q_1(0), q_2(0), \ldots, q_{n_3}(0))^T, \qquad \vec{P}^{(0)} = (p_1(0), p_2(0), \ldots, p_{n_4}(0))^T,$$

$$M_1 = (m_{ji})_{j,i=\overline{1,n_1}}, M_2 = (\overline{m}_{ji})_{j=\overline{1,n_1}}^{i=\overline{1,n_4}}, M_3 = (\tilde{m}_{ji})_{j,i=\overline{1,n_2}}, M_4 = (\tilde{\tilde{m}}_{ji})_{j,i=\overline{1,n_3}},$$

$$M_5 = (\overline{\overline{m}}_{ji})_{j,i=\overline{1,n_4}}, \; L = (l_{ji})_{j,i=\overline{1,n_1}}, \; L_1(\vec{A},\vec{Q},\vec{P}) = (\tilde{l}_{ji})_{j,i=\overline{1,n_2}},$$

$$L_2(\vec{A},\vec{B},\vec{P})=(\tilde{\tilde{l}}_{ji})_{j,\,i=\overline{1,\,n_3}},\quad L_3(\vec{A},\vec{B},\vec{Q})=(l^*_{ji})_{j,\,i=\overline{1,\,n_4}},$$

$$\vec{F}_1=\left(f_1^{(1)},f_2^{(1)},\cdots,f_{n_1}^{(1)}\right)^T,\quad \vec{F}_2=\left(f_1^{(2)},f_2^{(2)},\cdots,f_{n_2}^{(2)}\right)^T,$$

$$\vec{F}_3=\left(f_1^{(3)},f_2^{(3)},\cdots,f_{n_3}^{(3)}\right)^T,\quad \vec{F}_4=\left(f_1^{(4)},f_2^{(4)},\cdots,f_{n_4}^{(4)}\right)^T,$$

$$\vec{F}_1^{(0)}=\left(\tilde{f}_1^{(1)},\tilde{f}_2^{(1)},\cdots,\tilde{f}_{n_1}^{(1)}\right)^T,\quad \vec{F}_2^{(0)}=\left(\tilde{f}_1^{(2)},\tilde{f}_2^{(2)},\cdots,\tilde{f}_{n_2}^{(2)}\right)^T,$$

$$\vec{F}_3^{(0)}=\left(\tilde{f}_1^{(3)},\tilde{f}_2^{(3)},\cdots,\tilde{f}_{n_3}^{(3)}\right)^T,\quad \vec{F}_4^{(0)}=\left(\tilde{f}_1^{(4)},\tilde{f}_2^{(4)},\cdots,\tilde{f}_{n_4}^{(4)}\right)^T,$$

$$m_{ji}=\left(N_j^{(1)},N_i^{(1)}\right),\quad \overline{m}_{ji}=\left(N_j^{(1)},N_i^{(4)}\right),\quad \tilde{m}_{ji}=\left(N_j^{(2)},N_i^{(2)}\right),$$

$$\tilde{\tilde{m}}_{ji}=\left(N_j^{(3)},N_i^{(3)}\right),\quad \overline{\overline{m}}_{ji}=\left(N_j^{(4)},N_i^{(4)}\right),\quad l_{ji}=\left(\frac{dN_j^{(1)}}{dx},\frac{dN_i^{(1)}}{dx}\right),$$

$$\tilde{l}_{ji}=D_1\left(\frac{dN_j^{(2)}}{dx},\frac{dN_i^{(2)}}{dx}\right)+\left(\left(-\frac{\partial}{\partial x}\left(u\widehat{H}-\nu_2\widehat{C}_2-\mu_1\widehat{T}\right)\frac{dN_i^{(2)}}{dx}\right),N_j^{(2)}(x)\right),$$

$$\tilde{\tilde{l}}_{ji}=D_2\left(\frac{dN_j^{(3)}}{dx},\frac{dN_i^{(3)}}{dx}\right)+\left(\left(-\frac{\partial}{\partial x}\left(u\widehat{H}-\nu_1\widehat{C}_1-\mu_1\widehat{T}\right)\frac{dN_i^{(3)}}{dx}\right),N_j^{(3)}(x)\right),$$

$$l^*_{ji}=\lambda\left(\frac{dN_j^{(4)}}{dx},\frac{dN_i^{(4)}}{dx}\right)-\left(\left(u_1\frac{\partial\widehat{H}}{\partial t}N_i^{(4)}(x)+\frac{\partial}{\partial x}\left(u_1\widehat{H}-\delta_1\widehat{C}_1-\delta_2\widehat{C}_2\right)\frac{dN_i^{(4)}}{dx}\right),N_j^{(4)}(x)\right),$$

$$f_j^{(1)}\equiv f_j^{(1)}\left(\vec{B},\vec{Q},\vec{P}\right)=\left(\frac{\partial}{\partial t}\left(W_1-\alpha_T W_4\right),N_j^{(1)}(x)\right)+$$

$$+\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(W_1-\kappa_1\widehat{C}_1-\kappa_2\widehat{C}_2-\theta\widehat{T}\right),\frac{dN_j^{(1)}}{dx}\right),$$

$$f_j^{(2)}\equiv f_j^{(2)}\left(\vec{A},\vec{B},\vec{Q},\vec{P}\right)=\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(D_1W_2+r_1\widehat{T}\right),\frac{dN_j^{(2)}}{dx}\right)+$$

$$+\left(\left(\sigma\frac{\partial W_2}{\partial t}+\nu_1\left(\frac{\partial\widehat{C}_1}{\partial x}\right)^2-\frac{\partial}{\partial x}\left(u\widehat{H}-\nu_2\widehat{C}_2-\mu_1\widehat{T}\right)\frac{\partial W_2}{\partial x}\right),N_j^{(2)}(x)\right),$$

$$f_j^{(3)}\equiv f_j^{(3)}\left(\vec{A},\vec{B},\vec{Q},\vec{P}\right)=\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(D_2W_3+r_2\widehat{T}\right),\frac{dN_j^{(3)}}{dx}\right)+$$

$$+\left(\left(\sigma\frac{\partial W_3}{\partial t}+\nu_2\left(\frac{\partial\widehat{C}_2}{\partial x}\right)^2-\frac{\partial}{\partial x}\left(u\widehat{H}-\nu_1\widehat{C}_1-\mu_1\widehat{T}\right)\frac{\partial W_3}{\partial x}\right), N_j^{(3)}(x)\right),$$

$$f_j^{(4)}\equiv f_j^{(4)}\left(\vec{A},\vec{B},\vec{Q},\vec{P}\right)=\left(\lambda\frac{\partial W_4}{\partial x},\frac{dN_j^{(4)}}{dx}\right)+\left(\left(\frac{\partial W_4}{\partial t}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{\partial}{\partial x}\left(\delta_1\widehat{C}_1+\delta_2\widehat{C}_2-u_1\widehat{H}\right)\frac{\partial W_4}{\partial x}+\gamma_1\left(\frac{\partial\widehat{T}_1}{\partial x}\right)^2-u_1W_4\frac{\partial\widehat{H}}{\partial t}\right), N_j^{(4)}(x)\right),$$

$$\tilde{f}_j^{(1)}=\int_0^1\left(1-W_1\ (x,0)\right)N_j^{(1)}(x)dx\,,\qquad \tilde{f}_j^{(2)}=-\left(W_2(x,0),\,N_j^{(2)}(x)\right),$$

$$\tilde{f}_j^{(3)}=-\left(W_3(x,0),\,N_j^{(3)}(x)\right),\qquad \tilde{f}_j^{(4)}=-\left(\left(T_0-W_4(x,0)\right),\,N_j^{(4)}(x)\right).$$

Вводя в рассмотрение сеточную область $t_j=\tau j$ (τ – шаг сетки по временной переменной), приближенное решение задачи Коши (33)-(40) можно получить, например, с помощью следующего варианта линеаризованной неявной разностной схемы вида:

$$M_5\cdot P_t(t)+L_3(A,B,Q)\cdot\widehat{P}(t)+F_4(A,B,Q,P)=0\,, \qquad (41)$$

$$M_5\cdot P^{(0)}=F_4^{(0)}, \qquad (42)$$

$$\sigma M_4\cdot Q_t(t)+L_2(A,B,\widehat{P})\cdot\widehat{Q}(t)+F_3(A,B,Q,\widehat{P})=0\,, \qquad (43)$$

$$M_4\cdot Q^{(0)}=F_3^{(0)}, \qquad (44)$$

$$\sigma M_3\cdot B_t(t)+L_1(A,\widehat{Q},\widehat{P})\cdot\widehat{B}(t)+F_2(A,B,\widehat{Q},\widehat{P})=0\,, \qquad (45)$$

$$M_3\cdot B^{(0)}=F_2^{(0)}, \qquad (46)$$

$$M_1\cdot A_t(t)+L\cdot\widehat{A}(t)-\alpha_T M_2\cdot P_t(t)+F_1(\widehat{B},\widehat{Q},\widehat{P})=0\,, \qquad (47)$$

$$M_1\cdot A^{(0)}=F_1^{(0)}, \qquad (48)$$

где введены стандартные [12] обозначения и стрелки над векторами опущены. Таким образом, для получения приближенного решения рассматриваемой задачи на данном временном слое, необходимо вычислить значения вектор-функций $P(t), Q(t), B(t), A(t)$ согласно (41)-(48).

Заключение. Полученные в работе результаты позволяют более полно, чем в рамках известных математических моделей, охарактеризовать динамику формирования полей избыточных напоров и концентраций при консолидации пористых сред с учетом как неизотермичности процесса, так и насыщенности среды бикомпонентными растворами. Результаты работы могут быть полезными при разработке инженерных решений, например, в гидростроительстве.

Список использованной литературы:

1. Ширинкулов Т. Ш. Ползучесть и консолидация грунтов / Т. Ш. Ширинкулов, Ю. К. Зарецкий. − Ташкент : Фан, 1986. − 390 с.
2. Иванов П. Л. Грунты и основания гидротехнических сооружений / П. Л. Иванов. – М. : Высшая школа, 1991. – 447 с.
3. Бомба А. Я. Нелінійні математичні моделі процесів геогідродинаміки / А. Я. Бомба, В. М. Булавацький, В. В. Скопецький. – К. : Наук. думка, 2007. – 292 с.
4. Власюк А. П. Математичне моделювання консолідації ґрунтів в процесі фільтрації сольових розчинів / А. П. Власюк, П. М. Мартинюк. – Рівне : Вид-во УДУВГП, 2004. – 211 с.
5. Булавацкий В. М. Системный подход к проблеме математического моделирования процесса фильтрационной консолидации / В. М. Булавацкий, В. В. Скопецкий // Кибернетика и системный анализ. – 2006. – № 6. – С. 71–79.
6. Булавацкий В. М. Математическое моделирование процесса фильтрационной консолидации с учетом релаксационных явлений / В. М. Булавацкий, В. В. Скопецкий // Проблемы управления и информатики. – 2006. – № 3. – С. 48–56.
7. Булавацкий В. М. Математическое моделирование динамики некоторых распределенных пространственно-временных консолидационных процессов / В. М. Булавацкий, В. В. Скопецкий // Проблемы управления и информатики. – 2009. – № 5. – С. 77–87.
8. Булавацкий В. М. Математическое моделирование динамики консолидационного процесса насыщенной бинарным солевым раствором пористой среды / В. М. Булавацкий // Компьютерная математика. – 2008. – № 2. – С. 3–12.
9. Власюк А. П. Математичне моделювання консолідації ґрунтів при фільтрації сольових розчинів в неізотермічних умовах / А. П. Власюк, П. М. Мартинюк. – Рівне : Вид-во НУВГП, 2008. – 416 с.
10. Ляшко И. И. Численное решение задач тепло- и массопереноса в пористых средах / И. И. Ляшко, Л. И. Демченко, Г. Е. Мистецкий. – К. : Наук. думка, 1991. – 264 с.
11. Марчук Г. И. Введение в проекционно-сеточные методы / Г. И. Марчук, В. И. Агошков. – М. : Наука, 1981. – 416 с.
12. Samarskii A. A. Computational Heat Transfer. Vol. 2 / A. A. Samarskii, P. N. Vabishchevich. – New York : Wiley, 1995. – 422 p.

The mathematical model describing as a first approximation dynamics of nonisothermal process of consolidation saturated bicomponents solutions porous medium is constructed. The nonlinear boundary-value problem, appropriate to offered model, is formulated and the technique of its approximate solution is developed.

Key words: *the mathematical modelling, porous medium, consolidation, mass-transfer, nonlinear boundary value problem, approximate solutions.*

Отримано: 5.06.2010