УДК 517.5

Ю. В. Гнатюк, канд. фіз.-мат. наук

Кам’янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, м. Кам’янець-Подільський

НЕОБХІДНІ, ДОСТАТНІ УМОВИ, КРИТЕРІЇ ТА УМОВИ ЄДИНОСТІ ВІДНОСНОЇ ЧЕБИШОВСЬКОЇ ТОЧКИ СИСТЕМИ ОБМЕЖЕНИХ ЗАМКНУТИХ ОПУКЛИХ МНОЖИН, ЯКІ НЕПЕРЕРВНО ЗМІНЮЮТЬСЯ

Встановлено необхідні, достатні умови, критерії та умови єдиності відносної чебишовської точки системи обмежених замкнутих опуклих множин, які неперервно змінюються.

Ключові слова: *відносна чебишовська точка, критерії, єдиність.*

Вступ. Функціональні залежності, які характеризують досліджувані об’єкти і процеси, на практиці часто не означені точно, а лише відомо, що їх значення належать деяким множинам лінійного нормованого простору.

Робота з такими функціональними залежностями пов’язана з низкою серйозних труднощів.

У зв’язку з цим виникає проблема найкращого у деякому розумінні відновлення вищеназваної функціональної залежності однозначними функціональними залежностями (однозначними апроксимантами) певного класу.

Задача найкращого рівномірного відновлення функціональної залежності, розглядуваної на компакті S, про яку відомо, що її значення належать обмеженим замкнутим, в тому числі обмеженим опуклим замкнутим множинам $a(s)$, $s \in S$, лінійного нормованого простору X, деякою множиною сталих відображень із S в X приводить до задачі відшукання відносної чебишовської точки системи множин $\{a(s), s \in S\}$, яка розглядається в даній роботі.

Постановка задачі. Нехай X – лінійний над полем комплексних чисел нормований простір. Для множини F та елемента g цього простору покладемо $E_F(g) = \inf\limits_{y \in F} \|g - y\|$. Величину $E_F(g)$ називають найкращим наближенням елемента g множиною F або відстанню від цього елемента до множини F (див., наприклад, [1, с.11]). Будемо позначати через $B(X)$ $(O(X))$ сукупність довільних (опуклих) обмежених замкнутих множин простору X, через

$H(A,B)=\max\left\{\sup\limits_{x\in A}E_B(x),\sup\limits_{y\in B}E_A(y)\right\}$ – хаусдорфову відстань між множинами A, B із $B(X)$. Нехай, крім того, S – компакт, $C(S,B(X))$ $(C(S,O(X)))$ – множина багатозначних відображень компакту S в X таких, що для кожного $s\in S$ $a(s)=B_s\in B(X)$ $(a(s)=O_s\in O(X))$ і вони неперервні на S відносно метрики Хаусдорфа на $B(X)$, $a\in C(S,B(X))$, $V\subset X$. Поставимо задачу відшукання величини

$$\alpha_a^*(V)=\inf_{g\in V}\sup_{s\in S}E_{a(s)}(g)=\inf_{g\in V}\sup_{s\in S}\inf_{y\in a(s)}\|g-y\|. \tag{1}$$

Якщо існує елемент $g^*\in V$ такий, що

$$\alpha_a^*(V)=\sup_{s\in S}E_{a(s)}\left(g^*\right),$$

то його будемо називати чебишовською точкою відносно множини V (у множині V) системи $\{a(s),s\in S\}$ обмежених замкнутих множин простору X, які неперервно змінюються щодо хаусдорфової відстані на $B(X)$, або екстремальним елементом для величини (1).

Якщо у задачі відшукання величини (1) $V=X$ і для $g^*\in X$

$$\sup_{s\in S}E_{a(s)}\left(g^*\right)=\sup_{s\in S}\inf_{y\in a(s)}\left\|g^*-y\right\|=\inf_{g\in X}\sup_{s\in S}\inf_{y\in a(s)}\|g-y\|,$$

то g^* називається просто чебишовською точкою системи $\{a(s),s\in S\}$.

Коли S є компактом простору X, а $a(s)=s$ для всіх $s\in S$, то в цьому випадку задача (1) стає задачею про чебишовський центр компакта S простору X відносно множини V (у множині V) цього простору, тобто задачею відшукання величини

$$\inf_{g\in V}\max_{s\in S}\|g-s\|. \tag{2}$$

У випадку задачі відшукання величини (2) елемент $g^*\in V$ називається чебишовським центром компакта S у множині V, якщо

$$\max_{s\in S}\left\|g^*-s\right\|=\inf_{g\in V}\max_{s\in S}\|g-s\|.$$

Якщо в задачі відшукання величини (2) $V = X$, то елемент $g^* \in X$, для якого виконується рівність $\max\limits_{s \in S}\left\|g^* - s\right\| = \inf\limits_{g \in X}\max\limits_{s \in S}\left\|g - s\right\|$, називається просто чебишовським центром компакта *S*.

Твердження 1. Для будь-яких $a \in C\big(S, B(X)\big)$, $g \in X$ функція $E_{a(s)}(g) = \inf\limits_{y \in a(s)}\left\|g - y\right\|$, $s \in S$, є неперервною по *s* на *S*.

З твердження 1 випливає, що задачу відшукання величини (1) можна подати у такій еквівалентній формі:

$$\alpha_a^*(V) = \inf_{g \in V}\max_{s \in S} E_{a(s)}(g) = \inf_{g \in V}\max_{s \in S}\inf_{y \in a(s)}\left\|g - y\right\|. \qquad (3)$$

Актуальність теми. Актуальність дослідження задачі відшукання чебишовської точки системи $\{a(s), s \in S\}$ множин простору *X* випливає також зі змісту поняття чебишовської точки, оскільки вона є такою точкою множини *V*, що найбільша відстань від неї до множин $a(s)$, $s \in S$, не перевищує найбільших відстаней від інших точок множини *V* до цих множин.

Слід зазначити, що лише незначна кількість наукових праць присвячена дослідженню та розв'язанню задачі відшукання чебишовської точки системи множин. Так, у праці [2] побудовано алгоритм відшукання чебишовської точки скінченної кількості гіперплощин простору R^n, у праці [3] розглянуто питання існування чебишовської точки скінченної кількості гіперплощин рефлексивного простору, у працях [4-6] розглянуто деякі питання існування та єдиності чебишовської точки системи множин.

Мета роботи. Отримати необхідні, достатні умови, критерії та умови єдиності чебишовської точки системи обмежених замкнутих опуклих множин, які неперервно змінюються.

Допоміжні твердження. Нехай, як і вище, *X* – лінійний над полем комплексних чисел нормований простір, X^* – простір, спряжений з *X*, X_R – дійсний лінійний нормований простір, асоційований з простором *X*, тобто простір *X*, розглядуваний лише над полем дійсних чисел, X_R^* – простір, спряжений з простором X_R, *p* – дійснозначна функція, задана на *X* і, отже, на X_R.

Елемент $\varphi \in X_R^*$ називається субградієнтом функції *p* в точці $g_0 \in X_R$, якщо $p(g) - p(g_0) \ge \varphi(g - g_0)$, $g \in X_R$.

Множину субградієнтів функції p в точці $g \in X$ називають субдиференціалом цієї функції в точці g і позначають $\partial p(g)$.

Відомо, що функція найкращого наближення $E_F(g), g \in X$, є неперервною на X_R для будь-якої множини F (див., наприклад, [1, с.17]) та, крім того, опуклою на X_R за умови, що F є опуклою множиною (див., наприклад, [7]). Тому у випадку опуклої множини F для кожної точки $g \in X$ $\partial E_F(g)$ є непорожньою опуклою слабко компактною множиною простору X_R^* (див., наприклад, [8, с. 327]).

Твердження 2. Нехай $a \in C(S, B(X))$. Тоді функція $\Psi_a(g) = \max\limits_{s \in S} E_{a(s)}(g) = \max\limits_{s \in S} \inf\limits_{y \in a(s)} \|g - y\|$, $g \in X$, є неперервною по g на X. Якщо $a \in C(S, O(X))$, то ця функція є, крім того, опуклою на X.

Твердження 3. Нехай F – опукла замкнута множина простору X, g – довільна точка цього простору. Має місце наступне співвідношення двоїстості

$$E_F(g) = \inf_{y \in F} \|g - y\| = \max_{f \in B^*} \left(\operatorname{Re} f(g) - \sup_{y \in F} \operatorname{Re} f(y) \right),$$

де $B^* = \left\{ f : f \in X^*, \|f\| \le 1 \right\}$ – одинична куля простору X^*.

Твердження 4. Нехай для опуклої замкнутої множини F простору X та елемента g цього простору

$$B^*(g, F) = \left\{ f : f \in B^*, E_F(g) = \inf_{y \in F} \|g - y\| = \right.$$

$$\left. = \max_{f \in B^*} \left(\operatorname{Re} f(g) - \sup_{y \in F} \operatorname{Re} f(y) \right) = \operatorname{Re} f(g) - \sup_{y \in F} \operatorname{Re} f(y) \right\},$$

$$\operatorname{Re}\left(B^*(g, F)\right) = \left\{ \operatorname{Re} f : f \in B^*(g, F) \right\}.$$

Має місце рівність

$$\partial E_F(g) = \operatorname{Re}\left(B^*(g, F)\right).$$

Основні результати. Будемо вважати, що обмеження $g \in V$ в задачі відшукання величини (3) є істотним, тобто

$$\alpha_a^* < \alpha_a^*(V),$$

де $\alpha_a^* = \inf\limits_{g \in X} \max\limits_{s \in S} E_{a(s)}(g)$.

Для $a \in C(S, O(X))$ та $g^* \in V$ покладемо

$$\alpha_a^{g^*} = \max_{s \in S} E_{a(s)}\left(g^*\right),\ C_a^{g^*} = \left\{g:\ g \in X,\ \max_{s \in S} E_{a(s)}(g) < \alpha_a^{g^*}\right\},$$

$$S_a^{g^*} = \left\{s : s \in S, E_{a(s)}\left(g^*\right) = \alpha_a^{g^*}\right\},$$

$$B^*\left(g^*, a(s)\right) = \left\{ f : f \in B^*, E_{a(s)}\left(g^*\right) = \max_{f \in B^*}\left(\operatorname{Re} f\left(g^*\right) - \sup_{y \in a(s)} \operatorname{Re} f(y)\right)\right.$$

$$\left. = \operatorname{Re} f\left(g^*\right) - \sup_{y \in a(s)} \operatorname{Re} f(y)\right\},\ s \in S_a^{g^*},$$

$$\operatorname{Re}\left(B^*\left(g^*, a(s)\right)\right) = \left\{\operatorname{Re} f : f \in B^*\left(g^*, a(s)\right)\right\},\ s \in S_a^{g^*}.$$

Згідно з твердженням 4 $\operatorname{Re}\left(B^*\left(g^*, a(s)\right)\right) = \partial E_{a(s)}\left(g^*\right),\ s \in S_a^{g^*}$.

Зрозуміло, що множини $C_a^{g^*}; S_a^{g^*};\ B^*\left(g^*, a(s)\right),\ s \in S_a^{g^*}$, не є порожніми.

Згідно з [9] множину V будемо називати Γ^*-множиною відносно точки g^*, якщо $g - g^* \in \Gamma^*\left(V, g^*\right)$ для всіх $g \in V$, де $\Gamma^*\left(V, g^*\right)$ – конус граничних напрямків для множини V з точки g^* (див., наприклад, [8, с.13]). Прикладами Γ^*-множин є, зокрема, зіркові відносно g^*, в тому числі опуклі множини.

Теорема 1. Нехай $a \in C(S, O(X)),\ g^* \in V$. Для того щоб елемент g^* був чебишовською точкою системи $\{a(s), s \in S\}$ у множині V, достатньо, а у випадку, коли множина V є Γ^*-множиною відносно точки g^* та обмеження $g \in V$ є істотним для задачі відшукання величин (3), і необхідно, щоб для кожного $g \in V$ існували елементи $s_g \in S$, $f_g \in B^*$, для яких виконуються співвідношення

$$\max_{s \in S} E_{a(s)}\left(g^*\right) = E_{a\left(s_g\right)}\left(g^*\right) = \operatorname{Re} f_g\left(g^*\right) - \sup_{y \in a\left(s_g\right)} \operatorname{Re} f_g(y), \tag{4}$$

$$\operatorname{Re} f_g\left(g - g^*\right) \geq 0. \tag{5}$$

Згідно з [10] множину V будемо називати Г-множиною відносно точки $g^* \in V$, якщо для будь-яких $g \in V$ та $\varepsilon > 0$ існує $\alpha \in (0, \varepsilon)$ таке, що $g^* + \alpha\left(g - g^*\right) \in V$.

Зрозуміло, що кожна Г-множина відносно g^* є також Γ^*-множиною відносно g^*.

Легко переконатися, що коли $g^* \in V$ і множина V є зірковою відносно точки g^* множиною (опуклою множиною), то V є Г-множиною відносно g^*.

Теорема 2. Нехай $a \in C\left(S, O\left(X\right)\right)$, $g^* \in V$. Для того щоб елемент g^* був чебишовською точкою системи $\left\{a\left(s\right), s \in S\right\}$ у множині V, необхідно, а у випадку, коли множина V є Г-множиною відносно точки g^* та обмеження $g \in V$ є істотним для задачі відшукання величин (3), і достатньо, щоб для кожного $g \in V$ існували елементи $s_g \in S$, $f_g \in B^*$, для яких виконуються співвідношення

$$\max_{s\in S} E_{a(s)}\left(g\right) = E_{a\left(s_g\right)}\left(g\right) = \operatorname{Re} f_g\left(g\right) - \sup_{y\in a\left(s_g\right)} \operatorname{Re} f_g\left(y\right), \tag{6}$$

$$\operatorname{Re} f_g\left(g - g^*\right) \geq 0 . \tag{7}$$

Доведення. *Необхідність*. Нехай g^* є чебишовською точкою системи $\left\{a\left(s\right), s \in S\right\}$ у множині *V, g* – довільний елемент множини *V*, $s_g \in S$, $f_g \in B^*$ вибрані так, що має місце (6). Тоді, використавши твердженням 3, будемо мати

$$\operatorname{Re} f_g\left(g - g^*\right) = \operatorname{Re} f_g\left(g\right) - \sup_{y\in a\left(s_g\right)} \operatorname{Re} f_g\left(y\right) - \left(\operatorname{Re} f_g\left(g^*\right) - \sup_{y\in a\left(s_g\right)} \operatorname{Re} f_g\left(y\right)\right) =$$

$$= \max_{s\in S} E_{a(s)}\left(g\right) - \left(\operatorname{Re} f_g\left(g^*\right) - \sup_{y\in a\left(s_g\right)} \operatorname{Re} f_g\left(y\right)\right) \geq \max_{s\in S} E_{a(s)}\left(g\right) -$$

$$- \max_{f\in B^*}\left(\operatorname{Re} f\left(g^*\right) - \sup_{y\in a\left(s_g\right)} \operatorname{Re} f\left(y\right)\right) = \max_{s\in S} E_{a(s)}\left(g\right) - E_{a\left(s_g\right)}\left(g^*\right) \geq$$

$$\geq \max_{s\in S} E_{a(s)}\left(g\right) - \max_{s\in S} E_{a(s)}\left(g^*\right) \geq 0,$$

оскільки g^* є чебишовською точкою системи $\left\{a\left(s\right), s \in S\right\}$ у множині *V*.

Необхідність доведено.

Достатність. Нехай $g^* \in V$, V є Г-множиною відносно g^* і для кожного $g \in V$ існують $s_g \in S$, $f_g \in B^*$, для яких виконуються умови (6), (7). Переконаємося, що g^* є чебишовською точкою системи

$\{a(s), s \in S\}$ у множині *V*. Припустимо супротивне. Тоді існує $\overline{g} \in V$, що

$$\max_{s \in S} E_{a(s)}\left(\overline{g}\right) < \max_{s \in S} E_{a(s)}\left(g^*\right). \tag{8}$$

Оскільки *V* є Г-множиною відносно g^*, то для довільної послідовності $\{\varepsilon_k\}_{k=1}^{\infty}$, $\varepsilon_k > 0$, $\lim\limits_{k \to \infty} \varepsilon_k = 0$, існує послідовність $\{\alpha_k\}_{k=1}^{\infty}$, $\alpha_k \in (0, \varepsilon_k)$, що $g_k = g^* + \alpha_k\left(\overline{g} - g^*\right) \in V$ для всіх $k = 1,2,\ldots$. Зрозуміло, що $\lim\limits_{k \to \infty} g_k = g^*$. На підставі неперервності функції $\Psi_a(g) = \max\limits_{s \in S} E_{a(s)}(g) = \max\limits_{s \in S} \inf\limits_{y \in a(s)} \|g - y\|$, $g \in X$, по *g* на *X* (див. твердження 2) та нерівності (8) звідси одержимо, що існує номер *k*, для якого $0 < \alpha_k < 1$ і

$$\max_{s \in S} E_{a(s)}\left(\overline{g}\right) < \max_{s \in S} E_{a(s)}\left(g_k\right). \tag{9}$$

З (9) випливає, що для довільних елементів $s_{g_k} \in S$, $f_{g_k} \in B^*$, для яких

$$\max_{s \in S} E_{a(s)}(g_k) = E_{a\left(s_{g_k}\right)}(g_k) = \operatorname{Re} f_{g_k}(g_k) - \sup_{y \in a\left(s_{g_k}\right)} \operatorname{Re} f_{g_k}(y),$$

матиме місце нерівність

$$\operatorname{Re} f_{g_k}(g_k) - \sup_{y \in a\left(s_{g_k}\right)} \operatorname{Re} f_{g_k}(y) > \max_{s \in S} E_{a(s)}\left(\overline{g}\right) =$$

$$= \max_{s \in S} \max_{f \in B^*}\left(\operatorname{Re} f\left(\overline{g}\right) - \sup_{y \in a(s)} \operatorname{Re} f(y)\right) \geq \operatorname{Re} f_{g_k}\left(\overline{g}\right) - \sup_{y \in a\left(s_{g_k}\right)} \operatorname{Re} f_{g_k}(y).$$

Звідки

$$\operatorname{Re} f_{g_k}\left(\overline{g} - g_k\right) < 0. \tag{10}$$

Оскільки $g_k = g^* + \alpha_k\left(\overline{g} - g^*\right)$, то

$$\overline{g} - g_k = \frac{1}{\alpha_k}\left(g_k - g^*\right) + g^* - g_k = \left(\frac{1}{\alpha_k} - 1\right)\left(g_k - g^*\right).$$

З урахуванням цієї рівності та нерівності (10) отримаємо співвідношення

$$\operatorname{Re} f_{g_k}\left(g_k - g^*\right) < 0,$$

що суперечить умові теореми.

Отже g^* є чебишовською точкою системи $\{a(s), s \in S\}$ у множині V.

Теорему доведено.

Теорема 3. Нехай $a \in C(S, O(X))$, $g^* \in V$. Для того щоб елемент g^* був єдиною чебишовською точкою системи $\{a(s), s \in S\}$ у множині V, необхідно, а у випадку, коли множина V є Г-множиною відносно точки g^*, Γ^*-множиною відносно кожного іншого свого елемента та обмеження $g \in V$ є істотним для задачі відшукання величин (3), і достатньо, щоб для кожного $g \in V$, $g \neq g^*$, та для будь-яких $s_g \in S$, $f_g \in B^*$ таких, що

$$\max_{s \in S} E_{a(s)}(g) = E_{a(s_g)}(g) = \operatorname{Re} f_g(g) - \sup_{y \in a(s_g)} \operatorname{Re} f_g(y), \qquad (11)$$

виконувалась нерівність

$$\operatorname{Re} f_g(g - g^*) > 0. \qquad (12)$$

Доведення. *Необхідність.* Нехай g^* є єдиною чебишовською точкою системи $\{a(s), s \in S\}$ у множині V. Припустимо, що для деякого $g \in V$, $g \neq g^*$, існують такі елементи $s_g \in S$, $f_g \in B^*$, що має місце рівність (11), але

$$\operatorname{Re} f_g(g - g^*) \le 0.$$

Враховуючи цю нерівність, одержуємо

$$\max_{s \in S} E_{a(s)}(g) = E_{a(s_g)}(g) = \operatorname{Re} f_g(g) - \sup_{y \in a(s_g)} \operatorname{Re} f_g(y) =$$

$$= \operatorname{Re} f_g(g - g^*) - \sup_{y \in a(s_g)} \operatorname{Re} f_g(y) + \operatorname{Re} f_g(g^*) \le$$

$$\le \operatorname{Re} f_g(g^*) - \sup_{y \in a(s_g)} \operatorname{Re} f_g(y) \le \max_{s \in S} E_{a(s)}(g^*).$$

Звідси випливає, що g також є чебишовською точкою системи $\{a(s), s \in S\}$ у множині V. На підставі єдиності чебишовської точки тоді $g = g^*$, що суперечить нашому припущенню.

Необхідність доведено.

Достатність. Нехай $g^* \in V$, V є Г-множиною відносно g^* та Γ^*-множиною відносно кожного іншого свого елемента і для кожного

$g \in V$, $g \neq g^*$, та для будь-яких $s_g \in S$, $f_g \in B^*$, що задовольняють рівність (11), виконується нерівність (12).

З теореми 2 випливає, що g^* є чебишовською точкою системи $\{a(s), s \in S\}$ у множині *V*. Переконаємось, що g^* є єдиною чебишовською точкою системи $\{a(s), s \in S\}$ у множині *V*. Припустимо, що деякий елемент $g \in V$, $g \neq g^*$, також є чебишовською точкою системи $\{a(s), s \in S\}$ у множині *V*.

Згідно з теоремою 1 існують елементи $s_g \in S$, $f_g \in B^*$ такі, що

$$\max_{s \in S} E_{a(s)}(g) = E_{a(s_g)}(g) = \operatorname{Re} f_g(g) - \sup_{y \in a(s_g)} \operatorname{Re} f_g(y)$$

і $\operatorname{Re} f_g\left(g^* - g\right) \geq 0$.

Звідки $\operatorname{Re} f_g\left(g - g^*\right) \leq 0$, що суперечить (12).

Тому g^* є єдиною чебишовською точкою системи $\{a(s), s \in S\}$ у множині *V*.

Теорему доведено.

Оскільки задача відшукання величини (2) є частковим випадком задачі (1), то із доведених теорем випливають наступні теореми характеризації та єдиності відносного чебишовського центра.

Наслідок 1. Для того щоб елемент $g^* \in V$ був чебишовським центром компакту *S* простору *X* у множині *V*, необхідно, а у випадку, коли множина *V* є Г-множиною відносно g^* (зірковою відносно g^* або опуклою множиною), і достатньо, щоб для кожного $g \in V$ існували елементи $y_g \in S$, $f_g \in B^*$, для яких

$$f_g\left(g - y_g\right) = \max_{y \in S} \|g - y\|, \ \operatorname{Re} f_g\left(g - g^*\right) \geq 0 .$$

Наслідок 2. Для того щоб елемент $g^* \in V$ був єдиним чебишовським центром компакту *S* простору *X* у множині *V*, необхідно, а у випадку, коли множина *V* є Г-множиною відносно g^* та Γ^*-множиною відносно кожного іншого свого елемента, і достатньо, щоб для кожного $g \in V$, $g \neq g^*$, та для будь-яких $y_g \in S$, $f_g \in B^*$ таких, що

$$f_g\left(g - y_g\right) = \max_{y \in S} \|g - y\|,$$

виконувалась нерівність

$$\operatorname{Re} f_g \left(g - g^* \right) > 0 .$$

Висновки. Для задачі відшукання величини (3) встановлено необхідні, достатні умови, критерії та умови єдиності її екстремального елемента.

Список використаних джерел:

1. Корнейчук Н. П. Экстремальные задачи теории приближения / Н. П. Корнейчук. – М. : Наука, 1976. – 320 с.
2. Зуховицкий С. И. Алгоритм для решения чебышеской задачи приближения в случае конечной системы несовместных линейных уравнений / С. И. Зуховицкий // ДАН СРСР. – 1951. – Т. 79, № 4. – С. 561–564.
3. Белобров П. К. Об одной задаче чебышевского приближения / П. К. Белобров // Изв. вузов. Математика. – 1967. – № 2. – С. 3–8.
4. Белобров П. К. О чебышевской точке системы множеств / П. К. Белобров // Изв. вузов. Математика. – 1966. – № 6. – С. 18–24.
5. Белобров П. К. К задаче выпуклого чебышевского приближения в нормированном пространстве / П. К. Белобров // Учёные записки Казанского гос. ун-та. – 1965. – Т. 125, кн. 2. – С. 3–6.
6. Белобров П. К. О чебышевской точке системы гиперплоскостей в нормированном пространстве / П. К. Белобров // Изв. вузов. Математика. – 1970. – № 2. – С. 3–9.
7. Гнатюк В. А. Общие свойства наилучшего приближения по выпуклой непрерывной функции / В. А. Гнатюк, В. С. Щирба // Укр. мат. журн. – 1982. – 4, № 5. – С. 608–613.
8. Лоран П.-Ж. Аппроксимация и оптимизация / П.-Ж. Лоран. – М. : Мир, 1975. – 496 с.
9. Гудима У. В. Найкраща рівномірна апроксимація неперервного компактнозначного відображення множинами неперервних однозначних відображень / У. В. Гудима // Укр. мат. журн. – 2005. – 57, № 12. – С. 1601–1619.
10. Гнатюк Ю. В. Критерії екстремального елемента та його єдиності для задачі найкращої рівномірної апроксимації неперервного компактнозначного відображення множинами однозначних відображень / Ю. В. Гнатюк, У. В. Гудима // Доп. НАНУ. – 2005 – № 6. – С. 19–23.

The necessary, sufficient conditions and criteria of Chebyshev point of system bounded closed convex sets, which change constantly and its uniqueness are established.

Key words: *Chebyshev point, a system of convex bounded closed sets, necessary, sufficient conditions and criteria.*

Отримано: 28.04.2010