УДК 517.5

**У. В. Гудима,** канд. фіз.-мат. наук

Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський

# КРИТЕРІЇ ЧЕБИШОВСЬКОЇ ТОЧКИ СИСТЕМИ ОПУКЛИХ ОБМЕЖЕНИХ ЗАМКНЕНИХ МНОЖИН, ЯКІ НЕПЕРЕРВНО ЗМІНЮЮТЬСЯ, ВІДНОСНО СКІНЧЕННОВИМІРНОГО ПІДПРОСТОРУ

У статті встановлено критерії чебишовської точки деякої системи опуклих обмежених замкнених множин лінійного над полем комплексних чисел нормованого сепарабельного простору, які неперервно змінюються, відносно скінченновимірного підпростору цього простору.

**Ключові слова:** *система опуклих обмежених замкнених множин, чебишовська точка, критерій.*

**Вступ.** У роботі встановлено критерії чебишовської точки деякої системи опуклих обмежених замкнених множин лінійного над полем комплексних чисел нормованого сепарабельного простору, які неперервно змінюються, відносно скінченновимірного підпростору цього простору.

**Постановка задачі.** Нехай $X$ – лінійний над полем комплексних чисел нормований сепарабельний простір. Для підмножини $F$ та елемента $g$ цього простору покладемо $E_F\left(g\right)=\inf\limits_{y\in F}\left\|g-y\right\|$. Будемо позначати через $O\left(X\right)$ сукупність опуклих обмежених замкнених множин простору $X$, через $H\left(A,B\right)=\max\left\{\sup\limits_{x\in A}E_B\left(x\right),\sup\limits_{y\in B}E_A\left(y\right)\right\}$ – гаусдорфову відстань між множинами $A,B$ із $O\left(X\right)$. Нехай, крім того, $S$ – метричний компакт, $C\left(S,O\left(X\right)\right)$ – множина багатозначних відображень компакта $S$ в $X$ таких, що для кожного $s\in S$ $a\left(s\right)=O_s\in O\left(X\right)$ і вони неперервні на $S$ відносно метрики Гаусдорфа на $O\left(X\right)$, $a\in C\left(S,O\left(X\right)\right)$, $V$ – лінійний підпростір простору $X$, породжений лінійно незалежними векторами $g_i\in X$, $i=\overline{1,n}$.

Поставимо задачу відшукання величини

$$\alpha_a^*(V) = \inf_{g\in V}\max_{s\in S} E_{a(s)}(g) = \inf_{g\in V}\max_{s\in S}\inf_{y\in a(s)}\|g-y\| =$$
$$= \inf_{\substack{\alpha_i\in\mathbb{R},\\ i=\overline{1,n}}}\max_{s\in S}\inf_{y\in a(s)}\left\|\sum_{i=1}^{n}\alpha_i g_i - y\right\|. \qquad (1)$$

Існує елемент $g^* \in V$ такий, що $\alpha_a^*(V) = \max_{s\in S}\inf_{y\in a(s)}\|g^* - y\|$. Його будемо називати чебишовською точкою відносно підпростору $V$ (у підпросторі $V$) системи $\{a(s), s\in S\}$ опуклих обмежених замкнених множин простору $X$, які неперервно змінюються щодо гаусдорфової відстані на $O(X)$, або екстремальним елементом для величини (1).

**Актуальність теми.** Задача, що розглядається в роботі, виникає, зокрема, при найкращому у деякому розумінні відновленні елементами скінченновимірного підпростору сталих відображень функціональної залежності, про яку лише відомо, що її значення в кожній точці компакта $S$ належить деякій обмеженій опуклій замкненій множині лінійного нормованого простору.

Актуальність дослідження поставленої у роботі задачі випливає також зі змісту поняття відносної чебишовської точки системи множин.

**Мета роботи**. Встановити критерії чебишовської точки системи опуклих обмежених замкнених множин лінійного над полем комплексних чисел нормованого сепарабельного простору, які неперервно змінюються, відносно скінченновимірного підпростору цього простору.

**Допоміжні твердження**. Нехай $X^*$ – простір, спряжений з $X$, $X_{\mathbb{R}}$ – дійсний лінійний нормований простір, асоційований з простором $X$, тобто простір $X$, розглядуваний лише над полем дійсних чисел, $X_{\mathbb{R}}^*$ – простір, спряжений з простором $X_{\mathbb{R}}$, $p$ – дійснозначна функція, задана на $X$ і, отже, на $X_{\mathbb{R}}$. Як відомо (див., наприклад, [1, с.319]), функцією, спряженою з $p$, називається функція на $X_{\mathbb{R}}^*$, визначена рівністю

$$p^*(\varphi) = \sup_{g\in X_{\mathbb{R}}}\left(\varphi(g) - p(g)\right), \varphi\in X_{\mathbb{R}}^*.$$

Елемент $\varphi\in X_{\mathbb{R}}^*$ називається субградієнтом функції $p$ в точці $g_0\in X_{\mathbb{R}}$, якщо $p(g) - p(g_0) \ge \varphi(g-g_0)$, $g\in X_{\mathbb{R}}$.

Множину субградієнтів функції $p$ в точці $g\in X$ називають субдиференціалом цієї функції в точці $g$ і позначають $\partial p(g)$.

Відомо (див., наприклад, [2]), що у випадку, коли $F$ є опуклою замкненою множиною, функція найкращого наближення $E_F\left(g\right)$, $g \in X$, є неперервною та опуклою на $X$ і, отже, на $X_{\mathbb{R}}$. Тому для кожної точки $g \in X$ $\partial E_F\left(g\right)$ є непорожньою опуклою слабко* компактною множиною простору $X_{\mathbb{R}}^*$ (див., наприклад, [1, с.327]).

**Твердження 1.** *Нехай $F$ – опукла замкнена множина простору $X$, $g$ – довільний елемент цього простору. Має місце рівність*

$$E_F\left(g\right) = \inf_{y \in F}\left\|g - y\right\| = \max_{f \in B^*}\left(\operatorname{Re} f\left(g\right) - \sup_{y \in F}\operatorname{Re} f\left(y\right)\right).$$

**Твердження 2.** *Нехай для опуклої замкненої множини $F$ простору $X$ та елемента $g$ цього простору*

$$B^*\left(g, F\right) = \left\{f : f \in B^*,\ E_F\left(g\right) = \inf_{y \in F}\left\|g - y\right\| = \right.$$

$$\left. = \max_{f \in B^*}\left(\operatorname{Re} f\left(g\right) - \sup_{y \in F}\operatorname{Re} f\left(y\right)\right) = \operatorname{Re} f\left(g\right) - \sup_{y \in F}\operatorname{Re} f\left(y\right)\right\},$$

$$\operatorname{Re}\left(B^*\left(g, F\right)\right) = \left\{\operatorname{Re} f : f \in B^*\left(g, F\right)\right\}.$$

*Має місце рівність* $\partial E_F\left(g\right) = \operatorname{Re}\left(B^*\left(g, F\right)\right)$.

**Твердження 3.** *Для будь-яких $a \in C\left(S, O\left(X\right)\right)$, $g \in X$ функція $E_{a(s)}\left(g\right) = \inf_{y \in a(s)}\left\|g - y\right\|$, $s \in S$, є неперервною по $s$ на $S$.*

**Основні результати.** У подальшому будемо вважати, що обмеження $g \in V$ в задачі відшукання величини (1) є істотним, тобто

$$\alpha_a^* < \alpha_a^*\left(V\right),$$

де $\alpha_a^* = \inf_{g \in X}\max_{s \in S}\inf_{y \in a(s)}\left\|g - y\right\|$.

Для $a \in C\left(S, O\left(X\right)\right)$ та $g^* \in V$ покладемо

$$S_a^{g^*} = \left\{s \in S : \max_{s \in S}\inf_{y \in a(s)}\left\|g^* - y\right\| = \inf_{y \in a(s)}\left\|g^* - y\right\|\right\},$$

$$B^*\left(g^*, a\left(s\right)\right) = \left\{f : f \in B^*, E_{a(s)}\left(g^*\right) = \inf_{y \in a(s)}\left\|g^* - y\right\| = \right.$$

$$\left. = \max_{f \in B^*}\left(\operatorname{Re} f\left(g^*\right) - \sup_{y \in a(s)}\operatorname{Re} f\left(y\right)\right) = \operatorname{Re} f\left(g^*\right) - \sup_{y \in a(s)}\operatorname{Re} f\left(y\right)\right\}, s \in S_a^{g^*},$$

$$L\left(g^*\right)=\bigcup_{s\in S_a^{g^*}}\ \bigcup_{f\in B^*\left(g^*,a(s)\right)}\left(\operatorname{Re} f\left(g_1\right),\ldots,\operatorname{Re} f\left(g_n\right)\right).$$

**Теорема 1.** *Нехай* $a\in C\left(S,O\left(X\right)\right)$, $g^*\in V$. *Для того щоб елемент* $g^*\in V$ *був чебишовською точкою системи* $\left\{a\left(s\right),s\in S\right\}$ *у* $V$, *необхідно і достатньо, щоб для кожного елемента* $g\in V$ *існували елементи* $s_g\in S$, $f_g\in B^*$ *такі, що*

$$\max_{s\in S}\inf_{y\in a(s)}\left\|g^*-y\right\|=\inf_{y\in a\left(s_g\right)}\left\|g^*-y\right\|=\max_{f\in B^*}\left(\operatorname{Re} f\left(g^*\right)-\sup_{y\in a\left(s_g\right)}\operatorname{Re} f\left(y\right)\right)=$$

$$=\operatorname{Re} f_g\left(g^*\right)-\sup_{y\in a\left(s_g\right)}\operatorname{Re} f_g\left(y\right),\qquad \operatorname{Re} f_g\left(g\right)\ge 0\,.$$

**Твердження 4.** *Для* $a\in C\left(S,O\left(X\right)\right)$, $g^*\in V$ *множина* $L\left(g^*\right)$ *є компактною множиною простору* $\mathbb{R}^n$.

<u>Доведення.</u> Для кожного $s\in S_a^{g^*}$ і $f\in B^*\left(g^*,a\left(s\right)\right)$ маємо, що

$$\left\|\left(\operatorname{Re} f\left(g_1\right),\ldots,\operatorname{Re} f\left(g_n\right)\right)\right\|=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(\operatorname{Re} f\left(g_i\right)\right)^2}\le$$

$$\le\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left|f\left(g_i\right)\right|^2}\le\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left\|f\right\|^2\left\|g_i\right\|^2}\le\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left\|g_i\right\|^2}\,.$$

Звідси випливає обмеженість множини $L\left(g^*\right)$.

Переконаємося у замкненості цієї множини. Нехай $a^*=\left(a_1^*,\ldots,a_n^*\right)$ – її гранична точка. Тоді існують послідовності $\left\{s_k\right\}_{k=1}^{\infty}$, $\left\{f_k\right\}_{k=1}^{\infty}$ такі, що $s_k\in S_a^{g^*}$, $f_k\in B^*\left(g^*,a\left(s_k\right)\right)$ і

$$\lim_{k\to\infty}\operatorname{Re} f_k\left(g_i\right)=a_i^*,i=\overline{1,n}. \tag{2}$$

Оскільки $S$ – метричний компакт, а простір $X$ – нормований сепарабельний простір, то з послідовностей $\left\{s_k\right\}_{k=1}^{\infty}$ та $\left\{f_k\right\}_{k=1}^{\infty}$ можна вибрати підпослідовності $\left\{s_{k_l}\right\}_{l=1}^{\infty}$ та $\left\{f_{k_l}\right\}_{l=1}^{\infty}$ відповідно такі, що $\left\{s_{k_l}\right\}_{l=1}^{\infty}$ сильно збігається до $s^*$, $s^*\in S$, а $\left\{f_{k_l}\right\}_{l=1}^{\infty}$ слабко збігається до $f^*$, $f^*\in X^*$. Оскільки $s_{k_l}\in S_a^{g^*}$, то

$$\max_{s\in S}\inf_{y\in a(s)}\left\|g^*-y\right\|=\inf_{y\in a\left(s_{k_l}\right)}\left\|g^*-y\right\|=E_{a\left(s_{k_l}\right)}\left(g^*\right).$$

Відповідно до твердження 3 звідси одержимо

$$\lim_{l\to\infty}\inf_{y\in a\left(s_{k_l}\right)}\left\|g^*-y\right\|=\inf_{y\in a\left(s^*\right)}\left\|g^*-y\right\|=\max_{s\in S}\inf_{y\in a(s)}\left\|g^*-y\right\|.$$

Тому $s^*\in S_a^{g^*}$. Оскільки $\left\|f^*\right\|\le\varliminf_{l\to\infty}\left\|f_{k_l}\right\|$ (див., наприклад, [3, с. 287]), $\left\|f_{k_l}\right\|\le 1$, $l=1,2,...,$ то $\left\|f^*\right\|\le 1$ і, отже, $f^*\in B^*$.

Внаслідок (2)

$$\lim_{l\to\infty}\operatorname{Re}f_{k_l}\left(g_i\right)=a_i^*, i=\overline{1,n}. \qquad (3)$$

Враховуючи слабку збіжність послідовності $\left\{f_{k_l}\right\}_{l=1}^{\infty}$ до $f^*$ робимо висновок, що

$$\lim_{l\to\infty}\operatorname{Re}f_{k_l}\left(g_i\right)=\operatorname{Re}f^*\left(g_i\right), i=\overline{1,n}. \qquad (4)$$

З рівностей (3), (4) випливає, що

$$a^*=\left(a_1^*,...,a_n^*\right)=\left(\operatorname{Re}f^*\left(g_1\right),...,\operatorname{Re}f^*\left(g_n\right)\right). \qquad (5)$$

Оскільки $f_{k_l}\in B^*\left(g^*,a\left(s_{k_l}\right)\right), l=1,2,...,$ то відповідно до твердження 2 одержимо, що для довільного $g\in X$

$$E_{a\left(s_{k_l}\right)}(g)-E_{a\left(s_{k_l}\right)}\left(g^*\right)\ge\operatorname{Re}f_{k_l}\left(g-g^*\right). \qquad (6)$$

Оскільки $\lim_{l\to\infty}s_{k_l}=s^*$, то згідно з твердженням 3

$$\lim_{l\to\infty}E_{a\left(s_{k_l}\right)}(g)=E_{a\left(s^*\right)}(g), \lim_{l\to\infty}E_{a\left(s_{k_l}\right)}\left(g^*\right)=E_{a\left(s^*\right)}\left(g^*\right).$$

З урахуванням цього, слабкої збіжності послідовності $\left\{f_{k_l}\right\}_{l=1}^{\infty}$ до $f^*$ та співвідношення (6) робимо висновок, що

$$E_{a\left(s^*\right)}(g)-E_{a\left(s^*\right)}\left(g^*\right)\ge\operatorname{Re}f^*\left(g-g^*\right),\ g\in X_{\mathbb{R}}.$$

Отже, $\operatorname{Re}f^*\in\partial E_{a\left(s^*\right)}\left(g^*\right)$. Згідно з твердженням 2 тоді $f^*\in B^*\left(g^*,a\left(s^*\right)\right)$.

Маємо, що $s^*\in S_a^{g^*}$, $f^*\in B^*\left(g^*,a\left(s^*\right)\right)$ та має місце рівність (5). Тому $a^*\in L\left(g^*\right)$ і, отже, $L\left(g^*\right)$ є замкненою множиною простору $\mathbb{R}^n$.

Вище встановлено обмеженість цієї множини. Звідси робимо висновок, що $L\left(g^*\right)$ є компактом простору $\mathbb{R}^n$.

Твердження доведено.

**Теорема 2.** *Нехай* $a \in C\left(S, O\left(X\right)\right)$, $g^* \in V$. *Для того щоб елемент* $g^*$ *був чебишовською точкою системи* $\left\{a\left(s\right), s \in S\right\}$ *у* $V$, *необхідно і достатньо, щоб* $0 \in coL\left(g^*\right)$.

Доведення. *Необхідність*. Нехай $g^*$ є екстремальним елементом для величини (1). Згідно з теоремою 1 не існує такого $\alpha = \left(\alpha_1, ..., \alpha_n\right)$, щоб для всіх $s \in S_a^{g^*}$, $f \in B^*\left(g^*, a\left(s^*\right)\right)$ виконувалась нерівність $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \operatorname{Re} f\left(g_i\right) < 0$.

Звідси випливає, що

$$M = \left\{\alpha : \alpha = \left(\alpha_1, ..., \alpha_n\right) \in \mathbb{R}^n, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i < 0, e = \left(e_1, ..., e_n\right) \in L\left(g^*\right)\right\} = \varnothing .$$

Тому, враховуючи компактність $L\left(g^*\right)$ (див. твердження 4), робимо висновок, що $0 \in coL\left(g^*\right)$ (див., наприклад, [1, с.90]).

Необхідність доведено.

*Достатність.* Нехай $0 \in coL\left(g^*\right)$. Тоді $M = \varnothing$ (див., наприклад, [1, с.90]). Тому не існує вектора $g \in V$, що $\operatorname{Re} f\left(g\right) < 0$ для всіх $s \in S_a^{g^*}$, $f \in B^*\left(g^*, a\left(s^*\right)\right)$.

Згідно з теоремою 1 $g^*$ є екстремальним елементом для величини (1).

Теорему доведено.

**Теорема 3**. *Нехай* $a \in C\left(S, O\left(X\right)\right)$, $g^* \in V$. *Для того щоб елемент* $g^* \in V$ *був екстремальним елементом для величини (1), необхідно і достатньо, щоб існували точки* $s_j \in S$, $f_j \in B^*$, *додатні числа* $\rho_j$, $1 \leq j \leq k \leq n+1$, $\sum_{j=1}^{k} \rho_j = 1$, *такі, що*

$$\max_{s\in S}\inf_{y\in a(s)}\left\|g^*-y\right\|=\inf_{y\in a(s_j)}\left\|g^*-y\right\|=\max_{f\in B^*}\left(\operatorname{Re}f\left(g^*\right)-\sup_{y\in a(s_j)}\operatorname{Re}f\left(y\right)\right)=$$
$$=\operatorname{Re}f_j\left(g^*\right)-\sup_{y\in a(s_j)}\operatorname{Re}f_j\left(y\right),\ j=\overline{1,k}, \tag{7}$$

$$\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\operatorname{Re}f_j\left(g\right)=0, g\in V . \tag{8}$$

<u>Доведення.</u> *Необхідність*. Нехай $g^*$ є екстремальним елементом для величини (1). На підставі теореми 2 $0\in coL\left(g^*\right)$. Згідно з теоремою Каратеодорі (див., наприклад, [1, с.76]) існують $e^j\in L\left(g^*\right)$, числа $\rho_j>0$, $j=\overline{1,k}$, $1\le k\le n+1$, $\sum_{j=1}^{k}\rho_j=1$, такі, що

$$\sum_{j=1}^{k}\rho_j e^j=0 . \tag{9}$$

За означенням множини $L\left(g^*\right)$ для кожного $j\in\{1,...,k\}$ існують $s_j\in S_a^{g^*}$, $f_j\in B^*\left(g^*,a\left(s_j\right)\right)$ такі, що

$$e^j=\left(\operatorname{Re}f_j\left(g_1\right),...,\operatorname{Re}f_j\left(g_n\right)\right),\ j=\overline{1,k} . \tag{10}$$

Враховуючи, що для кожного $s\in S_a^{g^*}$, $f\in B^*\left(g^*,a\left(s\right)\right)$ маємо, що $f\in B^*$, робимо висновок, що для елементів $s_j\in S_a^{g^*}$, $f_j\in B^*$, $j=\overline{1,k}$, мають місце рівності (7).

З рівностей (9), (10) одержуємо, що $\sum_{j=1}^{k}\rho_j\operatorname{Re}f_j\left(g_i\right)=0, i=\overline{1,n}$.

Звідси випливає справедливість рівності (8).

Необхідність доведено.

*Достатність.* Нехай для $g^*\in V$ існують елементи $s_j\in S$, $f_j\in B^*$, додатні числа $\rho_j$, $1\le j\le k\le n+1$, $\sum_{j=1}^{k}\rho_j=1$, такі, що мають місце рівності (7), (8). Переконаємося, що $g^*$ є екстремальним елементом для величини (1).

З (7), (8) для будь-якого $g \in V$ отримаємо, що

$$\max_{s\in S}\inf_{y\in a(s)}\left\|g^{*}-y\right\|=\sum_{j=1}^{k}\rho_j\left(\operatorname{Re} f_j\left(g^{*}\right)-\sup_{y\in a\left(s_j\right)}\operatorname{Re} f_j\left(y\right)\right)=$$

$$=-\sum_{j=1}^{k}\rho_j\sup_{y\in a\left(s_j\right)}\operatorname{Re} f_j\left(y\right)=\sum_{j=1}^{k}\rho_j\left(\operatorname{Re} f_j\left(g\right)-\sup_{y\in a\left(s_j\right)}\operatorname{Re} f_j\left(y\right)\right)=$$

$$=\sum_{j=1}^{k}\rho_j\inf_{y\in a\left(s_j\right)}\operatorname{Re} f_j\left(g-y\right)\le\sum_{j=1}^{k}\rho_j\inf_{y\in a\left(s_j\right)}\left\|g-y\right\|\le$$

$$\le\max_{1\le j\le k}\inf_{y\in a\left(s_j\right)}\left\|g-y\right\|\le\max_{s\in S}\inf_{y\in a(s)}\left\|g-y\right\|.$$

Звідси й випливає, що $g^{*}$ є екстремальним елементом для величини (1).

Теорему доведено.

**Висновки.** Встановлено критерії чебишовської точки системи опуклих обмежених замкнених множин лінійного над полем комплексних чисел нормованого сепарабельного простору, які неперервно змінюються, відносно скінченновимірного підпростору цього простору, які можна використати для відшукання цієї точки або її наближеного значення.

## Список використаних джерел:

1. Лоран П.-Ж. Аппроксимация и оптимизация / П.-Ж. Лоран. – М. : Мир, 1975. – 496 с.
2. Гнатюк В. А. Общие свойства наилучшего приближения по выпуклой непрерывной функции / В. А. Гнатюк, В. С. Щирба // Укр. мат. журн. – 1982. – 4, № 5. – С. 608–613.
3. Канторович Л. В. Функциональный анализ / Л. В. Канторович, Г. П. Акилов. – М. : Наука, 1977. – 742 с.

In the article there established the criteria Chebyshev point of a system of convex bounded closed sets of linear over the complex numbers a separable normed space which is continuously changing relatively a finite-dimensional subspace of this space.

**Key words:** *Chebyshev point, a system of convex bounded closed sets, criteria.*

Отримано: 23.05.2010