УДК 519.95.6

В. К. Задірака, д-р фіз.-мат. наук, чл.-кор. НАНУ,
О. М. Коломис, м. н. с.
Інститут кібернетики ім. В. М. Глушкова НАН України, м. Київ

КОМП'ЮТЕРНА ТЕХНОЛОГІЯ ПОБУДОВИ МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ НЕПЕРЕРВНИХ ВИРОБНИЧИХ ПРОЦЕСІВ ЗАДАНОЇ ЯКОСТІ

Розглянуто питання розробки комп'ютерної технології побудови математичних моделей неперервних виробничих процесів заданої якості. У роботі розглядається застосування резервів оптимізації обчислень при побудові математичних моделей неперервних виробничих процесів для підвищення якості математичної моделі. Серед таких резервів слід відмітити: максимальне використання апріорної інформації про задачу та її уточнення, використання якісних оцінок обчислювальних алгоритмів, інших постановок задач і т.д.

Ключові слова: *комп'ютерна технологія, математична модель, неперервні виробничі процеси, резерви оптимізації, апріорна інформація, частотна характеристика.*

Вступ. Робота присвячена розробці комп'ютерної технології побудови математичних моделей неперервних виробничих процесів заданої якості. Для підвищення якості математичної моделі неперервних виробничих процесів використовуються резерви оптимізації обчислень.

Моделювання використовують для розв'язування різних задач, найважливіші з яких: дослідження нових процесів; проектування виробництв; оптимізація окремих апаратів і технологічних схем; виявлення резервів потужностей і відшукання найбільш ефективних шляхів модернізації діючих виробництв; оптимальне планування виробництв; розробка автоматизованих систем керування виробництвами, що проектуються; побудова автоматизованих систем наукових досліджень. Неможливо уявити собі сучасну науку без широкого застосування математичного моделювання.

Математичною моделлю об'єкта керування будемо називати сукупність залежностей, таблиць і графіків, які кількісно описують статичні і динамічні зв'язки між величинами, які характеризують функціонування об'єкта, а також імовірнісні характеристики цих величин [1].

Математичне моделювання й пов'язаний з ним комп'ютерний експеримент важливі в тих випадках, коли натурний експеримент неможливий або з тих чи інших причин його важко здійснити (висока собівартість, складність і небезпека).

Постановка задачі. Наша мета — створення комп'ютерної технології побудови якісних оцінок динамічних характеристик неперервних виробничих процесів.

Задача побудови математичної моделі об'єкта керування зводиться до задачі вибору тієї моделі даного класу і тих параметрів фіксованої моделі, при яких ми отримаємо найкраще значення функції розбіжності в роботі об'єкта та моделі.

Функцією розбіжності функціонування об'єкта і моделі будемо називати $\delta = \left\| Y^0 - Y \right\|$, де Y^0 — вектор вихідних випадкових величин об'єкта керування, Y — вектор вихідних випадкових величин математичної моделі (норма береться в тому просторі, якому належить елемент $Y^0 - Y$) [1].

Оскільки інформація про об'єкт надається датчиками-перетворювачами, то вона завжди задана наближено. Інформацію про точність роботи датчиків-перетворювачів можна взяти в технічних паспортах відповідних приладів.

Якість моделі природно характеризувати умовою $\delta < \varepsilon,\ \varepsilon > 0$. Слід відмітити, що зменшувати ε нескінченно немає змісту, а іноді і принципово неможливо, оскільки при кожній точності вимірювання вхідної інформації і рівні шумів буде якась границя для доцільного або можливого зменшення ε. Число ε може бути узгоджене з точністю вхідної інформації, затратами на побудову цієї моделі і іншими характеристиками.

Слід відмітити, що для розв'язку багатьох задач керування об'єктом необхідно знати з достатньою точністю динамічні характеристики об'єкта, які постійно змінюються. Комп'ютерні технології [2] побудови математичних моделей неперервних виробничих процесів передбачають побудову ефективних за точністю оцінок їх статичних, динамічних та імовірнісних характеристик в умовах найбільш повного використання апріорної інформації про об'єкт.

Використання резервів оптимізації обчислень дозволяє підвищити потенційну спроможність чисельних методів і побудувати математичну модель із заданою якістю або довести, що при даній інформації про задачу її розв'язання з заданою якістю неможливе.

Розглянемо основні резерви оптимізації обчислень при побудові математичних моделей об'єктів керування заданої якості:

- максимальне використання апріорної інформації про неперервний процес та її уточнення;
- звуження класу обчислювальних задач, що виникають, за рахунок максимального використання інформації про задачу;

- використання оптимальних та близьких до них (за точністю та швидкодією) алгоритмів для виділених задач [3];
- використання якісних оцінок обчислювальних алгоритмів;
- використання схем обчислень, які мінімізують накопичення похибки заокруглень.

Виявлення та уточнення апріорної інформації про об'єкт. Для отримання якісних математичних моделей необхідна відповідна апріорна інформація про задачу [4]. Наприклад алгоритми виявлення по дискретній інформації про функцію порядку похідної, яку вона має, констант, які її обмежують або константи Гельдера і відповідного показника, яким задовольняє функція. Якщо ця інформація задана з похибкою, то неточними будуть і висновки про якість математичної моделі.

Важливе значення мають відомості про вихідну інформацію задачі та її якість з багатьох аспектів [3]. Адже, якщо використати більш якісну інформацію про задачу, тоді можна розраховувати на більш якісний наближений розв'язок. Чим точніша вихідна інформація, тим точніші оцінки похибки і менша область невизначеності наближеного розв'язку задачі. Оцінки похибки використовуються також в комп'ютерних технологіях розв'язування задач із заданими характеристиками якості за точністю та швидкодією [2].

Отож, отримання якісної апріорної інформації має важливе значення також при побудові математичних моделей неперервних виробничих процесів. Таку інформацію можна отримати у фахівців, які добре знають технологічний процес, що вивчається. Ця інформація може бути отримана також за допомогою алгоритмів виявлення та уточнення апріорної інформації [5], які можуть допомогти в побудові якісної математичної моделі, а також фахівцям в поглибленні своїх знань про процес, що моделюється.

Ми можемо звузити клас задач, що розв'язуються, за рахунок максимального використання усієї наявної інформації про задачу. (В нашому випадку задача побудови оцінок динамічних характеристик зводиться до задачі апроксимації функції багатьох змінних [1]).

Наприклад, якщо апроксимується функція з інтерполяційного класу Ліпшиця $F \equiv C_{L,N,\varepsilon}$ [1] [3], а відомі не самі L і ε, а лише набли-

[1] Під інтерполяційним класом $C_{L,N,\varepsilon}$ будемо розуміти клас функцій визначених на $[a,b]$, що задовольняють умові Ліпшиця $\left|f(x_1)-f(x_2)\right| \le L\left|x_1-x_2\right|$, $x_1,\, x_2 \in [a,b]$ із наближено заданими фіксованими значеннями $\left\{\tilde{f}_i\right\}_0^{N-1}$ у вузлах фіксованої сітки $\left\{x_i\right\}_0^{N-1}$, причому $\left|\tilde{f}_i - f_i\right| \le \varepsilon_i$. Якщо $\varepsilon = 0$, то $C_{L,N,\varepsilon} \equiv C_{L,N}$.

ження до них. В таких випадках доцільно використовувати для апроксимації функції методи нев'язки та квазірозв'язків [6].

Для класу $F \equiv C_{L,N,\varepsilon}$ апроксимуюча функція є розв'язком задачі

$$\min_{f \in F} \max_{0 \le i \le N-1} \varepsilon_i . \tag{1}$$

Іншими словами, метод квазірозв'язків полягає в знаходженні функції, яка найменше відхиляється від заданого набору точок $\left(x_i, \tilde{f}_i\right)$, $i = \overline{0, N-1}$, $\tilde{f}_i = f_i + \varepsilon_i$.

Розв'язком задачі (1) є лінійний сплайн $S\left(x, L\right)$, у якого максимальне відхилення від заданих точок $\left(x_i, \tilde{f}_i\right)$, $i = \overline{0, N-1}$, мінімальне [6]:

$$\begin{gathered} S\left(x, L\right) = \widehat{f}_i + \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i}\left(\widehat{f}_{i+1} - \widehat{f}_i\right), \\ x \in \left[x_i, x_{i+1}\right], \quad i = \overline{0, N-1}, \end{gathered} \tag{2}$$

$$\begin{gathered} \widehat{f}_i = \frac{\tilde{f}_i^{+} - \tilde{f}_i^{-}}{2}, \\ \tilde{f}_i^{\pm} = \max_{1 \le j \le N}\left[\pm\left(\tilde{f}_j \mp L\left|x_j - x_i\right|\right)\right], \ i = \overline{0, N-1}. \end{gathered} \tag{3}$$

Часто кількісна апріорна інформація, яка задіяна в визначенні класу F, задається у вигляді обмежень на деякий функціонал. Для класів $C_{L,N}$ і $C_{L,N,\varepsilon}$ в якості такого функціоналу $\Phi\left(f\right)$ є рівномірна норма похідної. Будемо апроксимувати функцію $f\left(x\right)$ функцією, яка є розв'язком такої задачі:

$$\min_{f \in F} \Phi\left(f\right). \tag{4}$$

Розв'язком задачі (4) є лінійний сплайн $S\left(x, M\right)$, який визначається співвідношеннями (2, 3) із заміною константи Ліпшиця на константу M, де

$$M = \max_{1 \le j \le N}\left(0; \max_{j > i} \frac{\left|f_j - f_i\right| - \varepsilon_j - \varepsilon_i}{x_j - x_i}\right).$$

Розглянуті алгоритми апроксимації є оптимальними за порядком точності з константою, яка не перевищує 2 (навіть якщо порівнювати з випадком точного задання L і ε) [7]. Однак, наближення, які отримані за методом нев'язки або квазірозв'язків, можуть виявитись набагато точнішими оптимального за точністю алгоритму апроксимації, так як пошук цих розв'язків направлений на уточнення апріорної інформації. Застосування методів нев'язки та квазрозв'язків є одним з способів використання резервів оптимізації за точністю.

Чим більше апріорної інформації різного характеру відомо про об'єкт дослідження і чим більше її використовує алгоритм, тим ефективніше може бути розв'язана задача (за точністю та часом).

Ефективність алгоритмів визначається за оцінками їх характеристик, тому оцінки повинні бути високої якості. Навіть оцінки високої якості будуються для класу задач. І тому, чим у вужчий клас ми занурюємо задачу, тим більш точною буде оцінка точності для цієї задачі. Врахування додаткової апріорної інформації дає можливість вибрати такий клас для розв'язуваної задачі, який краще описує задачу.

Не завжди можна отримати ε-розв'язки деяких задач (хоча, вхідної інформації для цього може бути достатньо), або не можна переконатися, що ε-розв'язки досягнуті. В таких випадках важливо мати оптимальні за точністю алгоритми, а також апостеріорні оцінки похибки (які в порівнянні з апріорними є більш точними) [3].

Ефективні за точністю алгоритми визначення оцінок частотних характеристик об'єктів керування. Як відомо [1], динамічною характеристикою об'єкта називається оператор $A(t)$, який встановлює залежність вихідних величин $Y^0\left(y_1, y_2, ..., y_n\right)$ від вхідних $X\left(x_1, x_2, ..., x_m\right)$ в будь-який момент часу t

$$Y^0\left(t\right) = A(t)\left[X\right], \tag{5}$$

де $Y^0\left(t\right)$ і $X\left(t\right)$ задані на деякому відрізку часу $\left[T_1, T_2\right]$, причому на значення $Y^0\left(t\right)$ в момент часу t_0 впливає $X\left(t\right)$ при $-\infty \le T_1 \le t \le t_0 \le T_2 \le \infty$. Залежність (5) називається рівнянням динаміки об'єкта.

Для простоти викладу розглянемо лінійні динамічні характеристики з одним входом і виходом. Однією із лінійних динамічних характеристик є частотна характеристика: відношення перетворення Фур'є $\Upsilon\left(i\omega\right)$ вихідної величини до перетворення Фур'є $X\left(i\omega\right)$ вхідної величини (при нульових початкових умовах)

$$\Phi\left(i\omega\right) = \frac{\Upsilon\left(i\omega\right)}{X\left(i\omega\right)}. \tag{6}$$

Як видно з (6) для обчислення оцінок частотних характеристик об'єктів керування потрібно наближено обчислити перетворення Фур'є, для підінтегральних функцій різних класів (враховуючи знайдену і уточнену апріорну інформацію). У такому випадку слід скористатися оптимальними за точністю і близькими до них квадратурними та кубатурними формулами наближеного обчислення перетворення Фур'є для підінтегральних функцій різних класів [3]. Для побудови оптимальних за точністю квадратурних формул можна використати метод „капелюхів" М.С. Бахвалова або „метод граничних функцій" (МГФ), розроблений в Інституті кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України. МГФ, як правило, використовується в умовах найбільш повного використання апріорної інформації про задачу і дає можливість, на відміну від методу „капелюхів", будувати в точності оптимальні за точністю алгоритми. При цьому треба враховувати той факт, що максимальне врахування апріорної інформації про задачу покращує точність, але погіршує складність алгоритму.

Серед класів функцій для яких побудовано оптимальні квадратурні і кубатурні формули назвемо такі:

- клас Гельдера C_L^α для функції однієї і багатьох змінних (клас функцій, що задовольняє умові Гельдера з константою L і показником α, $0<\alpha\le 1$,
- $\left|f\left(x_1\right)-f\left(x_2\right)\right|\le L\left|x_1-x_2\right|^\alpha$, $x_1, x_2 \in[a,b]$);
- клас Ліпшиця C_L (при $\alpha=1$);
- клас $W_{r,L}$, $r>1$ [1];
- клас $C_{L,N}$;
- інтерполяційний клас Ліпшиця $C_{L,N,\varepsilon}$ з наближено заданою вхідною інформацією;
- інтерполяційний клас $W_{2,N,L}$ [2].

Особливу увагу при побудові математичних моделей неперервних виробничих процесів слід звернути на точність. Для отримання гарантованої оцінки якості математичної моделі треба враховувати всі види похибок: неусувну Δ_H (за рахунок неточності вхідної інформації про задачу), методу Δ_M, заокруглення Δ_τ, які реально супроводжують обчислювальний процес. Гарантією якості похибки є комплексний підхід до оцінки точності, який враховує різні джерела її накопичення.

[1] $W_{r,L}$ – клас функцій, які мають $\left(r-1\right)$ — ну неперервну похідну і $f^{(r-1)}\left(x\right)\in C_L$.

[2] $W_{2,N,L}$ – клас функцій із заданими значеннями функції $\left\{f_\nu\right\}_0^{N-1}$ та її похідної $\left\{f_\nu'\right\}_0^{N-1}$ у вузлах фіксованої сітки $\left\{x_\nu\right\}_0^{N-1}$, $f'\left(x\right)\in C_L$.

Тільки врахування всіх трьох видів похибок (повної похибки) — дасть змогу гарантувати оцінку якості наближеного розв'язку.

При побудові реальних обчислювальних процесів обчислення ε-розв'язку часто користуються оцінками повної похибки, її складових і процесорного часу [9]. При цьому розрізняють оцінки апріорні й апостеріорні, мажорантні й асимптотичні, детерміновані та стохастичні. Можливість і доцільність використання вказаних оцінок та способів їх побудови залежить від типу, структури і точності апріорних даних, задачі і обчислювального алгоритму, від того, з якою метою обчислюється оцінка, а також від обчислювальних ресурсів.

Мажорантні апріорні оцінки гарантують верхню межу оцінюваної величини і виражаються через відомі величини, їх обчислення не потребує значних обчислювальних затрат, але значення оцінок можуть бути завищеними, тому висновки на їх основі щодо можливості обчислення ε-розв'язку при заданих обчислювальних ресурсах можуть бути помилковими. Асимптотичні оцінки апроксимують величину, що оцінюється, варіюванням параметра в околі його граничних значень. При цьому може бути досягнута близькість оцінки до оцінюваної величини, але обчислення таких оцінок пов'язано з певними обчислювальними затратами. Ці оцінки, як правило, апостеріорні. При посилених обмеженнях на якість наближеного розв'язку використовуються асимптотичні оцінки.

Яким чином ми можемо покращити якість похибок?

Розглянемо резерви зменшення міри похибок:

- неусувної Δ_H : за рахунок уточнення вхідних даних; уточнення класу задач; корегування вхідної інформації;
- методу Δ_M : використання оптимальних та близьких до них обчислювальних алгоритмів; повне використання вхідної інформації для звуження класу задач;
- заокруглення Δ_τ : використання методів оптимального порядку точності для високоточних обчислень; звуження класу задач; використання схем обчислень, які мінімізують швидкість накопичення похибки заокруглення; збільшення довжини розрядної сітки; вибір і моделювання правила заокруглення.

Комп'ютерна технологія побудови математичних моделей неперервних виробничих процесів заданої якості. Наведемо покроковий опис технології побудови математичної моделі неперервних виробничих процесів.

Крок 1. Відбраковка хибної інформації [1]. Нехай $x_i = x\left(t_i\right)$ — точне значення сигналу в момент часу t_i , а $\tilde{x}_i = \tilde{x}\left(t_i\right)$ — відповідне наближене значення, яке можна отримати за допомогою датчиків-перетворювачів. Найпростіший алгоритм базується на відкиданні при виході $\tilde{x}_i$ за відомий діапазон зміни x_i з врахуванням похибки представлення $\tilde{x}_i$. Якщо відомо, що $a \le x_i \le b$ і $\left|\tilde{x}_i - x_i\right| \le \varepsilon$, то значення $\tilde{x}_i$, для якого не виконується нерівність $a - \varepsilon \le x_i \le b + \varepsilon$, відкидається. При цьому, звичайно, $\tilde{x}_i$ заміняємо останнім попереднім по часу сигналом $\tilde{x}_i$.

Більш точні алгоритми відбраковки хибної інформації базуються на апріорній інформації про похідні $x\left(t_i\right)$ [1].

Крок 2. Стиснення інформації: При даному способі дискретизації стискаємо інформацію так, щоб можна було відновити її з точністю до заданого ε.

Крок 3. Виявлення та уточнення апріорної інформації про досліджуваний процес [5].

Крок 4. Вибір задачі, яка розв'язується (наприклад, оцінка частотної характеристики; передаточної функції; імпульсно-перехідної функції, обчислення оцінок кореляційних функцій або обчислення оцінок спектральних щільностей).

Крок 5. Занурення цієї задачі у більш вузький клас на основі виявленої апріорної інформації про об'єкт [4].

Крок 6. Вибір (із множини обчислювальних алгоритмів для даного підкласу задач) чи розробка методу (в тому числі оптимального за точністю [3]) розв'язання задачі та відповідного програмного забезпечення із заданими значеннями характеристик якості.

Крок 7. Розв'язання задачі.

Крок 8. Аналіз якості отриманого наближеного розв'язку (на основі оцінок точності або шляхом тестування [10]).

Крок 9. Перехід до інших задач (потрібно перейти на крок 4).

Крок 10. Об'єднання отриманих результатів для побудови математичної моделі (статичних, динамічних, імовірнісних характеристик).

Більш широке тлумачення комп'ютерної технології для розв'язування задач обчислювальної та прикладної математики із заданими значеннями характеристик якості наведено в роботі [2].

Висновки. Робота присвячена розробці комп'ютерної технології побудови математичних моделей неперервних виробничих процесів заданої якості. Розглядаються резерви оптимізації обчислень при побудові математичних моделей неперервних виробничих процесів для підвищення якості математичної моделі. Серед таких резервів слід відмітити: максимальне використання апріорної інформації про задачу та її уточнення, використання якісних оцінок обчислювальних алгоритмів, інших постановок задач і т.д. Основна увага зосереджена на побудові ефективних за точністю та швидкодією оцінок їх динамічних характеристик в умовах найбільш повного використання апріорної інформації про об'єкт дослідження.

Список використаних джерел:

1. Иванов В. В. Методы алгоритмизации непрерывных производственных процессов / В. В. Иванов, А. И. Березовский, В. К. Задирака, Л. Д. Здоренко, Н. П. Лепеха. — М. : Наука, 1975. — 400 с.
2. Сергиенко И. В., Компьютерные технологии решения задач прикладной и вычислительной математики с заданными значениями характеристик качества / В. К. Задирака, М. Д. Бабич, А. И. Березовский, П. Н. Бесараб, В. А. Людвиченко // Кибернетика и системный анализ. — 2006. — № 5. — С. 33–41.
3. Задирака В. К. Теория вычисления преобразования Фурье. — К. : Наук. думка, 1983. — 216 с.
4. Коломыс Е. Н. Оптимальные алгоритмы вычисления оценок динамических характеристик объектов управления // Компьютерная математика. — 2007. — № 2. — С. 98–103.
5. Березовский А. И. О выявлении и уточнении априорной информации / А. И. Березовский, О. С. Кондратенко // УСиМ. — 1997. — № 6. — С. 17–22.
6. Морозов В. А. Регулярные методы решения некорректно поставленных задач / В. А. Морозов. — М. : Изд-во Моск. у-та, 1974. — 359 с.
7. Задирака В. К. Цифровая обработка сигналов / В. К. Задирака, С.С. Мельникова. — К. : Наук. думка, 1993. — 294 с.
8. Коломис О. М. Технологія побудови математичних моделей об’єктів керування заданої якості / О. М. Коломис // Проблемно-наукова міжгалузева конференція “Інформаційні проблеми комп’ютерних систем, юриспруденції, економіки та моделювання” (ПНМК-2008) : зб. наук. праць Бучацького інституту менеджменту і аудиту. — 2008. — Випуск № 4, Т. 1. — С. 149–150.
9. Иванов В.В. Характеристики задач, алгоритмов и ЭВМ в комплексах программ вычислительной математики / В. В. Иванов, М. Д. Бабич, А. И. Березовский, П. Н. Бесараб, В. К. Задирака, В. А. Людвиченко. — К., 1984. — 53 с. (Препринт / АН УССР, Ин-т кибернетики; 84–36).
10. Бабич М. Д. Вычислительный эксперимент в проблеме оптимизации вычислений. Ч. I; II / М. Д. Бабич, В. К. Задирака, И. В. Сергиенко // Кибернетика и системный анализ. — 1999. — № 1. — С. 51–63; № 2. — С. 59–79.

The computer technology development issues of the mathematical models construction of the required quality for the continuous-time production process are considered. Calculation optimization reserves are used that the mathematical model quality increases. Those reserves are highest possible use of a priori information of the task and that specified, use of quality evaluates of the computing algorithms, another set of the task and so on.

Key words: *computer technology, mathematical model, continuous-time production process, optimization reserves, priori information, frequency characteristic.*

Отримано 14.05.10