7. Fortin C. Computing the local minimizers of a large and sparse trust-region subproblem / C. Fortin. – Montreal : McGill University. – 2004. – 149 p.

The author proposes generalization the simplex-method for solving the problem of semidefinite optimization. Approximation of a cone of positively semidefinite matrixes of sum matrixes of a rank unit with positive coefficients is used. It allows to reduce the solution of an initial problem to sequence of problems of linear programming. The algorithm is realised in computer software. The numerical experiments have shown the efficiency of the offered algorithm.

Key words: *simplex-method, semidefinite optimization, interior point method, function Lagrange, quadratic regularization.*

Отримано: 17.05.2010

УДК 517.443

О. М. Ленюк, канд. фіз.-мат. наук
Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, м. Чернівці

ОБЧИСЛЕННЯ НЕВЛАСНИХ ІНТЕГРАЛІВ ЗА ВЛАСНИМИ ЕЛЕМЕНТАМИ ГІБРИДНОГО ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА ФУР'Є–ЕЙЛЕРА–(КОНТОРОВИЧА–ЛЄБЄДЄВА) НА ОБМЕЖЕНІЙ СПРАВА ДЕКАРТОВІЙ ПІВПРЯМІЙ

Методом порівняння розв'язку крайової задачі для системи диференціальних рівнянь Фур'є, Ейлера та (Конторовича-Лєбєдєва) на обмеженій справа декартовій півпрямій з двома точками спряження, побудованого, з одного боку, методом функцій Коші, а, з другого боку, методом відповідного гібридного інтегрального перетворення, обчислено поліпараметричну сім'ю невласних інтегралів за власними елементами відповідного гібридного диференціального оператора.

Ключові слова: *невласні інтеграли, функції Коші, головні розв'язки, гібридне інтегральне перетворення, основна тотожність, умова однозначної розв'язності, логічна схема.*

Постановка проблеми та її аналіз. Тонкостінні елементи конструкцій композитного типу, як правило, знаходяться в короткочасовому стаціонарному режимі, на який вони виходять після стрибкоподібного температурного або силового навантаження. Вивчення їх фізико-технічних характеристик приводить до задач термомеханіки (механіки) кусково-однорідних середовищ. Практика показує, що навіть в найпростіших випадках величини, які характеризують стаціонарний режим композита, зображаються поліпараметричними невласними інтегралами, які можуть бути умовно збіжними навіть тоді, коли зображають аналітичну функцію. Звідси виникає природне бажання замінити невласний інтеграл його результатом збіжності (функцією), що особливо важливо при інженерних розрахунках. Обчисленню однієї сім'ї невласних інтегралів присвячена ця стаття.

Основна частина. Побудуємо обмежений на множині

$$I_2 = \{r : r \in (-\infty, R_1) \cup (R_1, R_2) \cup (R_2, R_3)\}$$

розв'язок сепаратної системи звичайних диференціальних рівнянь Фур'є, Ейлера та Конторовича-Лєбєдєва для модифікованих функцій

$$\begin{gathered}\left(d^2/dr^2 - q_1^2\right)u_1(r) = -g_1(r),\ r \in (-\infty, R_1),\\ \left(B^*_{\alpha_1} - q_2^2\right)u_2(r) = -g_2(r),\ r \in (R_1, R_2),\\ \left(B_{\alpha_2} - q_3^2\right)u_3(r) = -g_3(r),\ \ r \in (R_2, R_3)\end{gathered} \tag{1}$$

з крайовими умовами

$$\lim_{r\to-\infty}[r^{\gamma}u_1(r)] = 0,\ \left(\alpha_{22}^3\, d/dr + \beta_{22}^3\right)u_3(r)\Big|_{r=R_3} = g_R \tag{2}$$

та умовами спряження

$$\left[\left(\alpha_{j1}^k\frac{d}{dr} + \beta_{j1}^k\right)u_k(r) - \left(\alpha_{j2}^k\frac{d}{dr} + \beta_{j2}^k\right)u_{k+1}(r)\right]\Bigg|_{r=R_k} = \omega_{jk},\ \ j,k = 1,2. \tag{3}$$

У рівностях (1)-(3) $q_m > 0$, $c_{1k}\cdot c_{2k} > 0$, $c_{jk} = \alpha_{2j}^k\beta_{1j}^k - \alpha_{1j}^k\beta_{2j}^k$, $B^*_{\alpha_1} = r^2\, d^2/dr^2 + (2\alpha_1+1)r\, d/dr + \alpha_1^2$ — диференціальний оператор Ейлера [1], $B_{\alpha_2} = r^2\, d^2/dr^2 + (2\alpha_2+1)r\, d/dr + \alpha_2^2 - \lambda^2 r^2$ — диференціальний оператор Конторовича-Лєбєдєва [2], $2\alpha_j + 1 > 0$, $\alpha_{jk}^m \ge 0$, $\beta_{jk}^m \ge 0$, $\alpha_{22}^3 + \beta_{22}^3 \ne 0$.

Фундаментальну систему розв'язків для диференціального рівняння Фур'є $(d^2/dr^2 - q_1^2)v = 0$ утворюють функції $v_1 = \exp[q_1(r-R_1)]$ та $v_2 = \exp[-q_1(r-R_1)]$ [1]; фундаментальну систему розв'язків для диференціального рівняння Ейлера $(B^*_{\alpha_1} - q_2^2)v = 0$ утворюють функції $v_1 = r^{-\alpha_1-q_2}$ та $v_2 = r^{-\alpha_1+q_2}$ [1]; фундаментальну систему розв'язків для диференціального рівняння $(B_{\alpha_2} - q_3^2)v = 0$ утворюють модифіковані функції Бесселя першого роду $I_{q_3,\alpha_2}(\lambda r)$ та другого роду $K_{q_3,\alpha_2}(\lambda r)$ [2].

Наявність фундаментальної системи розв'язків дозволяє будувати розв'язок крайової задачі (1)–(3) методом функцій Коші [1,3]:

$$u_1(r) = A_1 e^{q_1(r-R_1)} + \int_{-\infty}^{R_1} E_1(r,\rho) g_1(\rho) d\rho ,$$

$$u_2(r) = A_2 r^{-\alpha_1 - q_2} + B_2 r^{-\alpha_1 + q_2} + \int_{R_1}^{R_2} E_2(r,\rho) g_2(\rho) \rho^{2\alpha_1 - 1} d\rho , \tag{4}$$

$$u_3(r) = A_3 I_{q_3,\alpha_2}(\lambda r) + B_3 K_{q_3,\alpha_2}(\lambda r) + \int_{R_2}^{R_3} E_3(r,\rho) g_3(\rho) \rho^{2\alpha_2 - 1} d\rho .$$

Тут $E_j(r,\rho)$ — функції Коші [1, 3]:

$$E_j(r,\rho)\Big|_{r=\rho+0} - E_j(r,\rho)\Big|_{r=\rho-0} = 0, \quad j = 1,2.$$

$$\frac{dE_j(r,\rho)}{dr}\bigg|_{r=\rho+0} - \frac{dE_j(r,\rho)}{dr}\bigg|_{r=\rho-0} = -\frac{1}{\varphi_j(\rho)} . \tag{5}$$

$$\varphi_1(r) = 1,\ \varphi_2(r) = r^{2\alpha_1 - 1},\ \varphi_3(r) = r^{2\alpha_2 - 1} .$$

Припустимо, що функція Коші

$$E_1(r,\rho) = \begin{cases} \overset{-}{E}_1 \equiv C_1 e^{q_1(r-R_1)}, & -\infty < r < \rho < R_1 \\ \overset{+}{E}_1 \equiv C_2 e^{q_1(r-R_1)} + D_2 e^{-q_1(r-R_1)}, & -\infty < \rho < r < R_1 \end{cases} .$$

Властивості (5) функції Коші дають алгебраїчну систему з двох рівнянь:

$$(C_2 - C_1) e^{q_1(\rho-R_1)} + D_2 e^{-q_1(\rho-R_1)} = 0,$$

$$(C_2 - C_1) e^{q_1(\rho-R_1)} - D_2 e^{-q_1(\rho-R_1)} = -q_1^{-1}.$$

Звідси отримуємо співвідношення:

$$C_2 - C_1 = -\frac{1}{2q_1} e^{-q_1(\rho-R_1)}, \quad D_2 = \frac{1}{2q_1} e^{q_1(\rho-R_1)}. \tag{6}$$

Доповнимо рівності (6) алгебраїчним рівнянням:

$$\left(\alpha_{11}^1 \tfrac{d}{dr} + \beta_{11}^1\right) \overset{+}{E}_1 \Big|_{r=R_1} = 0 : \ \left(\alpha_{11}^1 q_1 + \beta_{11}^1\right) C_2 - \left(\alpha_{11}^1 q_1 - \beta_{11}^1\right) D_2 = 0. \tag{7}$$

Із алгебраїчної системи (6), (7) знаходимо, що

$$C_1 = \frac{[\alpha_{11}^1 q_1 ch q_1(\rho - R_1) - \beta_{11}^1 sh q_1(\rho - R_1)]}{q_1(\alpha_{11}^1 q_1 + \beta_{11}^1)} \equiv \frac{\Phi_{11}^1(q_1 R_1, q_1 \rho)}{q_1(\alpha_{11}^1 q_1 + \beta_{11}^1)} .$$

Цим функція Коші $E_1(r,\rho)$ визначена й внаслідок симетрії відносно діагоналі $r=\rho$ має структуру:

$$E_1(r,\rho)=\frac{1}{q_1\left(\alpha_{11}^1 q_1+\beta_{11}^1\right)}\begin{cases} e^{q_1(r-R_1)}\Phi_{11}^1\left(q_1 R_{1,} q_1\rho\right), & -\infty<r<\rho<R_1 \\ e^{q_1(r-R_1)}\Phi_{11}^1\left(q_1 R_{1,} q_1 r\right), & -\infty<\rho<r<R_1 \end{cases}. \quad (8)$$

Припустимо, що функція Коші

$$E_2(r,\rho)=\begin{cases} \overset{-}{E}_2 \equiv C_1 r^{-\alpha_1-q_2}+D_1 r^{-\alpha_1+q_2}, & R_1<r<\rho<R_2 \\ \overset{+}{E}_2 \equiv C_2 r^{-\alpha_1-q_2}+D_2 r^{-\alpha_1+q_2}, & R_1<\rho<r<R_2 \end{cases}.$$

Властивості (5) функції Коші дають алгебраїчну систему з двох рівнянь:

$$(C_2-C_1)\rho^{-\alpha_1-q_2}+(D_2-D_1)\rho^{-\alpha_1+q_2}=0,$$

$$(C_2-C_1)(\alpha_1+q_2)\rho^{-\alpha_1-q_2}+(D_2-D_1)(\alpha_1-q_2)\rho^{-\alpha_1+q_2}=\rho^{-2\alpha_1}.$$

Звідси знаходимо співвідношення:

$$C_2-C_1=(2q_2)^{-1}\rho^{-\alpha_1+q_2},\quad D_2-D_1=-(2q_2)^{-1}\rho^{-\alpha_1-q_2}. \quad (9)$$

Доповнимо рівності (9) алгебраїчними рівняннями:

$$\begin{matrix} \left(\alpha_{12}^1 \tfrac{d}{dr}+\beta_{12}^1\right)\overset{-}{E}_2\Big|_{r=R_1}=0: \\ \left(\alpha_{11}^2 \tfrac{d}{dr}+\beta_{11}^2\right)\overset{+}{E}_2\Big|_{r=R_1}=0: \end{matrix}\begin{cases} Z_{\alpha_1;12}^{11}(q_2,R_1)C_1+Z_{\alpha_1;12}^{12}(q_2,R_1)D_1=0 \\ Z_{\alpha_1;11}^{21}(q_2,R_2)C_2+Z_{\alpha_1;11}^{22}(q_2,R_2)D_2=0 \end{cases}. \quad (10)$$

Із алгебраїчної системи (9), (10) знаходимо, що

$$C_1=-\frac{Z_{\alpha_1;12}^{12}(q_2,R_1)}{2q_2\Delta_{\alpha_1;11}(q_2,R_1,R_2)}\Psi_{\alpha_1;11}^{2*}(q_2,\rho),$$

$$D_1=\frac{Z_{\alpha_1;12}^{11}(q_2,R_1)}{2q_2\Delta_{\alpha_1;11}(q_2,R_1,R_2)}\Psi_{\alpha_1;11}^{2*}(q_2,\rho).$$

Цим функція Коші $E_2(r,\rho)$ визначена й внаслідок симетрії відносно діагоналі $r=\rho$ має структуру:

$$E_2(r,\rho)=-\frac{1}{2q_2\Delta_{\alpha_1;11}(q_2,R_1,R_2)}\begin{cases} \Psi_{\alpha_1;12}^{1*}(q_2,r)\Psi_{\alpha_1;11}^{2*}(q_2,\rho), R_1<r<\rho<R_2 \\ \Psi_{\alpha_1;12}^{1*}(q_2,\rho)\Psi_{\alpha_1;11}^{2*}(q_2,r), R_1<\rho<r<R_2 \end{cases}. \quad (11)$$

У формулах (10), (11) беруть участь функції:

$$Z_{\alpha_1;kj}^{m1}(q_2,R_m)=[(\beta_{jk}^m-\alpha_1 R_m^{-1}\alpha_{jk}^m)-\alpha_{jk}^m R_m^{-1}q_2]R_m^{-\alpha_1-q_2},$$

$$Z_{\alpha_1;kj}^{m2}(q_2,R_m)=[(\beta_{jk}^m-\alpha_1 R_m^{-1}\alpha_{jk}^m)+\alpha_{jk}^m R_m^{-1}q_2]R_m^{-\alpha_1+q_2},$$

$$\Delta_{\alpha_1;jk}(q_2,R_1,R_2)=Z^{11}_{\alpha_1;j2}(q_2,R_1)Z^{22}_{\alpha_1;k1}(q_2,R_2)-Z^{12}_{\alpha_1;j2}(q_2,R_1)Z^{21}_{\alpha_1;k1}(q_2,R_2),$$

$$\Psi^{m*}_{\alpha_1;jk}(q_2,r)=Z^{m2}_{\alpha_1;jk}(q_2,R_m)r^{-\alpha_1-q_2}-Z^{m1}_{\alpha_1;jk}(q_2,R_m)r^{-\alpha_1+q_2}.$$

Нехай функція Коші

$$E_3(r,\rho)=\begin{cases}\overset{-}{E}_3\equiv C_1I_{q_3,\alpha_2}(\lambda r)+D_1K_{q_3,\alpha_2}(\lambda r), & R_2<r<\rho<R_3\\ \overset{+}{E}_3\equiv C_2I_{q_3,\alpha_2}(\lambda r)+D_2K_{q_3,\alpha_2}(\lambda r), & R_2<\rho<r<R_3\end{cases}.$$

Властивості (5) функції Коші дають алгебраїчну систему з двох рівнянь:

$$(C_2-C_1)I_{q_3,\alpha_2}(\lambda\rho)+(D_2-D_1)K_{q_3,\alpha_2}(\lambda\rho)=0,$$

$$(C_2-C_1)I'_{q_3,\alpha_2}(\lambda\rho)+(D_2-D_1)K'_{q_3,\alpha_2}(\lambda\rho)=-\lambda^{-1}\rho^{-(2\alpha_2+1)}.$$

Звідси одержуємо співвідношення:

$$C_2-C_1=-\lambda^{2\alpha_2}K_{q_3,\alpha_2}(\lambda\rho),\quad D_2-D_1=\lambda^{2\alpha_2}I_{q_3,\alpha_2}(\lambda\rho). \tag{12}$$

Доповнимо рівності (12) алгебраїчними рівняннями:

$$\begin{gathered}(\alpha^2_{12}\,{}^{d}\!/_{dr}+\beta^2_{12})\overset{-}{E}_3\Big|_{r=R_2}=0:\\ (\alpha^3_{22}\,{}^{d}\!/_{dr}+\beta^3_{22})\overset{+}{E}_3\Big|_{r=R_3}=0:\\ \begin{cases}U^{21}_{q_3,\alpha_2;12}(\lambda R_2)C_1+U^{22}_{q_3,\alpha_2;12}(\lambda R_2)D_1=0\\ U^{31}_{q_3,\alpha_2;22}(\lambda R_3)C_2+U^{32}_{q_3,\alpha_2;22}(\lambda R_3)D_2=0\end{cases}.\end{gathered} \tag{13}$$

Алгебраїчна система (13) внаслідок співвідношень (12) набуває вигляду:

$$\begin{gathered}U^{21}_{q_3,\alpha_2;12}(\lambda R_2)C_1+U^{22}_{q_3,\alpha_2;12}(\lambda R_2)D_1=0,\\ U^{31}_{q_3,\alpha_2;22}(\lambda R_3)C_1+U^{32}_{q_3,\alpha_2;22}(\lambda R_3)D_1=\lambda^{2\alpha_2}\Psi^{3*}_{q_3,\alpha_2;22}(\lambda R_3,\lambda\rho).\end{gathered} \tag{14}$$

Із алгебраїчної системи (14) згідно правил Крамера [4] знаходимо, що

$$C_1=-\frac{\lambda^{2\alpha_2}U^{22}_{q_3,\alpha_2;12}(\lambda R_2)}{\Delta_{q_3,\alpha_2;12}(\lambda R_2,\lambda R_3)}\Psi^{3*}_{q_3,\alpha_2;22}(\lambda R_3,\lambda\rho),$$

$$D_1=\frac{\lambda^{2\alpha_2}U^{22}_{q_3,\alpha_2;12}(\lambda R_2)}{\Delta_{q_3,\alpha_2;12}(\lambda R_2,\lambda R_3)}\Psi^{3*}_{q_3,\alpha_2;22}(\lambda R_3,\lambda\rho).$$

Цим функція Коші $E_3(r,\rho)$ визначена й внаслідок симетрії відносно діагоналі $r=\rho$ має структуру:

$$E_3(r,\rho)=\frac{\lambda^{2\alpha_2}}{\Delta_{q_3,\alpha_2;12}(\lambda R_2,\lambda R_3)}\times$$
$$\times\begin{cases}\Psi^{2*}_{q_3,\alpha_2;12}(\lambda R_2,\lambda r)\Psi^{3*}_{q_3,\alpha_2;22}(\lambda R_3,\lambda\rho), R_2<r<\rho<R_3\\ \Psi^{2*}_{q_3,\alpha_2;12}(\lambda R_2,\lambda\rho)\Psi^{3*}_{q_3,\alpha_2;22}(\lambda R_3,\lambda r), R_2<\rho<r<R_3\end{cases} \qquad (15)$$

У рівностях (13)-(15) беруть участь функції:

$$U^{m1}_{\upsilon,\alpha;jk}(\lambda R_m)=\left(\alpha^m_{jk}\frac{\upsilon-\alpha}{R_m}+\beta^m_{jk}\right)I_{\upsilon,\alpha}(\lambda R_m)+\alpha^m_{jk}\lambda^2R_mI_{\upsilon+1,\alpha+1}(\lambda R_m),$$

$$U^{m2}_{\upsilon,\alpha;jk}(\lambda R_m)=\left(\alpha^m_{jk}\frac{\upsilon-\alpha}{R_m}+\beta^m_{jk}\right)K_{\upsilon,\alpha}(\lambda R_m)-\alpha^m_{jk}\lambda^2R_mK_{\upsilon+1,\alpha+1}(\lambda R_m),$$

$$\Delta_{q_3,\alpha_2;j2}(\lambda R_2,\lambda R_3)=U^{21}_{q_3,\alpha_2;j2}(\lambda R_2)U^{32}_{q_3,\alpha_2;22}(\lambda R_3)-U^{22}_{q_3,\alpha_2;j2}(\lambda R_2)U^{31}_{q_3,\alpha_2;22}(\lambda R_3),$$

$$\Psi^{m*}_{\upsilon,\alpha;jk}(\lambda R_m,\lambda r)=U^{m1}_{\upsilon,\alpha;jk}(\lambda R_m)K_{\upsilon,\alpha}(\lambda r)-U^{m2}_{\upsilon,\alpha;jk}(\lambda R_m)I_{\upsilon,\alpha}(\lambda r), j=1,2.$$

Умови спряження (3) й крайова умова в точці $r=R_3$ для визначення величин A_j $(j=\overline{1,3})$ та B_k $(k=2,3)$ дають алгебраїчну систему з п'яти рівнянь:

$$(\alpha^1_{j1}q_1+\beta^1_{j1})A_1-Z^{11}_{\alpha_1;j2}(q_2,R_1)A_2-Z^{12}_{\alpha_1;j2}(q_2,R_1)B_2=\omega_{j1}+\delta_{j2}G_{12},\ j=1,2.$$

$$Z^{21}_{\alpha_1;j1}(q_2,R_2)A_2+Z^{22}_{\alpha_1;j1}(q_2,R_2)B_2-$$
$$-U^{21}_{q_3,\alpha_2;j2}(\lambda R_2)A_3-U^{22}_{q_3,\alpha_2;j2}(\lambda R_2)B_3=\omega_{j2}+\delta_{j2}G_{23}, \qquad (16)$$
$$U^{31}_{q_3,\alpha_2;22}(\lambda R_3)A_3+U^{32}_{q_3,\alpha_2;22}(\lambda R_3)B_3=g_R.$$

У системі (16) беруть участь функції

$$G_{12}=c_{11}\int_{-\infty}^{R_1}\frac{e^{q_1(\rho-R_1)}}{\alpha^1_{11}q_1+\beta^1_{11}}g_1(\rho)d\rho+\frac{c_{21}}{R_1^{2\alpha_1+1}}\int_{R_1}^{R_2}\frac{\Psi^{2*}_{\alpha_1;11}(q_2,\rho)}{\Delta_{\alpha_1;11}(q_2,R_1,R_2)}g_2(\rho)\rho^{2\alpha_1-1}d\rho,$$

$$G_{23}=-\frac{c_{12}}{R_2^{2\alpha_2+1}}\int_{R_1}^{R_2}\frac{\Psi^{1*}_{\alpha_1;12}(q_2,\rho)}{\Delta_{\alpha_1;11}(q_2,R_1,R_2)}g_2(\rho)\rho^{2\alpha_1-1}d\rho-$$
$$-\frac{c_{22}}{R_2^{2\alpha_2+1}}\int_{R_2}^{R_3}\frac{\Psi^{3*}_{q_3,\alpha_2;22}(\lambda R_3,\lambda\rho)}{\Delta_{q_3,\alpha_2;12}(\lambda R_2,\lambda R_3)}\times g_3(\rho)\rho^{2\alpha_2-1}d\rho,$$

та символ Кронекера δ_{j2} [4] $(\delta_{12}=0,\delta_{22}=1)$.

Введемо до розгляду функції:

$$A_{\alpha_1;j}(q)=(\alpha^1_{11}q_1+\beta^1_{11})\Delta_{\alpha_1;2j}(q_2,R_1,R_2)-(\alpha^1_{21}q_1+\beta^1_{21})\Delta_{\alpha_1;1j}(q_2,R_1,R_2), j=1,2;$$

$$B_{(\alpha);j}(q)=\Delta_{q_3,\alpha_2;22}(\lambda R_2,\lambda R_3)\Delta_{\alpha_1;j1}(q_2,R_1,R_2)-$$
$$-\Delta_{q_3,\alpha_2;12}(\lambda R_2,\lambda R_3)\Delta_{\alpha_1;j2}(q_2,R_1,R_2);$$
$$\Theta_{\alpha_1;1}(r,q)=(\alpha_{11}^1 q_1+\beta_{11}^1)\Psi_{\alpha_1;22}^{1*}(q_2,r)-$$
$$-(\alpha_{21}^1 q_1+\beta_{21}^1)\Psi_{\alpha_1;12}^{1*}(q_2,r),\quad (\alpha)=(\alpha_1,\alpha_2),$$
$$\Theta_{(\alpha);2}(r,q)=\Delta_{q_3,\alpha_2;12}(\lambda R_2,\lambda R_3)\Psi_{\alpha_1;21}^{2*}(q_2,r)-\Delta_{q_3,\alpha_2;22}(\lambda R_2,\lambda R_3)\Psi_{\alpha_1;11}^{2*}(q_2,r).$$

Припустимо, що виконана умова однозначної розв'язності крайової задачі (1)-(3): для будь-якого ненульового вектора $\vec{q}=\{q_1;q_2;q_3\}$ визначник алгебраїчної системи (16) відмінний від нуля

$$\Delta_{(\alpha)}(q)\equiv(\alpha_{11}^1 q_1+\beta_{11}^1)B_{(\alpha);2}(q)-(\alpha_{21}^1 q_1+\beta_{21}^1)B_{(\alpha);1}(q)=$$
$$=\Delta_{q_3,\alpha_2;22}(\lambda R_2,\lambda R_3)A_{\alpha_1;1}(q)-\Delta_{q_3,\alpha_2;12}(\lambda R_2,\lambda R_3)A_{\alpha_1;2}(q)\neq 0. \tag{17}$$

Визначимо головні розв'язки крайової задачі (1)-(3):

1) породжені неоднорідністю умов спряження функції Гріна

$$R_{(\alpha);11}^1(r,q)=\frac{B_{(\alpha);2}}{\Delta_{(\alpha)}(q)}e^{q_1(r-R_1)},\quad R_{(\alpha);21}^1(r,q)=-\frac{B_{(\alpha);1}}{\Delta_{(\alpha)}(q)}e^{q_1(r-R_1)};$$

$$R_{(\alpha);12}^1(r,q)=-\frac{2q_2c_{21}}{R_1^{2\alpha_1+1}}\frac{\Delta_{q_3,\alpha_2;22}}{\Delta_{(\alpha)}(q)}e^{q_1(r-R_1)},$$

$$R_{(\alpha);22}^1(r,q)=\frac{2q_2c_{21}}{R_1^{2\alpha_1+1}}\frac{\Delta_{q_3,\alpha_2;12}}{\Delta_{(\alpha)}(q)}e^{q_1(r-R_1)},$$

$$R_{(\alpha);11}^2(r,q)=-\frac{\alpha_{21}^1 q_2+\beta_{21}^1}{\Delta_{(\alpha)}(q)}\Theta_{(\alpha);2}(r,q),$$

$$R_{(\alpha);21}^2(r,q)=\frac{\alpha_{11}^1 q_2+\beta_{11}^1}{\Delta_{(\alpha)}(q)}\Theta_{(\alpha);2}(r,q),$$

$$R_{(\alpha);12}^2(r,q)=-\frac{\Delta_{q_3,\alpha_2;22}}{\Delta_{(\alpha)}(q)}\Theta_{\alpha_1;1}(r,q),$$

$$R_{(\alpha);22}^2(r,q)=\frac{\Delta_{q_3,\alpha_2;12}}{\Delta_{(\alpha)}(q)}\Theta_{\alpha_1;1}(r,q),$$

$$R_{(\alpha);11}^3(r,q)=\frac{2q_2c_{12}}{R_1^{2\alpha_1+1}}\frac{\alpha_{21}^1 q_1+\beta_{21}^1}{\Delta_{(\alpha)}(q)}\Psi_{q_3,\alpha_2;22}^{3*}(\lambda R_3,\lambda r)\,, \tag{18}$$

$$R_{(\alpha);21}^3(r,q)=-\frac{2q_2c_{12}}{R_1^{2\alpha_1+1}}\frac{\alpha_{11}^1 q_1+\beta_{11}^1}{\Delta_{(\alpha)}(q)}\Psi_{q_3,\alpha_2;22}^{3*}(\lambda R_3,\lambda r)\,,$$

$$R^3_{(\alpha);12}(r,q) = -\frac{A_{\alpha_1;2}}{\Delta_{(\alpha)}(q)}\Psi^{3*}_{q_3,\alpha_2;22}(\lambda R_3,\lambda r),$$
;
$$R^3_{(\alpha);22}(r,q) = \frac{A_{\alpha_1;1}}{\Delta_{(\alpha)}(q)}\Psi^{3*}_{q_3,\alpha_2;22}(\lambda R_3,\lambda r);$$

2) породжені неоднорідністю системи (1) функції впливу

$$H_{(\alpha);11}(r,\rho,q) = \frac{1}{q_1\Delta_{(\alpha)}(q)}\begin{cases} e^{q_1(r-R_1)}[B_{(\alpha);2}(q)\Phi^1_{11}(q_1R_1,q_1\rho) - B_{(\alpha);1}(q)\Phi^1_{21}(q_1R_1,q_1\rho)], & -\infty < r < \rho < R_1 \\ e^{q_1(\rho-R_1)}[B_{(\alpha);2}(q)\Phi^1_{11}(q_1R_1,q_1 r) - B_{(\alpha);1}(q)\Phi^1_{21}(q_1R_1,q_1 r)], & -\infty < \rho < r < R_1 \end{cases},$$

$$H_{(\alpha);12}(r,\rho,q) = \frac{c_{21}}{R_1^{2\alpha_1+1}}\frac{1}{\Delta_{(\alpha)}(q)}e^{q_1(r-R_1)}\Theta_{(\alpha);2}(\rho,q),$$

$$H_{(\alpha);13}(r,\rho,q) = -\frac{2q_2c_{21}}{R_1^{2\alpha_1+1}}\frac{c_{22}}{R_2^{2\alpha_2+1}}\frac{1}{\Delta_{(\alpha)}(q)}e^{q_1(r-R_1)}\Psi^{3*}_{q_3,\alpha_2;22}(\lambda R_3,\lambda\rho),$$

$$H_{(\alpha);21}(r,\rho,q) = \frac{c_{11}}{\Delta_{(\alpha)}(q)}\cdot e^{q_1(\rho-R_1)}\Theta_{(\alpha);2}(r,q), \tag{19}$$

$$H_{(\alpha);22}(r,\rho,q) = \frac{1}{2q_2\Delta_{(\alpha)}(q)}\begin{cases}\Theta_{\alpha_1;1}(r,q)\Theta_{(\alpha);2}(\rho,q), R_1 < r < \rho < R_2 \\ \Theta_{\alpha_1;1}(\rho,q)\Theta_{(\alpha);2}(r,q), R_1 < \rho < r < R_2\end{cases},$$

$$H_{(\alpha);23}(r,\rho,q) = -\frac{c_{22}}{R_2^{2\alpha_2+1}}\frac{1}{\Delta_{(\alpha)}(q)}\Theta_{\alpha_1;1}(r,q)\Psi^{3*}_{q_3,\alpha_2;22}(\lambda R_3,\lambda\rho),$$

$$H_{(\alpha);31}(r,\rho,q) = -\frac{c_{11}2q_2c_{12}}{R_2^{2\alpha_1+1}\Delta_{(\alpha)}(q)}\cdot e^{q_1(\rho-R_1)}\Psi^{3*}_{q_3,\alpha_2;22}(\lambda R_3,\lambda r),$$

$$H_{(\alpha);32}(r,\rho,q) = -\frac{c_{12}}{R_2^{2\alpha_1+1}}\frac{1}{\Delta_{(\alpha)}(q)}\Theta_{\alpha_1;1}(\rho,q)\Psi^{3*}_{q_3,\alpha_2;22}(\lambda R_3,\lambda\rho),$$

$$H_{(\alpha);33}(r,\rho,q) = \frac{\lambda^{2\alpha_2}}{\Delta_{(\alpha)}(q)}\begin{cases}\Psi^{3*}_{q_3,\alpha_2;22}(\lambda R_3,\lambda\rho)[A_{\alpha_1;1}(q)\Psi^{2*}_{q_3,\alpha_2;22}(\lambda R_2,\lambda r) - A_{\alpha_1;2}(q)\Psi^{2*}_{q_3,\alpha_2;12}(\lambda R_2,\lambda r)], & R_2 < r < \rho < R_3 \\ \Psi^{3*}_{q_3,\alpha_2;22}(\lambda R_3,\lambda r)[A_{\alpha_1;1}(q)\Psi^{2*}_{q_3,\alpha_2;22}(\lambda R_2,\lambda\rho) - A_{\alpha_1;2}\Psi^{2*}_{q_3,\alpha_2;12}(\lambda R_2,\lambda\rho)], & R_2 < \rho < r < R_3\end{cases};$$

3) породжені крайовою умовою в точці $r = R_3$ функції Гріна

$$W_{(\alpha);31}(r,q) = -\frac{2q_2c_{21}}{R_1^{2\alpha_1+1}}\frac{c_{22}}{\lambda^{2\alpha_2}R_2^{2\alpha_2+1}}\cdot\frac{1}{\Delta_{(\alpha)}(q)}e^{q_1(r-R_1)},$$

$$W_{(\alpha);32}(r,q) = -\frac{c_{22}}{\lambda^{2\alpha_2}R_2^{2\alpha_2+1}}\cdot\frac{1}{\Delta_{(\alpha)}(q)}\Theta_{\alpha_1;1}(r,q), \tag{20}$$

$$W_{(\alpha);33}(r,q) = \frac{1}{\Delta_{(\alpha)}(q)}\left[A_{\alpha_1;1}\Psi^{2*}_{q_3,\alpha_2;22}(\lambda R_2,\lambda r) - A_{\alpha_1;2}\Psi^{2*}_{q_3,\alpha_2;12}(\lambda R_2,\lambda r)\right].$$

У результаті однозначної розв'язності алгебраїчної системи (16), підстановки отриманих значень A_j та B_k у формули (4) та низки елементарних перетворень маємо єдиний розв'язок крайової задачі (1)-(3):

$$\begin{aligned} u_j(r) = &\sum_{m,k=1}^{2} R^j_{(\alpha);mk}(r,q)\omega_{mk} + W_{(\alpha);3j}(r,q)g_R + \\ &+\int_{-\infty}^{R_1} H_{(\alpha);j1}(r,\rho,q)g_1(\rho)d\rho + \\ &+\int_{R_1}^{R_2} H_{(\alpha);j2}(r,\rho,q)g_2(\rho)\rho^{2\alpha_1-1}d\rho + \\ &+\int_{R_2}^{R_3} H_{(\alpha);j3}(r,\rho,q)g_3(\rho)\rho^{2\alpha_2-1}d\rho, \quad j=\overline{1,3}. \end{aligned} \tag{21}$$

Побудуємо тепер розв'язок крайової задачі (1)-(3) методом інтегрального перетворення, породженого на множині I_2 гібридним диференціальним оператором (ГДО)

$$\begin{aligned} M_{(\alpha)} = &\theta(R_1-r)\, d^2\big/dr^2 + \theta(r-R_1)\theta(R_2-r)B^*_{\alpha_1} + \\ &+\theta(r-R_2)\theta(R_3-r)B_{\alpha_2}, \end{aligned} \tag{22}$$

де $\theta(x)$ — одинична функція Гевісайда [3].

Оскільки ГДО $M_{(\alpha)}$ самоспряжений і на множині I_2 має одну особливу точку $r=-\infty$, то його спектр дійсний та неперервний [5]. Можна вважати, що спектральний параметр $\beta\in(0,\infty)$. Йому відповідає дійсна спектральна вектор-функція

$$\begin{aligned} V_{(\alpha)}(r,\beta) = &\theta(R_1-r)V_{(\alpha);1}(r,\beta) + \theta(r-R_1)\theta(R_2-r)V_{(\alpha);2}(r,\beta) + \\ &+\theta(r-R_2)\theta(R_3-r)V_{(\alpha);3}(r,\beta). \end{aligned} \tag{23}$$

При цьому функції $V_{(\alpha);j}(r,\beta)$ повинні задовольняти відповідно диференціальні рівняння

$$\left(d^2\big/dr^2 + b_1^2\right)V_{(\alpha);1}(r,\beta)=0,\quad r\in(-\infty,R_1)\,,$$
$$\left(B^*_{\alpha_1}+b_2^2\right)V_{(\alpha);2}(r,\beta)=0,\quad r\in(R_1,R_2)\,,\tag{24}$$
$$\left(B_{\alpha_2}+b_3^2\right)V_{(\alpha);3}(r,\beta)=0,\quad r\in(R_2,R_3)\,,$$

однорідні умови спряження

$$\left[\left(\alpha^k_{j1}\frac{d}{dr}+\beta^k_{j1}\right)V_{(\alpha);k}(r,\beta)-\left(\alpha^k_{j2}\frac{d}{dr}+\beta^k_{j2}\right)V_{(\alpha);k+1}(r,\beta)\right]\Bigg|_{r=R_k}=0,\quad j,k=1,2\tag{25}$$

та однорідні крайові умови

$$\lim_{r\to-\infty}\left|\frac{d^mV_{(\alpha);1}}{dr^m}\right|<\infty,\quad m=0,1;\quad \left(\alpha^3_{22}\frac{d}{dr}+\beta^3_{22}\right)V_{(\alpha);3}(r,\beta)\Big|_{r=R_3}=0.\tag{26}$$

Фундаментальну систему розв'язків для диференціального рівняння Фур'є $\left(d^2\big/dr^2+b_1^2\right)v=0$ складають тригонометричні функції $v_1=\cos b_1r$ та $v_2=\sin b_1r$ [1]; фундаментальну систему розв'язків для диференціального рівняння Ейлера $(B^*_{\alpha_1}+b_2^2)v=0$ складають функції $v_1=r^{-\alpha_1}\cos(b_2\ln r)$ та $v_2=r^{-\alpha_1}\sin(b_2\ln r)$ [1]; фундаментальну систему розв'язків для диференціального рівняння Конторовича-Лєбєдєва $(B_{\alpha_2}+b_3^2)v=0$ складають дійсні функції $v_1=C_{\alpha_2}(\lambda r,b_3)$ та $v_2=D_{\alpha_2}(\lambda r,b_3)$ [2]; $b_j=(\beta^2+k_j^2)^{1/2}$, $k_j^2\ge 0$, $j=\overline{1,3}$.

Наявність фундаментальної системи розв'язків дозволяє внаслідок лінійності спектральної задачі (24)—(26) будувати функції $V_{(\alpha);j}(r,\beta)$ у вигляді лінійної комбінації фундаментальної системи розв'язків [4]:

$$V_{(\alpha);1}(r,\beta)=A_1\cos b_1r+B_1\sin b_1r,\quad r\in(-\infty,R_1)\,,$$
$$V_{(\alpha);2}(r,\beta)=A_2r^{-\alpha_1}\cos(b_2\ln r)+B_2r^{-\alpha_1}\sin(b_2\ln r),\quad r\in(R_1,R_2),\tag{27}$$
$$V_{(\alpha);3}(r,\beta)=A_3C_{\alpha_2}(\lambda r,b_3)+B_3D_{\alpha_2}(\lambda r,b_3),\quad r\in(R_2,R_3)\,.$$

Умови спряження (25) та крайова умова в точці $r=R_3$ дають для визначення величин A_j, B_j $(j=\overline{1,3})$ алгебраїчну систему з п'яти рівнянь:

$$v^{11}_{j1}(b_1R_1)A_1+v^{12}_{j1}(b_1R_1)B_1-Y^{11}_{\alpha_1;j2}(b_2,R_1)A_2-Y^{12}_{\alpha_1;j2}(b_2,R_1)B_2=0,\quad j=1,2,$$

$$Y^{21}_{\alpha_1;j1}(b_2,R_2)A_2+Y^{22}_{\alpha_1;j1}(b_2,R_2)B_2-$$
$$-X^{21}_{\alpha_2;j2}(\lambda R_2,b_3)A_3-X^{22}_{\alpha_2;j2}(\lambda R_2,b_3)B_3=0, \qquad (28)$$
$$X^{31}_{\alpha_2;22}(\lambda R_3,b_3)A_3+X^{32}_{\alpha_2;22}(\lambda R_3,b_3)B_3=0\,.$$

У системі (28) беруть участь функції:

$$v^{11}_{j1}(b_1R_1)=\left(\alpha^1_{j1}\frac{d}{dr}+\beta^1_{j1}\right)\cos b_1 r\Big|_{r=R_1}=-\alpha^1_{j1}b_1\sin b_1R_1+\beta^1_{j1}\cos b_1R_1\,,$$

$$v^{12}_{j1}(b_1R_1)=\left(\alpha^1_{j1}\frac{d}{dr}+\beta^1_{j1}\right)\sin b_1 r\Big|_{r=R_1}=\alpha^1_{j1}b_1\cos b_1R_1+\beta^1_{j1}\sin b_1R_1\,,$$

$$Y^{m1}_{\alpha_1;jk}(b_2,R_m)=[\left(\beta^m_{jk}-\alpha^m_{jk}R_m^{-1}\alpha_1\right)\cos\left(b_2\ln R_m\right)-$$
$$-b_2R_m^{-1}\alpha^m_{jk}\sin\left(b_2\ln R_m\right)]R_m^{-\alpha_1}\,,$$

$$Y^{m2}_{\alpha_1;jk}(b_2,R_m)=[\left(\beta^m_{jk}-\alpha^m_{jk}R_m^{-1}\alpha_1\right)\sin\left(b_2\ln R_m\right)+$$
$$+b_2R_m^{-1}\alpha^m_{jk}\cos\left(b_2\ln R_m\right)]R_m^{-\alpha_1}\,,$$

$$X^{s1}_{\alpha_2;j2}(\lambda R_s,b_3)=\left(\alpha^s_{j2}\frac{d}{dr}+\beta^s_{j2}\right)C_{\alpha_2}(\lambda r,b_3)\Big|_{r=R_s};\quad s=2,3,\quad j=1,2\,;$$

$$X^{s2}_{\alpha_2;j2}(\lambda R_s,b_3)=\left(\alpha^s_{j2}\frac{d}{dr}+\beta^s_{j2}\right)D_{\alpha_2}(\lambda r,b_3)\Big|_{r=R_s}\,.$$

Алгебраїчна система (28) сумісна. Покладемо $A_3=-A_0X^{32}_{\alpha_2;22}(\lambda R_3,b_3)$, $B_3=A_0X^{31}_{\alpha_2;22}(\lambda R_3,b_3)$, де A_0 підлягає визначенню. Останнє рівняння алгебраїчної системи (28) стає тотожністю.

Розглянемо алгебраїчну систему стосовно A_2, B_2:

$$Y^{21}_{\alpha_1;j1}(b_2,R_2)A_2+Y^{22}_{\alpha_1;j1}(b_2,R_2)B_2=$$
$$=A_0[X^{22}_{\alpha_2;j2}(\lambda R_2,b_3)X^{31}_{\alpha_2;22}(\lambda R_3,b_3)- \qquad (29)$$
$$-X^{21}_{\alpha_2;j2}(\lambda R_2,b_3)X^{32}_{\alpha_2;22}(\lambda R_3,b_3)]\equiv -A_0\delta_{\alpha_2;j2}(\beta).$$

Визначник системи (29)

$$q_{\alpha_1}(\beta)\equiv Y^{21}_{\alpha_1;11}Y^{22}_{\alpha_1;21}-Y^{21}_{\alpha_1;21}Y^{22}_{\alpha_1;11}=c_{12}b_2R_2^{-(2\alpha_1+1)}\neq 0.$$

Алгебраїчна система (29) має єдиний розв'язок [4]:

$$A_2=A_0[q_{\alpha_1}(\beta)]^{-1}[\delta_{\alpha_2;22}(\beta)Y^{22}_{\alpha_1;11}(b_2,R_2)-\delta_{\alpha_2;12}(\beta)Y^{22}_{\alpha_1;21}(b_2,R_2)],$$
$$B_2=-A_0[q_{\alpha_1}(\beta)]^{-1}[\delta_{\alpha_2;22}(\beta)Y^{21}_{\alpha_1;11}(b_2,R_2)-\delta_{\alpha_2;12}(\beta)Y^{21}_{\alpha_1;21}(b_2,R_2)]. \qquad (30)$$

При відомих A_2, B_2 розглянемо алгебраїчну систему стосовно A_1, B_1:

$$v_{j1}^{11}(b_1R_1)A_1 + v_{j1}^{12}(b_1R_1)B_1 =$$
$$= A_0[q_{\alpha_1}(\beta)]^{-1}[\delta_{\alpha_2;22}(\beta)\delta_{\alpha_1;j1}(b_2,R_1,R_2) - \tag{31}$$
$$-\delta_{\alpha_2;12}(\beta)\delta_{\alpha_1;j1}(b_2,R_1,R_2)] \equiv A_0[q_{\alpha_1}(\beta)]^{-1}a_{(\alpha);j}(\beta).$$

Визначник алгебраїчної системи (31)

$$q(\beta) \equiv v_{11}^{11}(b_1R_1)v_{21}^{12}(b_1R_1) - v_{21}^{11}(b_1R_1)v_{11}^{12}(b_1R_1) = c_{11}b_1 \neq 0 .$$

Алгебраїчна система (31) має єдиний розв'язок [4]:

$$\begin{aligned} &A_1 = \omega_{(\alpha);2}(\beta); \quad B_1 = -\omega_{(\alpha);1}(\beta), \quad A_0 = c_{11}b_1 \cdot q_{\alpha_1}(\beta), \\ &\omega_{(\alpha);j}(\beta) = a_{(\alpha);1}(\beta)v_{21}^{1j}(b_1R_1) - a_{(\alpha);2}(\beta)v_{11}^{1j}(b_1R_1), \quad j = 1,2. \end{aligned}, \tag{32}$$

Підставивши визначені згідно формули (30) та (32) величини A_j, B_j у рівності (27), маємо функції $V_{(\alpha);j}(r,\beta)$:

$$V_{(\alpha);1}(r,\beta) = \omega_{(\alpha);2}(\beta)\cos b_1r - \omega_{(\alpha);1}(\beta)\sin b_1r ,$$
$$V_{(\alpha);2}(r,\beta) = c_{11}b_1[\delta_{\alpha_2;22}(\beta)\psi_{\alpha_1;11}^2(b_2,r) - \delta_{\alpha_2;12}(\beta)\psi_{\alpha_1;21}^2(b_2,r)], \tag{33}$$
$$\psi_{\alpha_1;j1}^2(b_2,r) = Y_{\alpha_1;j1}^{22}(b_2,R_2)r^{-\alpha_1}\cos(b_2\ln r) - Y_{\alpha_1;j1}^{21}(b_2,R_2)r^{-\alpha_1}\sin(b_2\ln r),$$
$$V_{(\alpha);3}(r,\beta) = c_{11}b_1q_{\alpha_1}(\beta)[X_{\alpha_2;22}^{31}(\lambda R_3,b_3)D_{\alpha_2}(\lambda r,b_3) -$$
$$-X_{\alpha_2;22}^{32}(\lambda R_3,b_3)C_{\alpha_2}(\lambda r,b_3)].$$

Отже, спектральна функція $V_{(\alpha)}(r,\beta)$ відома.

Введемо до розгляду величини

$$\sigma_1 = 1, \ \sigma_2 = \frac{c_{21}}{c_{11}}\frac{1}{R_1^{2\alpha_1+1}}, \ \sigma_3 = \frac{c_{21}c_{22}}{c_{11}c_{12}}\frac{R_2^{2\alpha_1+1}}{R_1^{2\alpha_1+1}}\frac{1}{R_2^{2\alpha_2+1}},$$

вагову функцію

$$\begin{aligned} \sigma(r) = {} & \theta(R_1 - r)\sigma_1 + \theta(r - R_1)\theta(R_2 - r)\sigma_2r^{2\alpha_1-1} + \\ & +\theta(r - R_2)\theta(R_3 - r)\sigma_3r^{2\alpha_2-1} \end{aligned} \tag{34}$$

та спектральну щільність

$$\Omega_{(\alpha)}(\beta) = \beta[b_1(\beta)]^{-1}\left([\omega_{(\alpha);1}(\beta)]^2 + [\omega_{(\alpha);2}(\beta)]^2\right)^{-1}. \tag{35}$$

Наявність спектральної функції $V_{(\alpha)}(r,\beta)$, вагової функції $\sigma(r)$ й спектральної щільності $\Omega_{(\alpha)}(\beta)$ дають можливість визначити пряме $H_{(\alpha)}$ та обернене $H_{(\alpha)}^{-1}$ гібридне інтегральне перетворення (ГІП), породжене на множині I_2 ГДО $M_{(\alpha)}$ [6]:

$$H_{(\alpha)}[g(r)] = \int_{-\infty}^{R_3} g(r)V_{(\alpha)}(r,\beta)\sigma(r)dr \equiv \tilde{g}(\beta), \tag{36}$$

$$H_{(\alpha)}^{-1}[\tilde{g}(\beta)] = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} \tilde{g}(\beta)V_{(\alpha)}(r,\beta)\Omega_{(\alpha)}(\beta)d\beta \equiv g(r), \tag{37}$$

$$\begin{gathered} H_{(\alpha)}[M_{(\alpha)}[g(r)]] = -\beta^2\tilde{g}(\beta) - \\ -\sum_{i=1}^{3} k_i^2\tilde{g}_i(\beta) + (\alpha_{22}^3)^{-1}V_{(\alpha);3}(R_3,\beta)\sigma_3 R_3^{2\alpha_2+1}g_R + \\ +\sum_{k=1}^{2} d_k[Z_{(\alpha);12}^k(\beta)\omega_{2k} - Z_{(\alpha);22}^k(\beta)\omega_{1k}]. \end{gathered} \tag{38}$$

У рівності (38) прийняті позначення:

$$\tilde{g}_1(\beta) = \int_{-\infty}^{R_1} g_1(r)V_{(\alpha);1}(r,\beta)\sigma_1 dr, \quad \tilde{g}_2(\beta) = \int_{R_1}^{R_2} g_2(r)V_{(\alpha);2}(r,\beta)\sigma_2 r^{2\alpha_1-1}dr,$$

$$\tilde{g}_3(\beta) = \int_{R_2}^{R_3} g_3(r)V_{(\alpha);3}(r,\beta)\sigma_3 r^{2\alpha_2-1}dr, \; d_1 = \sigma_1 : c_{11}, \;\; d_2 = \sigma_2 R_2^{2\alpha_1+1} : c_{12};$$

$$Z_{(\alpha);i2}^k(\beta) = \left(\alpha_{i2}^k \, {d}/{dr} + \beta_{i2}^k\right)V_{(\alpha);k+1}(r,\beta)\Big|_{r=R_k}; \quad k = 1,2;$$

вектор-функція $g(r) = \{g_1(r); g_2(r); g_3(r)\}$ з області визначення ГДО $M_{(\alpha)}$.

Правила (36), (37), (38) складають математичний апарат для розв'язання крайової задачі (1)-(3) за відомою логічною схемою [7].

Запишемо систему (1) в матричній формі:

$$\begin{bmatrix} \left({d^2}/{dr^2} - q_1^2\right)u_1(r) \\ \left(B_{\alpha_1}^* - q_2^2\right)u_2(r) \\ \left(B_{\alpha_2} - q_3^2\right)u_3(r) \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} g_1(r) \\ g_2(r) \\ g_3(r) \end{bmatrix}. \tag{39}$$

Інтегральний оператор $H_{(\alpha)}$ згідно правила (36) зобразимо у формі операторної матриці-рядка:

$$H_{(\alpha)}[\cdots]=\left[\int\limits_{-\infty}^{R_1}\cdots V_{(\alpha);1}(r,\beta)\sigma_1 dr\int\limits_{R_1}^{R_2}\cdots V_{(\alpha);2}(r,\beta)\sigma_2 r^{2\alpha_1-1}dr\right.$$
$$\left.\int\limits_{R_2}^{R_3}\cdots V_{(\alpha);3}(r,\beta)\sigma_3 r^{2\alpha_2-1}dr\right]. \tag{40}$$

Застосуємо операторну матрицю-рядок (40) за правилом множення матриць до системи (39). Внаслідок рівності (38) отримуємо алгебраїчне рівняння:

$$\sum_{i=1}^{3}\left(\beta^2+q_i^2+k_i^2\right)\tilde{u}_i(\beta)=\tilde{g}(\beta)+(\alpha_{22}^3)^{-1}V_{(\alpha);3}(R_3,\beta)\sigma_3 R_3^{2\alpha_2+1}g_R+$$
$$+\sum_{k=1}^{2}d_k[Z_{(\alpha);12}^k(\beta)\omega_{2k}-Z_{(\alpha);22}^k(\beta)\omega_{1k}]. \tag{41}$$

Припустимо, що $\max\{q_1^2;q_2^2;q_3^2\}=q_3^2>0$. Покладемо $k_3^2=0$, $k_2^2=q_3^2-q_2^2\geq 0$, $k_1^2=q_3^2-q_1^2\geq 0$, $\tilde{u}_1+\tilde{u}_2+\tilde{u}_3=\tilde{u}(\beta)$. Із алгебраїчного рівняння (41) одержуємо, що функція

$$\tilde{u}(\beta)=\frac{\tilde{g}(\beta)}{\beta^2+q_3^2}+\frac{V_{(\alpha);3}(R_3,\beta)}{\alpha_{22}^3(\beta^2+q_3^2)}\sigma_3 R_3^{2\alpha_2+1}g_R+$$
$$+\sum_{k=1}^{2}d_k\left[\frac{Z_{(\alpha);12}^k(\beta)}{\beta^2+q_3^2}\omega_{2k}-\frac{Z_{(\alpha);22}^k(\beta)}{\beta^2+q_3^2}\omega_{1k}\right]. \tag{42}$$

Інтегральний оператор $H_{(\alpha)}^{-1}$ згідно правила (37) як обернений до (40) запишемо у вигляді операторної матриці-стовпця:

$$H_{(\alpha)}^{-1}[\cdots]=\begin{bmatrix}2\cdot\pi^{-1}\int\limits_0^{\infty}\cdots V_{(\alpha);1}(r,\beta)\Omega_{(\alpha)}(\beta)d\beta\\ 2\cdot\pi^{-1}\int\limits_0^{\infty}\cdots V_{(\alpha);2}(r,\beta)\Omega_{(\alpha)}(\beta)d\beta\\ 2\cdot\pi^{-1}\int\limits_0^{\infty}\cdots V_{(\alpha);3}(r,\beta)\Omega_{(\alpha)}(\beta)d\beta\end{bmatrix}. \tag{43}$$

Застосувавши операторну матрицю-стовпець (43) за правилом множення матриць до матриці-елементу $[\tilde{u}(\beta)]$, де функція $\tilde{u}(\beta)$ визначена формулою (42), маємо єдиний розв'язок крайової задачі (1)-(3):

$$u_j(r)=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty \tilde{u}(\beta)V_{(\alpha);j}(r,\beta)\Omega_{(\alpha)}(\beta)d\beta=$$

$$=\int\limits_{-\infty}^{R_1}\left(\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty V_{(\alpha);j}(r,\beta)V_{(\alpha);1}(\rho,\beta)\frac{\Omega_{(\alpha)}(\beta)}{\beta^2+q_3^2}d\beta\right)g_1(\rho)\sigma_1 d\rho+$$

$$+\int\limits_{R_1}^{R_2}\left(\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty V_{(\alpha);j}(r,\beta)V_{(\alpha);2}(\rho,\beta)\frac{\Omega_{(\alpha)}(\beta)}{\beta^2+q_3^2}d\beta\right)g_2(\rho)\sigma_2\rho^{2\alpha_1-1}d\rho+$$

$$+\int\limits_{R_2}^{R_3}\left(\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty V_{(\alpha);j}(r,\beta)V_{(\alpha);3}(\rho,\beta)\frac{\Omega_{(\alpha)}(\beta)}{\beta^2+q_3^2}d\beta\right)g_3(\rho)\sigma_3\rho^{2\alpha_2-1}d\rho+ \quad (44)$$

$$+\sum_{k=1}^{2}d_k\left[\left(\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty Z^k_{(\alpha);12}(\beta)V_{(\alpha);j}(r,\beta)\frac{\Omega_{(\alpha)}(\beta)}{\beta^2+q_3^2}d\beta\right)\omega_{2k}-\right.$$

$$\left.-\left(\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty Z^k_{(\alpha);12}(\beta)V_{(\alpha);j}(r,\beta)\times\times\frac{\Omega_{(\alpha)}(\beta)}{\beta^2+q_3^2}d\beta\right)\omega_{1k}\right]+$$

$$+\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty\frac{V_{(\alpha);3}(R_3,\beta)}{\alpha_{22}^3(\beta^2+q_3^2)}V_{(\alpha);j}(r,\beta)\Omega_{(\alpha)}(\beta)d\beta\sigma_3R_3^{2\alpha_2+1}g_R;\quad j=\overline{1,3}.$$

Порівнюючи розв'язки (21) та (44) внаслідок теореми єдиності, одержуємо такі формули обчислення невласних інтегралів:

$$\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty V_{(\alpha);j}(r,\beta)V_{(\alpha);k}(\rho,\beta)\frac{\Omega_{(\alpha)}(\beta)}{\beta^2+q_3^2}d\beta=\frac{1}{\sigma_k}H_{(\alpha);jk}(r,\rho,q);\ j,k=\overline{1,3}\quad (45)$$

$$\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty\frac{V_{(\alpha);3}(R_3,\beta)}{\alpha_{22}^3(\beta^2+q_3^2)}V_{(\alpha);j}(r,\beta)\Omega_{(\alpha)}(\beta)d\beta=\left(\sigma_3R_3^{2\alpha_2+1}\right)^{-1}W_{(\alpha);3j}(r,q);\ j=\overline{1,3}.\quad (46)$$

$$\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty Z^k_{(\alpha);12}(\beta)V_{(\alpha);j}(r,\beta)\frac{\Omega_{(\alpha)}(\beta)}{\beta^2+q_3^2}d\beta=d_k^{-1}R^j_{(\alpha);2k}(r,q);\ k=1,2,\ j=\overline{1,3}.\quad (47)$$

$$\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty Z^k_{(\alpha);22}(\beta)V_{(\alpha);j}(r,\beta)\frac{\Omega_{(\alpha)}(\beta)}{\beta^2+q_3^2}d\beta=-d_k^{-1}R^j_{(\alpha);1k}(r,q);\ k=1,2,\ j=\overline{1,3}.\quad (48)$$

Функції впливу $H_{(\alpha);jk}(r,\rho,q)$ визначені за формулами (19); функції Гріна $W_{(\alpha);3j}(r,q)$ визначені за формулами (20), а функції Гріна $R^j_{(\alpha);ik}(r,q)$ умов спряження визначені за формулами (18).

Зауваження 1. Якщо $\max\{q_1^2;q_2^2;q_3^2\}=q_1^2>0$, то $k_1^2=0$, $k_2^2=q_1^2-q_2^2\ge 0$, $k_3^2=q_1^2-q_3^2\ge 0$ і замість $(\beta^2+q_3^2)$ стоятиме

$(\beta^2+q_1^2)$; якщо ж $\max\{q_1^2;q_2^2;q_3^2\}=q_2^2>0$, то $k_1^2=q_2^2-q_1^2\geq 0$, $k_2^2=0$, $k_3^2=q_2^2-q_3^2\geq 0$ і вираз $(\beta^2+q_3^2)$ всюди заміниться виразом $(\beta^2+q_2^2)$.

Зауваження 2. Оскільки у формулах (45)-(48) праві частини не залежать від нерівностей $\left(q_j^2-q_m^2\right)\geq 0$, то можна при необхідності покласти $q_1^2=q_2^2=q_3^2\equiv q_0^2>0$.

Підсумком виконаних в роботі досліджень є таке твердження.

Теорема. Якщо вектор-функція

$$f(r)=\{g_1''(r);B_{\alpha_1}^*[g_2(r)];B_{\alpha_2}[g_3(r)]\},$$

неперервна на множині I_2, функції $g_j(r)$ задовольняють крайові умови (2) та умови спряження (3) і виконується умова (17) однозначної розв'язності крайової задачі (1)-(3), то справедливі формули (45)-(48) обчислення невласних поліпараметричних інтегралів за власними елементами ГДО $M_{(\alpha)}$, визначеного формулою (22).

Висновок. Одержані формули (45)-(48) поповнюють довідкову математичну літературу в розділі обчислення невласних інтегралів від суперпозиції спеціальних функцій математичної фізики.

Список використаних джерел:

1. Степанов В. В. Курс дифференциальных уравнений / В. В. Степанов. — М. : Физматгиз, 1959. — 468 с.
2. Ленюк М. П. Інтегральні перетворення типу Конторовича-Лєбєдєва / М. П. Ленюк, Г. І. Міхалевська. — Чернівці : Прут, 2002. — 280 с.
3. Шилов Г.Е. Математический анализ. Второй специальный курс / Г. Е. Шилов. — М. : Наука, 1965. — 328 с.
4. Курош А. Г. Курс высшей алгебры / А. Г. Курош. — М. : Наука, 1971. — 432 с.
5. Ленюк М. П. Гібридні інтегральні перетворення (Фур'є, Бесселя, Лежандра). Частина 1./ М. П. Ленюк, М. І. Шинкарик. — Тернопіль : Економ. думка, 2004. — 368 с.
6. Ленюк М. П. Гібридні інтегральні перетворення типу Ейлера — (Фур'є, Бесселя) / М. П. Ленюк. — Львів, 2009. — 76 с. – (Препринт / НАН України. Інститут прикладних проблем механіки і математики імені Я. С. Підстригача; 02.09). — Чернівці : Прут, 2009. — 76 с.
7. Ленюк М.П. Обчислення невласних інтегралів методом гібридних інтегральних перетворень (Фур'є, Бесселя, Лежандра) / М. П. Ленюк. — Чернівці : Прут, 2005. — 368 с.

By comparison of the boundary problem for a system of differential equations Fourier and Euler (Kontorovich-Lebedev) limited the right of the half with two Cartesian point of interface, built on the one hand, by Cauchy functions, and on the other hand, using appropriate hybrid integral transform calculated polyparametric family improper integrals own elements for proper hybrid differential operator.

Key words: *improper integrals, Cauchy function, the main solution, hybrid integral transformation, the basic identity conditions of the unique solvability, logical scheme.*

Отримано 21.08.10

УДК 519.6

О. М. Литвин[1]**,** д-р фіз.-мат. наук,
Ю. І. Першина[2]**,** канд. фіз.-мат. наук

[1]Українська інженерно-педагогічна академія, м. Харків
[2]Національний технічний університет «ХПІ», м. Харків

НАБЛИЖЕННЯ РОЗРИВНОЇ ФУНКЦІЇ ЗА ДОПОМОГОЮ РОЗРИВНИХ СПЛАЙНІВ

У роботі пропонується метод наближення розривної функції однієї змінної за допомогою розривного сплайну, використовуючи метод мінімакса.

Ключові слова: *розривна функція, розривний сплайн, мінімакс.*

Вступ. Задачі наближення розривних функцій виникають значно частіше, ніж задачі наближення неперервних функцій. Наведемо кілька прикладів. При дослідженні внутрішньої структури тіла корисно враховувати його неоднорідність, тобто різну щільність в різних частинах тіла (кістки, серце, шлунок, печінка тощо мають різну щільність) [1]. При дослідженні кори Землі за допомогою даних з кернів свердловинного буріння виникає задача відновлення внутрішньої структури між свердловинами. При цьому очевидним є той факт, що щільність ґрунту в різних точках кори є неоднорідною і найчастіше має розриви першого роду при переході від однієї складової кори до іншої (чорнозем, пісок, глина, граніт тощо). Тому актуальною є розробка методів наближення розривних функцій.

Постановка задачі. Нехай задана функція однієї змінної $f(x)$ на інтервалі $[a,b]$ з розривами першого роду в точках x_k, $k=\overline{1,n}$. Ці точки розбивають інтервал $[a,b]$ на n частин. Отже, точки розриву співпадають з точками розриву функції $f(x)$. Наближувати функцію $f(x)$ будемо лінійним сплайном, який на кожному з інтервалів $[x_k, x_{k+1}]$, $k=\overline{1,n-1}$ має такий вигляд: