6. Ленюк М. П. Исследование основных краевых задач для диссипативного волнового уравнения Бесселя / М. П. Ленюк. — К., 1983. — 62 с. (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 83. 3).
7. Курош А. Г. Курс высшей алгебры / А.Г. Курош. — М. : Наука, 1971. — 432 с.
8. Ленюк М. П. Гібридне інтегральне перетворення типу Ейлера–(Фур'є, Бесселя) / М. П. Ленюк. — Чернівці : Прут, 2009. — 76 с.
9. Тихонов А. Н. Уравнения математической физики / А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. — М. : Наука, 1972. — 735 с.
10. Лаврентьев М. А. Методы теории функций комплексного переменного / М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат. — М. : Наука, 1987. — 688 с.

The method of delta-like sequences (Cauchy kernel) introduces hybrid integral transformation of Legendre–Bessel–Fourier series in polar axis with two point of interface with the assumption that the spectral parameter is involved in conjugation.

Key words: *hybrid differential operators, hybrid integral transform kernel Cauchy function of, spectral function, spectral density, the main identity.*

Отримано 16.08.10

УДК 517.927

В. Б. Поселюжна, канд. фіз.-мат. наук

Чортківський інститут підприємництва і бізнесу Тернопільського національного економічного університету, м. Чортків

ДО ПИТАННЯ ЗБІЖНОСТІ МОДИФІКОВАНОГО КОЛОКАЦІЙНО-ІТЕРАТИВНОГО МЕТОДУ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ДЛЯ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З ПАРАМЕТРАМИ

Розглядається питання застосування колокаційно-ітеративного методу до розв'язування крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь з параметрами. Побудовано алгоритм методу, встановлено достатні умови його збіжності.

Ключові слова: *крайова задача, диференціальні рівняння, інтегральне рівняння, колокаційно-ітеративний метод.*

Вступ. Математичними моделями різноманітних задач природознавства та техніки, як відомо, є диференціальні, інтегральні чи інтегро-диференціальні рівняння та їх системи. В наш час привертають до себе увагу дослідження крайових задач з параметрами та з імпульсним впливом, узагальнені крайові задачі, інтегральні рівняння з обмеженнями. Різним аспектам теорії цих задач присвячені праці

А.М. Самойленка, М.О. Перестюка [1], А.Ю. Лучки [2], М.Й. Ронто [3], О.А. Бойчука [4] та інших.

У більшості практичних ситуацій отримання точного аналітичного розв'язку таких задач виявляється досить складним і потребує значних зусиль або знайдений розв'язок є не досить зручним для використання. Тому в останні десятиріччя широкого розповсюдження набули наближені методи розв'язування таких класів задач, що пов'язані із застосуванням обчислювальної техніки. У той же час пошук нових, більш ефективних, і удосконалення вже існуючих методів продовжує залишатися досить актуальною задачею.

У цій роботі запропоновано варіант модифікованого проекційно-ітеративного методу – колокаційно-ітеративний метод для розв'язування крайової задачі для диференціальних рівнянь з параметрами та встановлюються умови його збіжності.

Постановка проблеми. Розглянемо крайову задачу вигляду

$$\begin{aligned}(LX)(t) &:= x^{(m)}(t) + p_1(t)x^{(m-1)}(t) + \ldots + p_m(t)x(t) = \\ &= f(t) + c(t)\lambda + \varepsilon g(t, x(t), x'(t), \ldots, \lambda), t \in (a,b),\end{aligned} \tag{1}$$

$$U_s(x) = \gamma_s\,,\ \Phi_r(x) = \nu_r\,,\ s = \overline{0, m-1}\,,\ r = \overline{1,l}\,, \tag{2}$$

де $\Phi_r(x)$, $r = \overline{1,l}$ – лінійні неперервні функціонали на класі неперервних функцій, $f(t)$ – відома функція, $c(t)\lambda$ – скалярний добуток вектора $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_l)$ і відомої вектор-функції $c(t) = (c_1(t), .c_2(t), \ldots c_l(t))$, ε – малий додатний параметр.

Припустимо, що виконуються такі умови:

1) $p_i \in C([a,b])$, $i = \overline{1,m}$, $c_i \in C([a,b])$, $i = \overline{1,l}$,

2) $f \in C([a,b])$,

3) $g(t, u_1, u_2, \ldots, u_m, \lambda)$ – неперервна функція відносно своїх аргументів в області D, яка задана таким чином:

$$D = \left\{ (t, u_1, u_2, \ldots, u_m, \lambda) \ \middle|\, a < t < b\,, -\infty < u_i < \infty \ \ i = \overline{1,m}\,,\ \lambda \in R^l \right\}$$

і задовольняє умову Ліпшиця

$$\begin{aligned}&\left| g(t, u_1, u_2, \ldots, u_m, \lambda) - \right| g(t, \overline{u}_1, \overline{u}_2, \ldots, \overline{u}_m, \overline{\lambda}) \le \\ &\le \sum_{i=1}^{m} \beta_i(t) \left| u_i - \overline{u}_i \right| + \sum_{\tau=1}^{l} \gamma_\tau(t) \left| \lambda_\tau - \overline{\lambda}_\tau \right|,\end{aligned} \tag{3}$$

де $\beta_i(t)$, $i = \overline{1,m}$, $\gamma_\tau(t)$, $\tau = \overline{1,l}$ – відомі функції, причому $\beta_i \in C([a,b])$, $i = \overline{1,m}$, $\gamma_\tau(t) \in L_2([a,b])$, $\tau = \overline{1,l}$.

Виклад основного матеріалу. Задача (1)-(3) може бути представлена у вигляді

$$(Ax)(t)+b(t)\lambda = f(t)+d(t)\lambda+(Bx)(t)+\varepsilon g\left(t,x(t),x'(t),...,x^{(m-1)}(t),\lambda\right), \quad (4)$$

$$U_s(x)=\gamma_s\,,\ s=\overline{0,m-1}\,, \quad (5)$$

$$\Phi_r(x)=\nu_r\,,\ r=\overline{1,l}\,, \quad (6)$$

де $$(Ax)(t)=a_m(t)x^{(m)}(t)+a_{m-1}(t)x^{(m-1)}(t)+...+a_0(t)x(t)\,,$$

$$(Bx)(t)=g_{m-1}(t)x^{(m-1)}(t)+...+g_0(t)x(t)\,,$$

$$d(t)=b(t)+c(t)\,,\ a_m(t)=p_m(t)\,,\ g_i(t)=a_i(t)-p_i(t), i=\overline{0,m-1}\,,$$

а неперервна вектор-функція $d(t)=b(t)+c(t)$ підібрана так, що однорідна крайова задача

$$(A\vartheta)(t)+b(t)\mu=0\,,$$

$$U_s(\vartheta)=0\,,\ \ s=\overline{0,m-1}\,,$$

$$\Phi_r(\vartheta)=0\,,\ \ r=\overline{1,l}\,,$$

має тільки тривіальний розв’язок $\vartheta(t)=0$, $\mu=0$.

Задача (4)-(6) за допомогою заміни

$$(Ax)(t)+b(t)\lambda=u(t)\,, \quad (7)$$

$$U_s(x)=\gamma_s\,,\quad s=\overline{0,m-1}\,, \quad (8)$$

$$\Phi_r(x)=\nu_r\,,\quad r=\overline{1,l}\,, \quad (9)$$

де $u(t)$ – нова шукана функція, легко зводиться до рівносильного їй інтегрального рівняння.

$$u(t)=l(t)+\int_a^b K(t,s)u(s)ds+\ \varepsilon g\Bigg(t,h(t)+\int_a^b G(t,s)u(s)ds,$$

$$h'(t)+\int_a^b G_t'(t,s)u(s)ds,...,h^{(m-1)}(t)+\int_a^b G_t^{(m-1)}(t,s)u(s)ds\,, \quad (10)$$

$$\sigma+\int_a^b \Gamma(s)u(s)ds\Bigg),$$

Отже, крайова задача (1)-(2) рівносильна інтегральному рівнянню з малою нелінійністю (10). Можна стверджувати, що задача (1)-(2) має розв’язки тоді і тільки тоді, коли рівняння (10) має розв’язки.

Побудова алгоритму. Суть колокаційно-ітеративного методу стосовно задачі (1)-(2) полягає в наступному.

Нехай $\{\varphi_j(t)\}$, $j=\overline{0,n}$ – задана система лінійно-незалежних, неперервних на відрізку $[a,b]$ функцій, зокрема система алгебраїчних або тригонометричних поліномів, і нехай на відрізку $[a,b]$ задані вузли колокації $\{t_j\}$, $j=\overline{0,n}$.

Задавши $u_0 \in L_2([a,b])$, нульове наближення визначаємо з задачі

$$(Ax_0)(t)+b(t)\lambda_0 = u_0(t) . \tag{11}$$

$$U_s(x_0)=\gamma_s ,\ \Phi_r(x_0)=\nu_r ,\ s=\overline{0,m-1},\ r=\overline{1,l} . \tag{12}$$

Припустимо, що наближення $x_{k-1}(t)$, λ_{k-1} уже побудовані, тоді наближення $x_k(t)$, λ_k будемо визначати із задачі

$$\begin{gathered}(Ax_k)(t)+b(t)\lambda_k = f(t)+d(t)\mu_k+(Bz_k)(t)+\\ +\varepsilon g(t,x_{k-1}(t),x'_{k-1}(t),...,x_{k-1}{}^{(m-1)}(t),\lambda_{k-1}),\end{gathered} \tag{13}$$

$$U_s(x_k)=\gamma_s ,\ s=\overline{0,m-1},\ \Phi_r(x_k)=\nu_r ,\ r=\overline{1,l} , \tag{14}$$

в якій

$$z_k(t)=x_{k-1}(t)+\alpha_k(t) , \tag{15}$$

$$\mu_k = \lambda_{k-1}+\theta_k , \tag{16}$$

$$\alpha_k(t)=\sum_0^n a_j^k \eta_j(t) ,\ k\in N , \tag{17}$$

$$\theta_k = \sum_0^n a_j^k \nu_j ,\ k\in N , \tag{18}$$

Невідомі параметри a_j^k знаходимо з умови

$$\begin{gathered}(Lz_k)(t_i)-f(t_i)-c(t_i)\mu_k -\\ -\varepsilon g\left(t_i,x_{k-1}(t_i),x'_{k-1}(t_i),...,x_{k-1}^{(m-1)}(t_i),\lambda_{k-1}\right)=0, \quad i=\overline{0,n},\end{gathered} \tag{19}$$

де $\{t_i\}$, $i=\overline{0,n}$ – вузли колокації.

Задана система лінійно-незалежних функцій $\{\varphi_j(t)\}$, $j=\overline{0,n}$ і система функцій $\{\eta_j(t)\}$, $j=\overline{0,n}$ та система векторів $\{\nu_j\}$, $j=\overline{0,n}$ зв'язані співвідношенням

$$(A\eta_j)(t)+b(t)\nu_j = \phi_j(t) , \tag{20}$$

$$U_s(x_0)=\gamma_s ,\ \Phi_r(x_0)=\nu_r ,\ s=\overline{0,m-1},\ r=\overline{1,l} . \tag{21}$$

Для знаходження параметрів a_j^k в кожній ітерації отримаємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь виду

$$\sum_{j=0}^{n} \beta_{ij} a_j^k = b_i^k, \ i = \overline{0,n}, \tag{22}$$

в якій
$$\beta_{ij} = (L\eta_j)(t_i) - c(t_i)\nu_j, \ i, j = \overline{0,n}, \tag{23}$$

$$b_i^k = \varepsilon_k(t_i), \ i = \overline{0,n}, \tag{24}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_k(t) = f(t) + c(t)\lambda_{k-1} - (Lx_{k-1})(t) + \\ +\varepsilon g(t, x_{k-1}(t), x'_{k-1}(t), ..., x_{k-1}^{(m-1)}(t), \lambda_{k-1}). \end{aligned} \tag{25}$$

Якщо система рівнянь (22) має єдиний розв'язок, то функція $\alpha_k(t)$ і вектор θ_k визначаються однозначно.

Достатні умови збіжності методу. Алгоритм (11)-(19) за допомогою заміни

$$(Ax_k)(t) + b(t)\lambda_k = u_k(t), \tag{26}$$

$$U_s(x_k) = \gamma_s, \ s = \overline{0, m-1}, \ \Phi_r(x_k) = \nu_r, \ r = \overline{1,l}, \tag{27}$$

та співвідношень
$$(Az_k)(t) + b(t)\mu_k = u_{k-1}(t) + \omega_k(t), \tag{28}$$

$$U_s(z_k) = \gamma_s, \ s = \overline{0, m-1}, \ \Phi_r(z_k) = \nu_r, \ r = \overline{1,l}, \tag{29}$$

зводиться до колокаційно-ітеративного методу розв'язування інтегрального рівняння з малою нелінійністю (10).

$$\begin{gathered} u_k(t) = l(t) + \int_a^b K(t,s)(u_{k-1}(s) + \omega_k(s))ds + \varepsilon g\Bigg(t, h(t) + \int_a^b G(t,s)u_{k-1}(s)ds, \\ h'(t) + \int_a^b G'_t(t,s)u_{k-1}(s)ds, ..., h^{(m-1)}(t) + \int_a^b G_t^{(m-1)}(t,s)u_{k-1}(s)ds, \\ \sigma + \int_a^b \Gamma(s)u_{k-1}(s)ds\Bigg), \end{gathered} \tag{30}$$

$$u_k(t_i) - u_{k-1}(t_i) - \omega_k(t_i) = 0, \ i = \overline{0,n}. \tag{31}$$

$$\omega_k(t) = \sum_j^n a_j^k \varphi_j(t), \tag{32}$$

Отже, збіжність методу (11)-(19) розв'язування задачі (1)-(2) зводиться до збіжності колокаційно-ітеративного методу (30)-(32) розв'язування інтегрального рівняння з малою нелінійністю (10).

Надалі, не обмежуючи загальності, можна вважати, що система функцій $\{\varphi_j(t)\}$, $j = \overline{0,n}$ – фундаментальна, нехай

$$\delta_k(t) = u_k(t) - u_{k-1}(t), \tag{33}$$

$$\vartheta_k(t) = \delta_k(t) - \omega_k(t). \tag{34}$$

Поправку $\omega_k(t)$ можна представити у вигляді

$$\omega_k(t) = \int_a^b S_n(t,s)\delta_k(s)ds\ , \tag{35}$$

$$S_n(t,s) = \sum_{j=0}^{n} \varphi_j(t)\delta(s-t_j)\ . \tag{36}$$

Для визначення функції $\omega_k(t)$ на основі співвідношень (33), (35), (36) звичайним способом отримаємо інтегральне рівняння з виродженим ядром

$$\omega_k(t) = g_k(t) + \int_a^b H_n(t,s)\omega_k(s)ds\ , \tag{37}$$

де

$$g_k(t) = \int_a^b S_n(t,s)\overline{\varepsilon_k}(s)ds\ , \tag{38}$$

$$H_n(t,s) = \sum_{j=0}^{n} \varphi_j(t)K(t_j,s)\ , \tag{39}$$

$$\overline{\varepsilon_k}(t) = l(t) + \int_a^b K(t,s)u_{k-1}(s)ds - u_{k-1}(t) + \varepsilon g\left(t, h(t) + \int_a^b G(t,s)u_{k-1}(s)ds, \right.$$

$$h'(t) + \int_a^b G_t'(t,s)u_{k-1}(s)ds, ..., h^{(m-1)}(t) + \int_a^b G_t^{(m-1)}(t,s)u_{k-1}(s)ds\ , \tag{40}$$

$$\left. \sigma + \int_a^b \Gamma(s)u_{k-1}(s)ds \right),$$

Інтегральне рівняння (37) рівносильне системі рівнянь

$$\sum_{j=0}^{n} a_j^k \left(\varphi_j(t_i) - \int_a^b K(t_i,s)\varphi_j(s)ds \right) = \overline{\varepsilon_k}(t_i)\ ,\ \ j = \overline{0,n}\ , \tag{41}$$

Алгоритм (30)-(32) рівносильний співвідношенням

$$\delta_k(t) = \int_a^b M_n(t,s)\vartheta_{k-1}(s)ds + \varepsilon \int_a^b E_n(t,s)\Delta g_{k-1}(s)ds, \tag{42}$$

$$\vartheta_k(t) = \int_a^b L_n(t,s)\vartheta_{k-1}(s)ds + \varepsilon \int_a^b D_n(t,s)\Delta g_{k-1}(s)ds, \tag{43}$$

а ядра операторів переходу обчислюються за формулами

$$M_n(t,s) = K(t,s) + \int_a^b K(t,\tau)R_n(\tau,s)d\tau, \tag{44}$$

$$L_n(t,s) = M_n(t,s) - \int_a^b S_n(t,\tau) M_n(\tau,s) d\tau, \tag{45}$$

$$E_n(t,s) = \delta(t-s) + \int_a^b M_n(t,\tau) S_n(\tau,s) d\tau, \tag{46}$$

$$D_n(t,s) = E_n(t,s) - \int_a^b S_n(t,\tau) E_n(\tau,s) d\tau \ . \tag{47}$$

Тут $R_n(t,s)$ – резольвента ядра $H_n(t,s)$ що задовольняє рівняння

$$R_n(t,s) = H_n(t,s) + \int_a^b H_n(t,\tau) R_n(\tau,s) d\tau, \tag{48}$$

$$R_n(t,s) = H_n(t,s) + \int_a^b R_n(t,\tau) H_n(\tau,s) d\tau. \tag{49}$$

Розглянемо функцію

$$E(t,s) = \delta(t-s) + R(t,s) \tag{50}$$

де $R(x,t)$ – резольвента ядра $K(x,t)$ і введемо такі позначення

$$p_n = \|M_n\|,\ q_n = \|L_n\|,\ \gamma_n = \|E_n\|,\ \eta_n = \|D_n\|,\ \gamma^* = \|E\|, \tag{51}$$

в яких M_n, L_n, E_n, D_n, E – інтегральні оператори, ядра яких визначаються формулами (44)-(47) та (50), та скористаємося позначеннями

$$r_n = \varepsilon q \gamma_n,\ l_n = \varepsilon q \eta_n,\ A_n = \begin{pmatrix} r_n & p_n \\ l_n & q_n \end{pmatrix}.$$

Теорема 5.2. Нехай одиниця – регулярне значення лінійного інтегрального оператора, система функцій $\{\varphi_j(t)\}$, $j = \overline{0,n}$ та вузли колокації $\{t_i\}$, $i = \overline{0,n}$ підібрані так, що

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b \int_a^b \left| K(t,s) - H_n(t,s) \right|^2 dtds = 0, \quad \lim_{n\to\infty} \int_a^b \int_a^b \left| \delta(t-s) - S_n(x,t) \right|^2 dtds = 0,$$

і $\lambda\mu\gamma^* < 1$, тоді існує такий номер n_0, що $\forall n \ge n_0$ система (41) однозначно розв'язна і послідовність $\{u_k(t)\}$, побудована згідно методу (30)-(32), збігається до цього розв'язку.

Список використаних джерел:

1. Самойленко А. М. Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием / А. М. Самойленко, Н. А. Перестюк. – К. : Вища шк., 1987. – 287 с.
2. Лучка А. Ю. Проекційно-ітеративний метод для диференціальних рівнянь з обмеженнями / А. Ю. Лучка // Нелінійні коливання. – 2002. – Т. 5, № 4. – С. 465–488.

3. Ронто Н. И. Об одном методе исследования краевых задач с параметрами / Н. И. Ронто, В. А. Ронто // Краевые задачи математической физики. – К. : Наук. думка, 1990. – С. 3–10.
4. Бойчук А. А. Конструктивне методы анализа краевых задач / А. А. Бойчук. – К. : Наук. думка, 1990. – 96 с.

The question of collocation-iterative method appliance concerning the boundary problem solution for the simple differential equations with parameters is substantiated. The methods algorithm is built, and sufficient conditions for convergence are found here.

Key words: *boundary problem, differential equations, integral equations, collocation-iterative method.*

Отримано: 10.03.2010

УДК 517.5

Н. М. Сорич, канд. фіз.-мат. наук,
В. А. Сорич, канд. фіз.-мат. наук

Кам'янець-Подільський національний університет
імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський

СУМІСНЕ НАБЛИЖЕННЯ КЛАСІВ ФУНКЦІЙ ВИСОКОЇ ГЛАДКОСТІ ІНТЕРПОЛЯЦІЙНИМИ ТРИГОНОМЕТРИЧНИМИ ПОЛІНОМАМИ В СЕРЕДНЬОМУ

Встановлено асимптотично точну оцінку похибки сумісного наближення класів функцій високої гладкості інтерполяційними тригонометричними поліномами в метриці простору L_1.

Ключові слова: *$\bar{\psi}$ -похідна, L та C-передування пар, інтерполяційний тригонометричний поліном.*

При розв'язанні задач, що виникають при моделюванні фізичних, механічних, економічних та соціальних процесів доводиться будувати чисельні методи відшукання наближених розв'язків деяких експериментальних задач. Якщо співвідношення між параметрами, що характеризують досліджуваний процес, можна подати у вигляді деякої лінійної комбінації ядер типу Пуассона, то результати цієї роботи можна використати при заміні цієї лінійної комбінації на інтерполяційний многочлен, при врахуванні похибки такої заміни, при відшуканні степеня многочлена, що характеризував би потрібну точність.

Нехай L_1 — простір сумовних 2π-періодичних функцій із нормою $\|\varphi\|_L = \|\varphi\|_1 = \int\limits_0^{2\pi} |\varphi(t)|dt$. Нехай $L_1^{\bar{\psi}}$ — клас сумовних 2π-пе-

