дільський : Кам’янець-Подільський державний університет, 2002. — Т. 2. — С. 6–9.
3. Зигмунд А. Тригонометрические ряды : в 2-х т. / А. Зигмунд. — М. : Мир, 1965. — Т. 2. — 537 с.
4. Никольский С. М. Оценки остатка суммы Фейера для периодических функций, имеющих ограниченную производную / С. М. Никольский // Докл. АН СССР. — 1941. — 31, №3. — С. 210–214.
5. Сердюк А. С. Наближення періодичних функцій високої гладкості інтерполяційними тригонометричними поліномами в метриці L_1 / А. С. Сердюк // Укр. мат. журн. — 2000. — 52, №7. — С. 994–998.
6. Никольский С. М. Приближение функций тригонометрическими полиномами в среднем / С. М. Никольский // Изв. АН СССР. Математика. — 1946. — 10, №3. — С. 207–256.

The asymptotically precise estimation of the joint approximation error of classes of functions with high smoothness by interpolation trigonometric polynomials in the δ-metric has been established.

Key words: $\bar{\psi}$ *-derivative, L and C precedence of pairs, the interpolation trigonometric polynomial.*

Отримано: 13.02.2010

УДК 517.929

І. М. Черевко, д-р фіз.-мат. наук,
О. В. Матвій, канд. фіз.-мат. наук

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, м. Чернівці

МОДЕЛЮВАННЯ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ІЗ ЗАПІЗНЕННЯМ

Досліджена крайова задача із запізненням. Встановлено умови розв'язності крайової задачі із запізненням і досліджено її апроксимацію за допомогою систем звичайних диференціальних рівнянь.

Ключові слова: *диференціально-різницеві рівняння, запізнення, крайова задача із запізненням, апроксимація.*

Вступ. У роботі досліджуються алгоритми наближеного розв'язання крайових задач для диференціальних рівнянь другого порядку із запізненням. Такі задачі виникають при дослідженні варіаційних задач, у теорії пружності, в задачах оптимального керування та ін.

Розв'язання крайових задач із запізненням аналітично можливе тільки в найпростіших випадках, тому побудова та обґрунтування наближених методів їх розв'язання є важливою задачею. Зведення лінійної крайової задачі із запізненням до інтегрального рівняння і застосування проекційно ітеративних методів розглянуто в роботі [1]. Застосування методу сплайн колокацій до таких задач вивчалося в [2-3]. У даній роботі досліджується розв'язність крайових задач із запізнення, обґрунтовується їх апроксимація крайовою задачею для послідовності систем звичайних диференціальних рівнянь та розроблена прикладна програма для моделювання крайових задач на ЕОМ. Дослідження точності апроксимації у простішому випадку здійснено в [4].

1. Постановка задачі, існування розв'язку. Розглянемо крайову задачу

$$y''(t)=f(t,y(t),y(t-\tau_1),\ldots,y(t-\tau_k),\ y'(t),y'(t-\tau_1),\ldots,y'(t-\tau_k)),\ t\in[a,b], \quad (1)$$

$$y(t)=\varphi(t),\ y'(t)=\varphi'(t), t\in[a-\tau,a],\ y(b)=\gamma. \quad (2)$$

Нехай $0<\tau_1<\tau_2<\ldots<\tau_k=\tau, \gamma\in R,\quad f(t,u_0,u_1,\ldots,u_k,v_0,v_1,\ldots,v_k)$ — неперервна функція в області $G=[a,b]\times G_1^k\times G_2^k$, де $G_1=\{u\in R:|u|\le P_1\}$, $G_2=\{v\in R:|v|\le P_2\}$, P_1, P_2, τ — додатні сталі, $\varphi(t)\in C^1[a-\tau,a]$.

Введемо позначення:

$$P=\sup\{|f(t,u_0,u_1,\ldots,u_k,v_0,v_1,\ldots,v_k)|:|u_i|\le P_1,|v_i|\le P_2,\ j=\overline{0,k},t\in[a,b]\},$$

$$J=[a-\tau,a],\ I=[a,b],\ I_1=[a,a+\tau_1],\ I_2=[a+\tau_1,a+\tau_2],\ldots,$$

$$I_k=[a+\tau_{k-1},a+\tau_k],\ I_{k+1}=[a+\tau_k,b],$$

$$B(J\cup I)=\left\{y(t):y(t)\in(C(J\cup I)\cap(C^1(J)\cup C^1(I))\cap\left(\bigcup_{j=1}^{k+1}C^2(I_j)\right)\right\},$$

$$|y(t)|\le P_1,|y'(t)|\le P_2\}.$$

Розв'язком задачі (1)-(2) будемо вважати функцію $y=y(t)$ із простору $B(J\cup I)$, яка задовольняє рівняння (1) на $[a,b]$ (за можливим винятком точок $t_i=a+\tau_i,\ i=\overline{1,k}$) та крайові умови (2).

Із означення простору $B(J\cup I)$ випливає, що розв'язок задачі (1)-(2) є неперервним в точці $t=a$, але гладкості його в цій точці ми не передбачаємо. Він є неперервно-диференційованим для всіх $t\in[a,b]$, якщо під $y'(a)$ розуміти правосторонню похідну.

Має місце наступне твердження.

Теорема 1 [4]. *Нехай справджуються умови:*

1) $\max\left\{\sup\limits_{t\in J}\{|\varphi(t)|\},\ \dfrac{(b-a)^2}{8}P+\max\{|\varphi(a)|,|\gamma|\}\right\}\le P_1;$

2) $\max\left\{\sup\limits_{t\in J}\{|\varphi'(t)|\},\ \dfrac{(b-a)}{2}P+\left|\dfrac{\gamma-\varphi(a)}{b-a}\right|\right\}\le P_2;$

3) *в області G функція* $f(t,u_0,\ldots,u_k,v_0,\ldots,v_k)$ *задовольняє умову Ліпшица:*

$$\left|f(t,u_0,\ldots,u_k,v_0,\ldots,v_k)-f(t,\overline{u_0},\ldots,\overline{u_k},\overline{v_0},\ldots,\overline{v_k})\right|\le$$

$$\le\sum_{j=0}^{k}\left(L_j\left|u_j-\overline{u_j}\right|+M_j\left|v_j-\overline{v_j}\right|\right);$$

4) $\sum_{j=0}^{k}\left(L_j+M_j\right)<1.$

Тоді в класі функцій $B(J\cup I)$ *існує єдиний розв'язок крайової задачі (1)-(2).*

2. Схема апроксимації. Поставимо у відповідність крайовій задачі (1)-(2) крайову задачу для системи звичайних диференціальних рівнянь вигляду

$$\begin{gathered} z_0''(t)=f(t,z_0(t),z_{l_1}(t),\ldots,z_{l_k}(t),w_0(t),w_{l_1}(t),\ldots,w_{l_k}(t)),\\ z_j'(t)=\mu\left(z_{j-1}(t)-z_j(t)\right),\ j=\overline{1,m}, \end{gathered} \tag{3}$$

$$z_j(a)=\varphi\left(a-\frac{j\tau}{m}\right),\ j=\overline{0,m},\ z_0(b)=\gamma, \tag{4}$$

$$\begin{gathered} w_0(t)=\int_a^b\overline{G_t'}(t,s)f(s,z_0(s),\ldots,z_{l_k}(s),w_0(s),\ldots,w_{l_k}(s))ds+\frac{\gamma-\varphi(a)}{b-a},\\ w_j'(t)=\mu\left(w_{j-1}(t)-w_j(t)\right),\ j=\overline{1,m}, \end{gathered} \tag{5}$$

$$w_j(a)=\varphi'\left(a-\frac{j\tau}{m}\right),\ j=\overline{1,m}, \tag{6}$$

де $m\in N$, $\mu=m/\tau$, індекси l_j однозначно визначаються нерівностями $a-\frac{l_j\tau}{m}<a-\tau_j\le a-\frac{\left(l_j-1\right)\tau}{m}$, а $G(t,s)$ — функція Гріна крайової задачі $y''(t)=0$, $y(a)=y(b)=0$.

Умови, при яких наведена схема апроксимації наближає крайову задачу із запізненням, встановлюється у такому твердженні.

Теорема 2. *Нехай функція* $f(t,u_0,\ldots,u_k,v_0,\ldots,v_k)$ *задовольняє умови теореми 1,* $M=max\{M_i,L_i\}$ *та виконується нерівність*

$$M(b-a)(k+1)\max\left[(b-a),0.25e^{0.25M(k+1)(b-a)^2}+1\right]<1.$$

Тоді крайова задача (3)-(6) апроксимує крайову задачу (1)-(2) і мають місце співвідношення

$$\max_{a\le\xi\le t}\left|z_j(\xi)-y\left(\xi-\frac{j\tau}{m}\right)\right|\le\gamma\left(\frac{\tau}{m}\right),\ \int_a^t\left|w_j(\xi)-y'\left(\xi-\frac{j\tau}{m}\right)\right|\le\gamma\left(\frac{\tau}{m}\right),\ j=\overline{0,m},$$

де $\gamma(\delta)$ *– монотонно неспадна функція і* $\lim_{\delta\to 0}\gamma(\delta)=0$.

3. Моделювання крайових задач на ЕОМ. Для автоматизації дослідження наближеної заміни крайових задач із запізненням послідовністю систем звичайних диференціальних рівнянь за допомогою методики, яка описана в п.2, розроблено Windows-додаток. Для його реалізації та побудови графічного інтерфейсу використано інтегроване середовище Borland Delphi 6.0, а реалізація синтаксичного аналізатора та математичних обчислень здійснено засобами мови Ruby.

Borland Delphi 6.0 — потужне високопродуктивне середовище для розробки 32-розрядних Windows-додатків, яке включає в себе великий набір інструментів для керування та передачі даних з використанням відкритих стандартів. Ruby — це динамічна об'єктно-зорієнтовна мова з відкритим кодом, яка дозволяє ефективну розробку прикладних програм. Для нормальної роботи додатку необхідно: операційна система Windows XP, об'єм оперативної пам'яті не менше 512 Мбайт.

Головне вікно програми містить стандартний набір елементів, серед яких виділяється головне меню, яке містить такі пункти:

• *Крайова задача* – • *Результат* – • *Допомога* – • *Вихід.*

Алгоритм роботи з програмою.

А. Користувач вибирає меню *Крайова задача*, у якому необхідно ввести функцію $F(t,z_0,...,z_m,w_0,...,w_m)$, яка визначається правою частиною рівняння, початкові функції $\varphi(t)$ та $\varphi'(t)$, значення запізнення τ, розмірність апроксимуючої системи, межі інтервала a та b, значення функції в точці b, кількість точок розбиття. За допомогою кнопки *Ввести дані* здійснюється обробка введеної інформації, виконуються обчислення та формується файл, де зберігаються результати обчислень.

Б. Для відображення результатів в табличному та графічному вигляді потрібно вибрати меню *Результат*.

4. Приклад. Розглянемо приклад, який ілюструє наведену методику апроксимації крайових задач із запізненням

$$x''(t)=2x(t)-e\,x(t-1),\quad 0\le x\le 2,$$

$$x(t)=e^t,\ x'(t)=e^t,\qquad -1\le x\le 0,$$

$$x(0)=1,\ \ x(2)=e^2.$$

Точний розв'язок даної крайової задачі $x(t) = e^t$. Результати числових експериментів наведені в таблиці 1, де $x_c(t)$ — точний розв'язок, $x_a(t)$ — розв'язок апроксимуючої крайової задачі для звичайних диференціальних рівнянь при $m = 500$, знайдений за різницевою схемою з кроком $h = 0.02$, Δ — модуль різниці між точним та наближеним значенням.

Таблиця 1

t	$x_c(t)$	$x_a(t)$	Δ
0	1	1	0
0.5	1.648	1.653	0.005
1	2.718	2.727	0.009
1.5	4.481	4.491	0.01
2	7.389	7.389	0

Висновок. Запропонована схема апроксимації та розроблена прикладна програма дозволяють ефективно знаходити наближений розв'язок крайових задач із запізненням. Числові експерименти підтверджують ефективність запропонованих наближених алгоритмів. Для наведеного прикладу абсолютна похибка $\Delta \le 0.01$, а відносна похибка $\delta \le 0.33\%$.

Список використаних джерел:

7. Лучка А. Ю. Проекционно-итеративные методы / А. Ю. Лучка. — К. : Наук. думка, 1993. — 286 с.
8. Nikolova N. S. Application of spline-function for the construction of an approximate solution of boundary value problems for a class of functional-differential equations / N. S. Nikolova, D. D. Bainov // Yokohama Math. J. — 1981. — Vol. 29, № 1. — P. 108–122.
9. Черевко И. М. Численный метод решения краевых задач для интегро-дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом / И. М. Черевко, И. В. Якимов // Укр. мат. журн. — 1989. — Т. 41, № 6. — С. 854–860.
10. Матвій О. В. Апроксимація крайових задач із запізненням системами звичайних диференціальних рівнянь / О. В. Матвій, І. М. Черевко // Вісник Київського університету. Серія : фіз.-мат. науки. — 2003. — № 3. — С. 129–137.

The boundary value problems with delay are researched. Conditions of the solvability of boundary value problems with delay are proved and their approximation is investigated with the help of systems of ordinary differential equations.

Key words: *differential-difference equations, delay, boundary value problem, approximation.*

Отримано: 02.06.2010