2. Good I. J. Probability and Weighting of Evidence / I. J. Good. — London ; Griffin ; New York : Hafner Press, 1950. — 340 p.
3. Андрєєв М. В. Лекції з байєсової економетрії. Оптимальні статистичні рішення та системний аналіз проблем прийняття рішень в умовах невизначеності / М. В. Андрєєв. — К. : КІБіТ, 2007. — 464 с.

This paper deals with the problem of a decision making theory application to the prediction of a future observation. The conceptual framework is one of searching for a stochastic model for this problem. The choice of a suitable model is made from open and closed set, respectively. These cases are researched by means of Bayesian approach application.

Key words: *bayesian decision theory, statistical comparison of models, bayes factor, the forecast distribution, Monte Carlo method, the average assessment.*

Отримано: 14.09.2010

УДК 519.23

А. В. Атаманюк, аспірант
Хмельницький національний університет, м. Хмельницький

НОВИЙ ПІДХІД ДО РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ МАРШРУТИЗАЦІЇ

Наведено новий підхід до розв'язання задачі маршрутизації декількох транспортних засобів з часовими вікнами за допомогою алгоритмів допусків.

Ключові слова: *задача маршрутизації, верхній допуск, нижній допуск, «горлишковий» допуск*

Вступ. Під час розгляду задач, що належать до класу NP-складних [1, с. 139—150], таких як задача маршрутизації транспортного засобу з часовими вікнами, важливе місце займає знаходження варіантів розв'язання цих задач за поліноміальний час для певних наборів даних (а не для всіх даних). Найкращим є шлях, який позбавляє від необхідності розгляду повного перебору, виходячи з певних особливостей задачі. Оскільки евристичні правила мають рекомендаційний характер, то евристичні методи не завжди приводять до бажаних результатів розв'язання задачі, тому бажано мати якнайбільший набір евристик. Евристика також використовується для пришвидшення і покращення точності оптимізації алгоритмів в основному через введення ефективних початкових розв'язків.

Постановка проблеми. Аналіз літератури показує, що в даний час задача маршрутизації з часовими вікнами може розв'язуватись за допомогою таких методів: метод гілок та меж (Branch and bound, Fisher, 1994); метод гілок з відсіканням (Branch and cut); груповий генетичний алгоритм; евристика адаптивного пошуку відкритої області; алгоритм пошуку околу змінної; алгоритм забороненого пошуку; використовуючи метаевристики; ітераційний алгоритм локального пошуку; послідовні алгоритми швидкого виймання; ефективна евристика вставки; підхід, що базується на оптимізації колонії мурах.

Одна з важливих проблем при вирішенні NP-складної задачі комбінаторної оптимізації методом гілок і меж, тобто вибором елементу розгалуження, який зберігає пошук дерева якомога менше. З використанням допусків можна спростити цей вибір. А саме, якщо елемент з оптимального рішення поточної релаксації з кінцевим позитивним верхнім допуском, то цей елемент знаходиться у всіх оптимальних рішеннях поточної релаксації задачі (див. теорема 1). Відповідно, розгалуження на цьому елементі означає, що відбувається входження основної частини в дерево пошуку, що походять з цієї стадії потоку. Тому, розгалуження на елемент з позитивним верхнім допуском — не лише необхідно для знаходження можливого рішення для початкового рішення NP-складної задачі, але також — найкращий вибір.

Виклад основного матеріалу. Маршрутизація транспортних засобів з часовими вікнами відноситься до задач комбінаторної оптимізації, які можна представити у вигляді графа $G(V, E)$:

$V = \{v_0, v_1, ..., v_n\}$ — множина вершин (v_0 — депо, $v_1, ..., v_n$ — споживачі);

E — множина ребер $\{(v_i, v_j) \mid i \neq j\}$;

C — матриця невід'ємних відстаней (або вартості шляху) c_{ij} між споживачами;

m — кількість машин;

R_i — маршрут i-ої машини ($i = 1..m$);

$C(R_i)$ — вартість маршруту R_i;

q_i — об'єм вантажу, що поставляється i-му споживачу.

З кожною вершиною V_i асоціюється деяка кількість товарів, які повинні бути доставлені відповідному споживачу. Задача маршрутизації полягає в означенні такої множини маршрутів m з мінімальною загальною вартістю, щоб кожна вершина множини V була відвідана тільки одним автомобілем тільки один раз. Крім того, все маршрути повинні починатися і закінчуватися в депо (v_0). Для виконання замовлення кожного споживача v_i існує допустимий проміжок часу, визначений як інтервал $[e_i, l_i]$ — запланований горизонт, реальний момент виконання замовлення у відповідності з отриманим рішенням.

Накладаючи обмеження на час, у задачі маршрутизації з часовими вікнами добавляються наступні умови:

1) розв'язок недопустимий, якщо клієнт обслуговується після верхньої часової межі;

2) машина, що прибула раніше нижньої часової границі, очікує її настання;
3) як варіант, запізнення не впливає на допустимість розв'язку, але добавляє деяке штрафне значення до цільової функції.

Розв'язком задачі є:

1) розбиття множини *V* на підмножини (маршрути);
2) задання порядку обходу на кожній підмножині (перестановка вершин маршруту).

Розв'язок є допустимим (feasible), якщо всі маршрути задовольняють додатковим обмеженням задачі.

Цільовою функцією є вартість розв'язку задачі:

$$F = \sum_{i=1}^{m} C\left(R_i\right),$$

де $C\left(R_i\right)$ — сума довжин ребер маршруту R_i.

Одержавши розв'язок задачі маршрутизації транспортного засобу з часовими вікнами є можливість точніше підібрати час виїзду транспорту з депо і тим самим уникнути безкорисних простоїв.

Мета: мінімізувати кількість машин, загальний час шляху та очікування, необхідні для обробки запитів клієнтів в зазначені інтервали часу.

Введемо поняття допусків для задач комбінаторної оптимізації.

У 2002 році Гольденгоріном Б. І. [2] задача комбінаторної оптимізації визначена наступною четвіркою (ε, C, D, f_C).

Задачі комбінаторні оптимізації (ε, C, D, f_C) — це задачі знаходження

$$S^* \in \arg opt\left\{f_C(S) \mid S \in D\right\}, \tag{1}$$

де $C : \varepsilon \to R$ — наданий приклад задачі з основою множини S, що задовольняє $\left|\varepsilon\right| = m \quad (m \geq 1)$; $D \subseteq 2^{\varepsilon}$ — це множина допустимих розв'язків; $f_C : 2^{\varepsilon} \to R$ — це цільова функція задачі. Множина оптимальних рішень визначається через $D^* = \arg opt\left\{f_C(S) \mid S \in D\right\}$. Прийнято, що $D^* \neq 0$ і $\bigcup D \neq 0$. В подальшому візьмемо $opt = \min$.

Покладемо $g \in \varepsilon$ і $\alpha \geq 0$. Через $C_{\alpha,g} : \varepsilon \to R$ позначимо приклад, визначений як $C_{\alpha,g}(e) = C(e)$ для будь-яких $e \in \varepsilon / \{g\}$ і $C_{\alpha,g}(g) = C(g) + \alpha$. Візьмемо будь-яке $S^* \in D^*$.

Верхній допуск, $u_{S^*}(e)$, де e відносно S^*, визначається як

$$u_{S^*}(e) = \max\left\{\alpha \ge 0 : S^* \in \arg\min\left\{f_{C_{\alpha,g}}(S) : S \in D\right\}\right\}, \qquad (2)$$

та нижній допуск, $l_{S^*}(e)$, відносно до S^*, визначається як

$$l_{S^*}(e) = \max\left\{\alpha \ge 0 : S^* \in \arg\min\left\{f_{C_{-\alpha,g}}(S) : S \in D\right\}\right\}. \qquad (3)$$

Тобто $u_{S^*}(e)$ це максимальне збільшення $C(e)$, під яким S^* стає оптимальним, і $l_{S^*}(e)$ є максимальним зменшенням $C(e)$, під яким S^* стає оптимальним.

Припустимо, що f_C — монотонна, визначена для будь-якого $S \in 2^e$ і будь-якого $\alpha \ge 0$, тобто:

$$f_{C_{\alpha,e}}(S) \ge f_{C_{0,e}}(S). \qquad (4)$$

Сума функції $f_C(S) = \sum_{e \in S} C(e)$, «горлишкова функція» $f_C(S) = \max_{e \in S} C(e)$, виробничі функції $f_C(S) = \prod_{e \in S} C(e)$ і $C(e) \ge 1$ для будь-яких $e \in \varepsilon$ всіх монотонних функцій.

Множина D називається множиною непоганих можливих рішень, якщо для будь-яких $S_1, S_2 \in D$ з $S_1 = S_2$, тобто ні $S_1 \subset S_2$, ні $S_2 \subset S_1$.

Наступна теорема може бути як узагальнення теореми Лібера про допуски, отриманих для релаксації задачі маршрутизації. Використовуємо наступні додаткові зауваження. Припустимо $e \in \varepsilon$. Тоді $D_+(e) = \{S \in D : e \in S\}$ і $D_-(e) = \{S \in D : e \notin S\}$. Зрозуміло, що $D = D_-(e) \bigcup D_+(e)$ і $D_-(e) \bigcup D_+(e) \ne 0$ для всіх $e \in \varepsilon$. $D_+^*(e)$ і $D_-^*(e)$ — множини оптимальних рішень, які включають e і не включають e відповідно.

Теорема 1. Розглянемо задачу комбінаторної опримізації (ε, C, D, f_C) з монотонною f_C. Для будь-яких $S^* \in D^* \ne 0$ виконується наступне:

1. $e \in D^* \Leftrightarrow u_{S^*}(e) = f_C(S) - f_C(S^*) > 0$ для $\forall S \in D_-^*(e)$, $l_{S^*}(e) = \infty$;
2. $e \in \varepsilon \setminus \bigcup D^* \Leftrightarrow u_{S^*}(e) = \infty$, $l_{S^*}(e) = f_C(S) - f_C(S^*) > 0$, $\forall S \in D_+^*(e)$;
3. $e \in S^* \setminus \bigcap D^* \Leftrightarrow u_{S^*}(e) = 0$, $l_{S^*}(e) = \infty$;
4. $e \in \bigcup D^* \setminus S^* \Leftrightarrow u_{S^*}(e) = \infty$, $l_{S^*}(e) = 0$.

Якщо $\left|D^*\right| = 1$, то ця теорема зводиться до теореми Лібера про допуски. Якщо $D_-(e) = 0$ для деяких $e \in \varepsilon$, то $u_{S^*}(e) = = \min\{S_C(T) : T \in D_-(e)\} - f_C(S^*) = \min\{0\} = \infty$ (за означенням). Аналогічно для $D_+(e) = 0$ одержимо $l_{S^*}(e) = \infty$. Зауважимо, що кінцеві значення верхніх і нижніх допусків невід'ємні і незалежні на вибраному $S^* \in D^*$. Відповідно, можемо записати $u(e)$ і $l(e)$ замість $u_{S*}(e)$ і $l_{S^*}(e)$, відповідно, коли вони кінцеві і позитивні.

Метою вивчення екстремальних значень допусків. є зменшення розмірів дерева пошуку алгоритмів типу віток і границь для релаксації задачі маршрутизації. АЗК. Для детальної інформації про властивості верхніх і нижніх допусків можна звернутись до Грінберга та на його посилання.

Розв'язаний приклад зведення задачі маршрутизації з часовими вікнами (ACVRPTW) до несиметричної задачі комівояжера з k транспортними засобами (k-ATSP).

Розглянемо несиметричну задачу комівояжера ATSP на прикладі 8 міст:

1000	2	11	10	8	7	6	5
6	1000	1	8	8	4	6	7
5	12	1000	11	8	12	3	11
11	9	10	1000	1	9	8	10
11	11	9	4	1000	2	10	9
12	8	5	2	11	1000	11	9
10	11	12	10	9	12	1000	3
7	10	10	10	6	3	1	1000

Рис. 1.

У матриці подані відстані для всіх пар міст.

Припустимо, що в задача маршрутизації ACVRP з двома транспортними засобами, і вони розташовані у місті 1. Крім того, максимальна відстань подорожі кожного транспортного засобу не перевищує 25 (С=25). Для цього додали копію відстаней між містом 1 та всіма іншими містами, враховуючи, що депо знаходиться у першому місті, одержали несиметричну задачу комівояжера.

За допомогою методу гілок і меж, що базується на допусках, для задачі маршрутизації ACVRP з її релаксацією задачею про призначення (AP) було знайдено 15 підзадач і розв'язано їх (де excl.(6,7) — виключення ребра (6,7), incl.(6,7) — включення ребра (6,7)):

1. original AP 29;
2. excl.(6,7) 33;
3. excl.(6,7), (9,8) 34;
4. excl.(6,7), (9,8), (3,4) 35;
5. excl.(6,7), (9,8), (3,4), (5,6) 44;
6. excl.(6,7), (9,8), (3,4), (6,5); incl.(5,6) 37
7. excl.(6,7), (9,8), (4,1); incl. (3,4) 37; можливе рішення!
8. excl.(6,7), (9,8), (1,3); incl. (3,4), (4,1) 42>37 відхиляємо;
9. excl.(6,7), (8,9); excl. (9,8) 37 неможливо відхилити;
10. incl.(6,7); excl.(7,5) 35;
11. incl.(6,7); excl.(7,5), (8,9) 37 неможливо відхилити;
12. incl.(6,7),(8,9); excl.(7,5),(9,8) 39 можливо відхилити;
13. incl.(6,7),(7,5); excl.(5,6) 35;
14. incl.(6,7),(7,5); excl.(5,6),(8,9) 38 відхиляємо;
15. incl.(6,7),(7,5),(8,9); excl.(5,6),(9,8) 38 відхиляємо;

А саме розв'язали задачу про призначення, оскільки ми не одержали гамільтонівського туру, тому шукали допуски для всіх ребер, що входили в рішення. Визначали для підциклів горлишковий допуск [2] і визначали наступні підзадачі.

При проведених обрахунках було знайдено наступне оптимальне рішення: c(1,3,4,8,9,1)=16, c(2,7,5,6,2)=21.

Отже, несиметрична задача комівояжера є релаксацією задачі маршрутизації.

У таблиці 1 наведено правило розгалуження і нижня границя для різних варіантів алгоритму гілок та меж, де lb_e і u_e — точна «горлишкова» границя (ТГГ) і точний «горлишковий» допуск (ТГД) відповідно. Також використовуються наближена «горлишкова» границя(НГГ), що позначається як $lb_a = f_C(a^*) + u_a$. Відповідно наближений «горлишковий» допуск (НГД) позначають $u_a = u(i_0)$ з $i_0 \in \arg\min\left\{\left|C_i\right| : i = 1,...,k\right\}$. Зрозуміло, що $u_a \le u_e$ $r_e = \dfrac{u_e}{f_C(h^*) - f_C(a^*)} \cdot 100\%$ і $r_a = \dfrac{u_a}{f_C(h^*) - f_C(a^*)} \cdot 100\%$ проміжку $f_C(h^*) - f_C(a^*)$. Результат покращення нижньої границі за допомогою точного та наближеного «горлишка» коливається в межах 50%. Як наслідок, виключення ребра ТГД з випадково згенерованого зразка вводить велику кількість кроків в алгоритм в середньому 50% проміжку, до оптимального рішення задачі маршрутизації h^*.

Таблиця 1

Варіант алгоритму гілок та меж

Алгоритм	Нижня границя	Правило розгалуження	Коментарі
0	$f_C(a^*)$	Нормальне	Базовий алгоритм
1	$f_C(a^*)$	ТГД	Ефективність точного розгалуження
2	$f_C(a^*)$	НГД	Ефективність неточного розгалуження
3	lb_e	Нормальне	Ефективність точних границь
4	lb_e	ТГД	Ефективність точного методу віток і границь
5	lb_C	НГД	Не розглянуто
6	lb_a	Нормальне	Ефективність наближеної границі
7	lb_a	ТГД	Не розглянуто
8	lb_a	НГД	Ефективність наближеного методу віток і границь

Висновок. Алгоритми допусків відрізняються від всіх інших алгоритмів перебору тим, що вони будують локально-оптимальні дерева пошуку, а саме: у випадку багатьох оптимальних рішень релаксованої задачі, алгоритми допусків вибирають не порожній перетин всіх можливих дерев пошуку, а якщо перетин порожній, то вибирається те релаксоване оптимальне рішення і дерево пошуку, які дають швидку побудову допустимого розв'язку для вихідної задачі і мінімальний додатковий пошук з метою доведення оптимальності знайденого рішення.

Список використаних джерел:

1. Гери М. Вычислительные машины и труднорешаемые задачи / М. Гери, Д. Джонсон. – М. : Мир, 1982. – 416 с.
2. Goldengorin B. Tolerances Appllied in Combinatorial Optimization / B. Goldengorin, G. Jager, P. Molitor // Journal of Computer Science 2 (9). — 2006. — P. 716—734.

In this paper a new way to solve the Vehicle Routing Problem with Time Windows is being presented, which is based on the tolerance algorithms.

Key words: *vehicle routing problem, upper tolerance, lower tolerance, bottleneck tolerance.*

Отримано 18.09.2010