УДК 517.9

**С. М. Бак,** канд. фіз.-мат. наук,
**О. О. Баранова,** студентка,
**Ю. П. Білик,** студентка
Вінницький державний педагогічний університет
імені Михайла Коцюбинського, м. Вінниця

# КОРЕКТНІСТЬ ЗАДАЧІ КОШІ ДЛЯ НЕСКІНЧЕННОЇ СИСТЕМИ НЕЛІНІЙНИХ ОСЦИЛЯТОРІВ, РОЗМІЩЕНИХ НА ДВОВИМІРНІЙ РЕШІТЦІ

Стаття присвячена вивченню нескінченної системи диференціальних рівнянь, яка описує нескінченний ланцюг лінійно зв'язаних нелінійних осциляторів. Отримано результати про існування та єдиність локального та глобального розв'язків задачі Коші.

**Ключові слова:** *нелінійні осцилятори, двовимірна решітка, задача Коші, локальний розв'язок, глобальний розв'язок.*

**Вступ.** У цій статті вивчаються рівняння, які описують динаміку нескінченної системи лінійно зв'язаних нелінійних осциляторів, розміщених на цілочисловій двовимірній решітці. Нехай $q_{n,\,m}\left(t\right)$ — узагальнена координата $\left(n,\,m\right)$-го осцилятора в момент часу $t$. Передбачається, що кожний осцилятор лінійно взаємодіє з чотирма своїми найближчими сусідами. Тоді рівняння руху системи, що розглядається, мають вигляд

$$\begin{gathered}\ddot{q}_{n,\,m} = -U'_{n,\,m}(q_{n,\,m}) + a_{n-1,\,m}\left(q_{n-1,\,m} - q_{n,\,m}\right) - a_{n,\,m}\left(q_{n,\,m} - q_{n+1,\,m}\right) + \\ + b_{n,\,m-1}\left(q_{n,\,m-1} - q_{n,\,m}\right) - b_{n,\,m}\left(q_{n,\,m} - q_{n,\,m+1}\right),\ \left(n,\,m\right) \in \mathbb{Z}^2.\end{gathered}, \quad (1)$$

Рівняння (1) представляють собою нескінченну систему звичайних диференціальних рівнянь.

Розглядаються такі розв'язки системи (1), що

$$\lim_{n,\,m\to\pm\infty} q_{n,\,m}(t) = 0, \quad (2)$$

тобто осцилятори знаходяться в стані спокою на нескінченності.

Подібні системи є цікавими з огляду на численні застосування у фізиці [5], [7], [8]. В статті [11] вивчались періодичні розв'язки для системи осциляторів на двовимірних решітках, а в статтях [1], [9] та [10] — біжучі хвилі. Питання коректності задачі Коші для ланцюгів нелінійних осциляторів вивчалося в [2] і [6], а для систем осциляторів на двовимірних решітках — не розглядалося.

Метою статті є одержання умов існування та єдиності локального та глобального розв'язків задачі Коші для нескінченної системи лінійно зв'язаних нелінійних осциляторів, розміщених на двовимірній решітці.

 

**Постановка задачі та основні припущення.** Потенціал $U_{n,\,m}(r)$ запишемо у вигляді

$$U_{n,\,m}(r) = -\frac{d_{n,\,m}}{2} r^2 + V_{n,\,m}(r)$$

і покладемо

$$c_{n,\,m} = d_{n,\,m} - a_{n-1,\,m} - a_{n,\,m} - b_{n,\,m-1} - b_{n,\,m}.$$

Тоді рівняння (1) матиме вигляд

$$\ddot{q}_{n,\,m} = a_{n-1,\,m} q_{n-1,\,m} + a_{n,\,m} q_{n+1,\,m} + b_{n,\,m-1} q_{n,\,m-1} + b_{n,\,m} q_{n,\,m+1} + \\ + c_{n,\,m} q_{n,\,m} - V'_{n,\,m}(q_{n,\,m}),\ \left(n,\,m\right) \in \mathbb{Z}^2. \tag{3}$$

Враховуючи граничні умови (2), це рівняння зручно розглядати як диференціально-операторне рівняння

$$\ddot{q} = Aq - B(q)\,, \tag{4}$$

де

$$\left(Aq\right)_{n,\,m} = a_{n-1,\,m} q_{n-1,\,m} + a_{n,\,m} q_{n+1,\,m} + b_{n,\,m-1} q_{n,\,m-1} + b_{n,\,m} q_{n,\,m+1} + c_{n,\,m} q_{n,\,m},$$

(такі оператори вивчалися в [3, с. 506]), а нелінійний оператор $B$ визначається формулою

$$\left(B(q)\right)_{n,\,m} = V'_{n,\,m}\left(q_{n,\,m}\right) \tag{5}$$

у просторі дійсних послідовностей $q = \left\{q_{n,\,m}\right\}$ зі скалярним добутком

$$\left(q^{(1)},\, q^{(2)}\right) = \sum_{n,\,m \in \mathbb{Z}} q^{(1)}_{n,m}\, q^{(2)}_{n,\,m}.$$

Позначимо цей простір $l_{2,\,2}$. Скалярний добуток і норму в $l_{2,\,2}$ позначатимемо $\left(\cdot\,,\,\cdot\right)$ і $\left\|\cdot\right\|$ відповідно.

Далі нам також знадобиться простір $l^\infty$ — банахів простір обмежених послідовностей з нормою

$$\left\|q\right\|_{l^\infty} = \sup_{n,\,m \in \mathbb{Z}} \left|q_{n,\,m}\right|.$$

Відмітимо, що рівняння (3) у просторі $l_{2,\,2}$ можна подати у гамільтоновому вигляді

$$\begin{cases} \dot{p} = -H'_q\left(p,\,q\right), \\ \dot{q} = H'_p\left(p,\,q\right) \end{cases}$$

з гамільтоніаном

$$H\left(p,\,q\right) = \frac{1}{2}\left(\left\|p\right\|^2 - \left(Aq,\,q\right)\right) + \sum_{n,\,m \in \mathbb{Z}} V_{n,\,m}\left(q_{n,\,m}\right),$$

де $p = \dot{q}$.

Гамільтоніан $H\left(p, q\right)$ задає повну енергію системи, тобто суму кінетичної і потенціальної енергії, причому $\frac{1}{2}\|p\|^2$ визначає кінетичну енергію, а $\sum\limits_{n, m\in\mathbb{Z}} V_{n, m}\left(q_{n, m}\right)-\frac{1}{2}\left(Aq, q\right)$ — потенціальну.

За означенням, розв'язком рівняння (4) вважається двічі неперервно диференційовна функція від $t$ зі значеннями в $l_{2, 2}$.

Припускається, що виконуються умови:

$(i)$ *послідовності* $\left\{a_{n, m}\right\}$ *і* $\left\{c_{n, m}\right\}$ *дійсних чисел обмежені;*

$\left(ii\right)$ $V_{n, m}(r)$ — *функція класу* $C^1$ *на* $\mathbb{R}$, *причому* $V_{n, m}(0)=V'_{n, m}(0)=0$ *і для будь-якого* $R>0$ *існує таке* $C=C\left(R\right)>0$, *що для всіх* $n, m\in\mathbb{Z}$

$$\left|V'_{n, m}(r_1)-V'_{n, m}(r_2)\right|\le C\left|r_1-r_2\right|, \quad \left|r_1\right|, \left|r_2\right|\le R. \tag{6}$$

З умови $(i)$ випливає, що $A$ є обмеженим самоспряженим оператором в $l_{2, 2}$.

**Лема 1.** *Нехай виконується умова* $\left(ii\right)$, *тоді оператор* $B$ *є обмеженим оператором в* $l_{2, 2}$. *Більше того, оператор* $B$ *є неперервним за Ліпшицем на кожній кулі простору* $l_{2, 2}$.

**Доведення.** Нехай $q\in l_{2, 2}$ і $\|q\|\le R$. Покажемо, що $B(q)\in l_{2, 2}$ і $\|B(q)\|\le C$ з деякою константою $C=C\left(R\right)$. Оскільки $\|q\|_{l^\infty}\le\|q\|_{l_{2, 2}}=$ $=\|q\|\le R,$ то з нерівності (6) та умови $V'_{n, m}(0)=0$ випливає, що

$$\left|V'_{n, m}\left(q_{n, m}\right)\right|\le C\left|q_{n, m}\right|.$$

Звідси

$$\|B(q)\|=\left[\sum_{n, m\in\mathbb{Z}}\left|V'_{n, m}\left(q_{n, m}\right)\right|^2\right]^{\frac{1}{2}}\le C\left[\sum_{n, m\in\mathbb{Z}}\left|q_{n, m}\right|^2\right]^{\frac{1}{2}}=C\|q\|,$$

що і доводить першу частину леми.

Нехай тепер $q^{(1)}=\left\{q_{n, m}^{(1)}\right\}$, $q^{(2)}=\left\{q_{n, m}^{(2)}\right\}\in l^2$ і $\left\|q^{(i)}\right\|\le R, \quad i=1, 2.$ Тоді

$$\left\|q^{(i)}\right\|_{l^\infty}\le R$$

і нерівність (6) дає

$$\left|V'_{n,m}\left(q^{(1)}_{n,m}\right)-V'_{n,m}\left(q^{(2)}_{n,m}\right)\right|\le C\left|q^{(1)}_{n,m}-q^{(2)}_{n,m}\right|.$$

Аналогічно до попереднього отримуємо

$$\left\|B\left(q^{(1)}\right)-B\left(q^{(2)}\right)\right\|\le C\left\|q^{(1)}-q^{(2)}\right\|,$$

що і доводить неперервність за Ліпшицем. Лему доведено.

Задача Коші для рівняння (4) полягає у знаходженні розв'язку, який задовольняє початкові умови:

$$q(0)=q^{(0)},\ \dot{q}(0)=q^{(1)}. \tag{7}$$

**Основний результат.** Для отримання основного результату нам знадобляться дві теореми, які є наслідками зі стандартних результатів про існування та єдиність локального та глобального розв'язків ([4, с. 391—392]).

Розглянемо в банаховому просторі $E$ нелінійне рівняння

$$\frac{dx}{dt}=f\left(x\right). \tag{8}$$

**Теорема 1 (локальна).** *Нехай для будь-якого* $R>0$ *існують* $M_1=M_1\left(R\right)>0$ *і* $M_2=M_2\left(R\right)>0$ *такі, що*

$$\left\|f\left(x\right)\right\|\le M_1 \text{ при } \left\|x\right\|\le R$$

*і*

$$\left\|f\left(x_1\right)-f\left(x_2\right)\right\|\le M_2\left\|x_1-x_2\right\| \text{ при } \left\|x_1\right\|,\left\|x_2\right\|\le R.$$

*Тоді для будь-якого* $x_0\in E$ *існує* $t_0$ *таке, що рівняння (8) має один і тільки один розв'язок* $x=x\left(t\right)$ *в інтервалі* $\left(-t_0;t_0\right)$, *який задовольняє початкову умову* $x\left(0\right)=x_0$.

**Теорема 2 (глобальна).** *Нехай існують* $M_0>0$, $M_1>0$ *і* $M_2>0$ *такі, що*

$$\left\|f(x)\right\|\le M_1+M_0\left\|x\right\|$$

*і*

$$\left\|f(x_2)-f(x_1)\right\|\le M_2\left\|x_2-x_1\right\|.$$

*Тоді для будь-якого* $x_0\in E$ *рівняння (8) має один і тільки один розв'язок* $x=x\left(t\right)$, *визначений при всіх* $t\in\mathbb{R}$, *який задовольняє початкову умову* $x\left(0\right)=x_0$.

Щоб скористатися теоремою 1 зведемо рівняння (4) до рівняння першого порядку в просторі $E=l_{2,2}\times l_{2,2}$

$$\dot{x}=Gx, \tag{9}$$

де $x=(q,\ p)$ і $Gx=(p,\ Aq-B(q))$ (стандартний прийом приведення рівняння другого порядку до системи першого порядку). Згідно леми 1, оператор $G$ є неперервним за Ліпшицем в просторі $E$. Норма в $E$ визначається рівністю:

$$\|x\|_E=\left(\|q\|^2+\|p\|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

З теореми 1 випливає основний результат статті про існування та єдиність локального розв'язку:

**Теорема 3.** *Нехай виконуються умови* $(i)$ *та* $(ii)$ *з константою. Тоді для будь-яких* $q^{(0)}\in l_{2,\,2}$ *і* $q^{(1)}\in l_{2,\,2}$ *задача (4), (7) має єдиний розв'язок класу* $C^2$*, який визначений на деякому інтервалі* $(-t_0;\,t_0)$.

**Доведення.** Враховуючи обмеженість операторів $A$ та $B$, для всіх $\|x\|_E\le R$ маємо:

$$\|Gx\|_E=\left(\|p\|^2+\|Aq-B(q)\|^2\right)^{\frac{1}{2}}=$$

$$=\left(\|p\|^2+\|Aq\|^2-2\left(Aq,\ B(q)\right)+\|B(q)\|^2\right)^{\frac{1}{2}}\le$$

$$\le\left(\|p\|^2+\|Aq\|^2+2\|Aq\|\|B(q)\|+\|B(q)\|^2\right)^{\frac{1}{2}}\le$$

$$\le\left(\|p\|^2+2\|Aq\|^2+2\|B(q)\|^2\right)^{\frac{1}{2}}\le\left(\|p\|^2+C_1\|q\|^2+C_2\|q\|^2\right)^{\frac{1}{2}}\le$$

$$\le\left(C_0\|p\|^2+C_0\|q\|^2\right)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{C_0}\,\|x\|_E\le\sqrt{C_0}R=M_1,$$

де $C_0=\max\{1;\ C_1+C_2\}$, $M_1=\sqrt{C_0}R.$

Аналогічно для $\|x_1\|_E,\ \|x_2\|_E\le R$, де $x_1=\left(q^{(1)},\ p^{(1)}\right)$, $x_2=\left(q^{(2)},\ p^{(2)}\right)\in E$, враховуючи обмеженість оператора $A$ і лему 1, маємо:

$$Gx_1-Gx_2=\left(p^{(1)},\ Aq^{(1)}-B\left(q^{(1)}\right)\right)-\left(p^{(2)},\ Aq^{(2)}-B\left(q^{(2)}\right)\right)=$$

$$=\left(p^{(1)}-p^{(2)},\ A\left(q^{(1)}-q^{(2)}\right)+B\left(q^{(2)}\right)-B\left(q^{(1)}\right)\right),$$

$$\left\|Gx_1 - Gx_2\right\|_E = \left(\left\|p^{(1)} - p^{(2)}\right\|^2 + \left\|A\left(q^{(1)} - q^{(2)}\right) + B\left(q^{(2)}\right) - B\left(q^{(1)}\right)\right\|^2\right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \left(\left\|p^{(1)} - p^{(2)}\right\|^2 + \left\|A\left(q^{(1)} - q^{(2)}\right)\right\|^2 + 2\left(A\left(q^{(1)} - q^{(2)}\right),\ B\left(q^{(2)}\right) - B\left(q^{(1)}\right)\right) +\right.$$

$$\left. + \left\|B\left(q^{(2)}\right) - B\left(q^{(1)}\right)\right\|^2\right)^{\frac{1}{2}} \le$$

$$\le \left(\left\|p^{(1)} - p^{(2)}\right\|^2 + 2\left\|A\left(q^{(1)} - q^{(2)}\right)\right\|^2 + 2\left\|B\left(q^{(2)}\right) - B\left(q^{(1)}\right)\right\|^2\right)^{\frac{1}{2}} \le$$

$$\le \left(\left\|p^{(1)} - p^{(2)}\right\|^2 + 2C_1\left\|q^{(1)} - q^{(2)}\right\|^2 + 2C\left\|q^{(1)} - q^{(2)}\right\|^2\right)^{\frac{1}{2}} \le$$

$$\le \left(C_0\left\|p^{(1)} - p^{(2)}\right\|^2 + C_0\left\|q^{(1)} - q^{(2)}\right\|^2\right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \sqrt{C_0}\left\|x_1 - x_2\right\|_E = M_2\left\|x_1 - x_2\right\|_E,$$

де $C_0 = \max\{1;\ 2C_1 + 2C\}$, $M_2 = \sqrt{C_0}$.

Отже, за теоремою 1 для $x_0 = \left(q^{(0)},\ q^{(1)}\right) \in E$ існує $t_0$ таке, що рівняння (9) має єдиний розв'язок $x = x(t) = \left(q(t),\ p(t)\right)$ в інтервалі $\left(-t_0;\ t_0\right)$, який задовольняє початкову умову $x(0) = x_0$, тобто

$$\left(q(0),\ \dot{q}(0)\right) = \left(q^{(0)},\ q^{(1)}\right).$$

Теорему доведено.

За допомогою теореми 2, аналогічно до теореми 3, можна отримати основний результат статті про існування та єдиність глобального розв'язку:

**Теорема 4.** *Нехай виконуються умови* $(i)$ *та* $(ii)$ *з константою* $C$*, яка не залежить від* $R$*. Тоді для будь-яких* $q^{(0)} \in l_{2,\,2}$ *і* $q^{(1)} \in l_{2,\,2}$ *задача (4), (7) має єдиний розв'язок класу* $C^2$*, який визначений при всіх* $t \in \mathbb{R}$.

Посилена умова $(ii)$ не виконується для багатьох цікавих нелінійностей, які планується розглянути у подальших дослідженнях.

## Список використаних джерел:

1. Бак С. Н. Бегущие волны в системах осцилляторов на двумерных решетках / С. Н. Бак, А. А. Панков // Український математичний вісник. — 2010. — Т. 7, № 2. — С. 154—175.
2. Бак С. Н. О динамических уравнениях системы линейно связанных нелинейных осцилляторов / С. Н. Бак, А. А. Панков //Український математичний журнал. — 2006. — Т. 58, № 6. — С. 723—729.
3. Березанский Ю. М. Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов / Ю. М. Березанский. — К. : Наук. думка, 1965. — 798 с.
4. Далецкий Ю. Л. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве / Ю. Л. Далецкий, М. Г. Крейн. — М. : Наука, 1970. — 534 с.
5. Aubry S. Breathers in nonlinear lattices: Existence, linear stability and quantization / S. Aubry // Physica D. — 1997. — P. 201—250.
6. Bak S. Well-posedness of initial value problem for discrete nonlinear wave equations / S. Bak, G. N'Guerekata, A. Pankov // Communications in Mathematical Analysis. — 2010. — Vol. 8, № 1. — P. 79—86.
7. Braun O. M. Nonlinear dynamics of the Frenkel-Kontorova model / O. M. Braun, Y. S. Kivshar // Physics Repts. — 1998. — P. 1—108.
8. Braun O. M. The Frenkel–Kontorova model / O. M. Braun, Y. S. Kivshar — Berlin : Springer, 2004. — 427 p.
9. Feckan M. Traveling waves in Hamiltonian systems on 2D lattices with nearest neighbour interactions / M. Feckan, V. Rothos // Nonlinearity. — 2007. — Vol. 20. — P. 319—341.
10. Friesecke G. Geometric solitary waves in a 2D math-spring lattice / G. Friesecke, K. Matthies // Discrete and continuous dynamical systems. — 2003. — Vol. 3, № 1 (February). — P. 105—114.
11. Srikanth P. On periodic motions of two-dimentional lattices / P. Srikanth // Functional analysis with current applications in science, technology and industry. — 1998. — Vol. 377. — P. 118—122.

The article deals with infinite systems of differential equations that describe infinite system of nonlinear oscillators on 2D–lattice. It is obtained results on existence and uniqueness of local and global solutions to the Cauchy problem.

**Key words:** *nonlinear oscillators, 2D–lattice, Cauchy problem, local solution, global solution.*

Отримано 03.10.2010