

УДК 519.6

А. Я. Бомба, д-р техн. наук, канд. фіз.-мат. наук,

А. В. Теребус, аспірантка

Рівненський державний гуманітарний університет, м. Рівне

МОДЕЛЮВАННЯ ІДЕАЛЬНИХ ПОЛІВ ДЛЯ ТОНКИХ ПРОСТОРОВО ВИКРИВЛЕНИХ ПЛАСТІВ

Запропоновано новий алгоритм розв'язування задачі моделювання ідеальної течії для спеціального типу просторових областей — пластів змінної малої товщини, обмежених двома еквіпотенціальними поверхнями-стінками та чотирма поверхнями течії.

Ключові слова: тонкий пласт, крайові задачі, квазіконформні відображення, різниці схеми.

Вступ. Моделювання просторових ідеальних полів [6; 8] пов'язане з чималою кількістю проблем, породжених, зокрема, неможливістю побудови просторової теорії аналітичних функцій комплексної змінної (відповідної плоскій теорії), відсутністю аналогу методу конформних відображень тощо.

У роботах [1—3] запропоновані просторові узагальнення конформних відображень для моделювання та прогнозування ідеальної течії у криволінійному паралелепіпеді, обмеженому попарно ортогональними між собою еквіпотенціальними поверхнями та поверхнями течії; введено поняття просторово комплексно-спряжених функцій, запропоновано аналітичні та числові підходи реалізації розв'язків відповідних задач.

У цій роботі розглядається спеціальний тип просторових ідеальних полів — так звані тонкі просторові пласти (див., напр., [4]), для яких задача моделювання просторової ідеальної течії зводиться до задачі теорії плоскої квазіідеальної течії (задачі на квазіконформне відображення).

Загальна постановка задачі. Розглянемо ідеальний процес фільтраційної течії в області G_τ ($\tau = (x, y, z)$), рис. 1 — деякому безрозмірній змінній товщини $H = H(x, y)$ пласті, обмеженому двома еквіпотенціальними циліндричними поверхнями $A_*A^*B^*B_* = \{\tau : f_*(x, y) = 0, f(x, y) < z < f(x, y) + H(x, y)\}$, $C_*C^*D^*D_* = \{\tau : f^*(x, y) = 0, f(x, y) < z < f(x, y) + H(x, y)\}$ та чотирма поверхнями течії, дві з яких (відповідно підосва та кривля) задані своїми параметричними рівняннями: $A_*B_*C_*D_* = \{\tau : x = u, y = v, z = f(u, v)\}$, $A^*B^*C^*D^* = \{\tau : x = u,$

$y = v, z = f(u, v) + H(u, v)$ }, а інші дві — ортогональні до них (вздовж ліній перетину) циліндричні поверхні: $A_*D_*A^*D^* = \{ \tau : g_*(x, y) = 0, f(x, y) < z < f(x, y) + H(x, y) \}$, $B_*C_*C^*B^* = \{ \tau : g^*(x, y) = 0, f(x, y) < z < f(x, y) + H(x, y) \}$. Побудовану вищеозначеним чином просторову фізичну область надалі отождосимо з її ортогональною проекцією G_z на площину xOy ($uOv, z = u + iv$) — внутрішністю криволінійного чотирикутника $ABCD$, обмеженого двома лініями течії AD ($g_*(u, v) = 0$), BC ($g^*(u, v) = 0$) та двома еквіпотенціальними лініями AB ($f_*(u, v) = 0$), CD ($f^*(u, v) = 0$). Вважатимемо, що товщина пласта є малою в порівнянні з геометричними розмірами основи (підосви), а відповідний процес — двовимірним відносно змінних (u, v) [4]. На основі міркувань закладених у [4—5] закон руху (Дарсі) та рівняння нерозривності запишемо відповідно у вигляді:

$$\vec{v} = \kappa H \begin{pmatrix} G/W & -F/W \\ -F/W & E/W \end{pmatrix} \text{grad} \varphi, \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\kappa H}{W} \left(G \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial u} - F \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\kappa H}{W} \left(-F \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial u} + E \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right) \right) = 0, \quad (2)$$

де κ — коефіцієнт провідності (для зручності викладок покладемо $\kappa \equiv 1$), $\varphi = \varphi(u, v)$ — квазіпотенціал швидкості \vec{v} ($\varphi|_{AB} = \varphi_*$, $\varphi|_{CD} = \varphi^*$, $\left. \frac{d\varphi}{dn} \right|_{BC} = \left. \frac{d\varphi}{dn} \right|_{DA} = 0$), $E = E(u, v) = 1 + f_u^2(u, v)$, $F = F(u, v) = f_u(u, v)f_v(u, v)$, $G = G(u, v) = 1 + f_v^2(u, v)$, $W = \sqrt{EG - F^2}$, $(u, v) \in G_z$.

Згідно з (1)—(2), шляхом введення функції течії $\psi = \psi(u, v)$ — квазікомплексно-спряженої до $\varphi = \varphi(u, v)$ (див., напр., [1]), приходимо до задачі на квазіконформне відображення $\omega = \omega(z) = \varphi(u, v) + i\psi(u, v)$ даної області G_z на відповідну область квазікомплексного потенціалу $G_\omega = \{ \omega : \varphi_* < \varphi < \varphi^*, 0 < \psi < Q \}$:

$$\begin{cases} \frac{H(u, v)}{W(u, v)} \left(G(u, v) \frac{\partial \varphi}{\partial u} - F(u, v) \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right) = \frac{\partial \psi}{\partial v}, \\ \frac{H(u, v)}{W(u, v)} \left(-F(u, v) \frac{\partial \varphi}{\partial u} + E(u, v) \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right) = -\frac{\partial \psi}{\partial u}, \end{cases} \quad (3)$$

$$\varphi|_{AB} = \varphi_*, \quad \varphi|_{CD} = \varphi^*, \quad \psi|_{DA} = 0, \quad \psi|_{BC} = Q, \quad (4)$$

де стала Q — повна витрата (невідомий параметр).

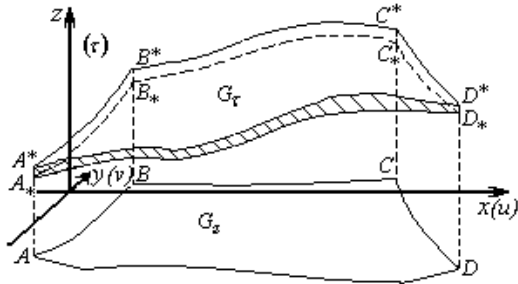


Рис. 1. Просторова фізична область G_T

З метою забезпечення гладкості даного відображення у кутових точках $M = A, B, C, D$ на функції $g_*(u, v) = 0$, $g^*(u, v) = 0$, $f_*(u, v) = 0$, $f^*(u, v) = 0$ накладаємо умови:

$$g'_u(M) \left(Gf'_u(M) - Ff'_v(M) \right) + g'_v(M) \left(-Ff'_u(M) + Ef'_v(M) \right) = 0,$$

де

$$f(M) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} f_*(M), & M = A, B; \\ f^*(M), & M = C, D; \end{cases} \quad g(M) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} g_*(M), & M = A, D; \\ g^*(M), & M = B, C \end{cases}$$

(дотичні до граничних ліній течії повинні настільки відхилитись від нормалей до відповідних еквіпотенціальних ліній, наскільки «анізотропія» відхиляє вектор швидкості від даних нормалей).

Враховавши при цьому, що косинус кута Θ відхилення вектора швидкості \vec{v} від градієнта потенціалу $\text{grad} \varphi$ в довільній точці $z = u + iv$ обчислюється за формулою:

$$\cos \tilde{\Theta} = \frac{G\varphi_u'^2 - 2F\varphi_u'\varphi_v' + E\varphi_v'^2}{\sqrt{\varphi_u'^2 + \varphi_v'^2} \sqrt{(G\varphi_u' - F\varphi_v')^2 + (-F\varphi_u' + E\varphi_v')^2}}, \quad (5)$$

приходимо до відповідних аналогів умов колінеарності для приграничних та граничних вузлів в околі границі області G_z (див., напр., [1]):

$$u_\varphi / (Ef'_u - Ff'_v) = v_\varphi / (-Ff'_u + Gf'_v), \quad f(u, v) \stackrel{\text{def}}{=} f_*(u, v) \vee \vee f^*(u, v)$$

$$\text{(для } AB \text{ або } CD), \quad u_\psi / (Eg'_u - Fg'_v) = v_\psi / (-Fg'_u + Gg'_v), \quad g(u, v) \stackrel{\text{def}}{=} g_*(u, v) \vee \vee g^*(u, v) \text{ (для } AD \text{ або } BC).$$

Відповідну обернену задачу до (3)—(4) на квазіконформне відображення $z = z(\omega) = u(\varphi, \psi) + iv(\varphi, \psi)$ області G_ω на G_z при невідомому Q аналогічно до [1] отримаємо у вигляді:

$$\begin{cases} \frac{H(u, v)}{W(u, v)} \left(G(u, v) \frac{\partial v}{\partial \psi} + F(u, v) \frac{\partial u}{\partial \psi} \right) = \frac{\partial u}{\partial \varphi}, \\ \frac{H(u, v)}{W(u, v)} \left(F(u, v) \frac{\partial v}{\partial \psi} + E(u, v) \frac{\partial u}{\partial \psi} \right) = -\frac{\partial v}{\partial \varphi}, \end{cases} \quad (5)$$

$$\begin{cases} f_*(u(\varphi_*, \psi), v(\varphi_*, \psi)) = 0, & f^*(u(\varphi^*, \psi), v(\varphi^*, \psi)) = 0, & 0 \leq \psi \leq Q, \\ g_*(u(\varphi, Q), v(\varphi, Q)) = 0, & g^*(u(\varphi, 0), v(\varphi, 0)) = 0, & \varphi_* \leq \varphi \leq \varphi^*, \end{cases} \quad (6)$$

зокрема, згідно з (5), матимемо:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{W}{G \cdot H} \cdot \frac{\partial u}{\partial \varphi} - \frac{F}{G} \cdot \frac{\partial u}{\partial \psi} \right) + \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\frac{F}{G} \cdot \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \frac{W \cdot H}{G} \cdot \frac{\partial u}{\partial \psi} \right) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{W}{E \cdot H} \cdot \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{F}{E} \cdot \frac{\partial v}{\partial \psi} \right) + \frac{\partial}{\partial \psi} \left(-\frac{F}{E} \cdot \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{W \cdot H}{E} \cdot \frac{\partial v}{\partial \psi} \right) &= 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Алгоритм числового розв'язку задачі. Різницеві аналоги рівнянь (9), крайових умов (8) приграничних аналогів умов колінеарності (7) та умов «квазіконформної подібності в малому» відповідних чотирикутників [1] у рівномірній сітковій області $G_\omega^\gamma = \{(\varphi_i, \psi_j)\}$:

$$\varphi_i = \varphi_* + \Delta\varphi \cdot i, \quad i = \overline{0, m}; \quad \psi_j = \Delta\psi \cdot j, \quad j = \overline{0, n}; \quad \Delta\varphi = \frac{\varphi^* - \varphi_*}{m}, \quad \Delta\psi = \frac{Q}{n},$$

$\gamma = \frac{\Delta\varphi}{\Delta\psi}$, $m, n \in \mathbb{N}$ } запишемо у вигляді:

$$\begin{aligned} u_{i,j} &= \left(2 + 2\gamma^2 H_{i,j}^2\right)^{-1} \left\{ u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + \gamma^2 H_{i,j}^2 (u_{i,j+1} + u_{i,j-1}) + \right. \\ &\quad \left. (4W_{i,j} G_{i,j} H_{i,j})^{-1} \times (u_{i+1,j} - u_{i-1,j}) \right\} \times \\ &\times \left[(W_{ui,j} G_{i,j} H_{i,j} - W_{i,j} G_{ui,j} H_{i,j} - W_{i,j} G_{i,j} H_{ui,j}) (u_{i+1,j} - u_{i-1,j}) + \right. \\ &\quad \left. + (W_{vi,j} G_{i,j} H_{i,j} - W_{i,j} G_{vi,j} H_{i,j} - W_{i,j} G_{i,j} H_{vi,j}) (v_{i+1,j} - v_{i-1,j}) \right] - \\ &\quad - \gamma H_{i,j} (4W_{i,j} G_{i,j})^{-1} \times (u_{i,j+1} - u_{i,j-1}) \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \times \left[\left(F_{ui,j} G_{i,j} - F_{i,j} G_{ui,j} \right) \left(u_{i+1,j} - u_{i-1,j} \right) + \left(F_{vi,j} G_{i,j} - F_{i,j} G_{vi,j} \right) \times \right. \\
 & \quad \left. \times \left(v_{i+1,j} - v_{i-1,j} \right) \right] + \gamma H_{i,j} \left(4W_{i,j} G_{i,j} \right)^{-1} \left(u_{i+1,j} - u_{i-1,j} \right) \times \\
 & \quad \times \left[\left(F_{ui,j} G_{i,j} - F_{i,j} G_{ui,j} \right) \times \left(u_{i,j+1} - u_{i,j-1} \right) + \right. \\
 & \quad \left. + \left(F_{vi,j} G_{i,j} - F_{i,j} G_{vi,j} \right) \left(v_{i,j+1} - v_{i,j-1} \right) \right] + \gamma^2 H_{i,j} \left(4W_{i,j} G_{i,j} \right)^{-1} \times \\
 & \times \left(u_{i,j+1} - u_{i,j-1} \right) \left[\left(W_{ui,j} G_{i,j} H_{i,j} + W_{i,j} G_{i,j} H_{ui,j} - W_{i,j} G_{ui,j} H_{i,j} \right) \times \left(u_{i,j+1} - u_{i,j-1} \right) + \right. \\
 & \quad \left. + \left(W_{vi,j} G_{i,j} H_{i,j} + W_{i,j} G_{i,j} H_{vi,j} - W_{i,j} G_{vi,j} H_{i,j} \right) \left(v_{i,j+1} - v_{i,j-1} \right) \right]; \quad (8) \\
 & \quad v_{i,j} = \left(2 + 2\gamma^2 H_{i,j}^2 \right)^{-1} \left\{ v_{i+1,j} + v_{i-1,j} + \gamma^2 H_{i,j}^2 \left(v_{i,j+1} + v_{i,j-1} \right) + \right. \\
 & \quad \left. + \left(4W_{i,j} E_{i,j} H_{i,j} \right)^{-1} \times \left(v_{i+1,j} - v_{i-1,j} \right) \right\} \times \\
 & \times \left[\left(W_{ui,j} E_{i,j} H_{i,j} - W_{i,j} E_{ui,j} H_{i,j} - W_{i,j} E_{i,j} H_{ui,j} \right) \left(u_{i+1,j} - u_{i-1,j} \right) + \right. \\
 & \quad \times \left(v_{i,j+1} - v_{i,j-1} \right) \left[\left(F_{ui,j} E_{i,j} - F_{i,j} E_{ui,j} \right) \left(u_{i+1,j} - u_{i-1,j} \right) + \right. \\
 & \quad \left. + \left(F_{vi,j} E_{i,j} - F_{i,j} E_{vi,j} \right) \times \left(v_{i+1,j} - v_{i-1,j} \right) \right] - \\
 & \quad - \gamma H_{i,j} \left(4W_{i,j} E_{i,j} \right)^{-1} \left(v_{i+1,j} - v_{i-1,j} \right) \left[\left(F_{ui,j} E_{i,j} - F_{i,j} E_{ui,j} \right) \times \right. \\
 & \quad \times \left(u_{i,j+1} - u_{i,j-1} \right) + \left. \left(F_{vi,j} G_{i,j} - F_{i,j} G_{vi,j} \right) \left(v_{i,j+1} - v_{i,j-1} \right) \right] + \\
 & \quad + \gamma^2 H_{i,j} \left(4W_{i,j} G_{i,j} \right)^{-1} \times \left(u_{i,j+1} - u_{i,j-1} \right) \times \\
 & \times \left[\left(W_{ui,j} E_{i,j} H_{i,j} + W_{i,j} E_{i,j} H_{ui,j} - W_{i,j} E_{ui,j} H_{i,j} \right) \left(u_{i,j+1} - u_{i,j-1} \right) \times \right. \\
 & \quad \left. + \left(W_{vi,j} E_{i,j} H_{i,j} + W_{i,j} E_{i,j} H_{vi,j} - W_{i,j} E_{vi,j} H_{i,j} \right) \left(v_{i,j+1} - v_{i,j-1} \right) \right]; \\
 & i = \overline{1, m-1}, \quad j = \overline{1, n-1}; \text{ тут } i \text{ надалі } u_{i,j} = u(\varphi_i, \psi_j), \quad v_{i,j} = u(\varphi_i, \psi_j), \\
 & E_{i,j} = E(u_{i,j}, v_{i,j}), \quad F_{i,j} = F(u_{i,j}, v_{i,j}), \quad G_{i,j} = G(u_{i,j}, v_{i,j}), \quad W_{i,j} = \\
 & = W(u_{i,j}, v_{i,j}), \quad H_{i,j} = H(u_{i,j}, v_{i,j}).
 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} f^*(u_{0,j}, v_{0,j}) = 0, & f^*(u_{m,j}, v_{m,j}) = 0, & j = \overline{0, n}, \\ g^*(u_{i,n}, v_{i,n}) = 0, & g^*(u_{i,0}, v_{i,0}) = 0, & i = \overline{0, m}; \end{cases} \quad (9)$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{u_{1,j} - u_{0,j}}{E_{0,j} f_{*u}'(u_{0,j}, v_{0,j}) - F_{0,j} f_{*v}'(u_{0,j}, v_{0,j})} = \\
 & = \frac{v_{1,j} - v_{0,j}}{-F_{0,j} f_{*u}'(u_{0,j}, v_{0,j}) + G_{0,j} f_{*v}'(u_{0,j}, v_{0,j})}, \\
 & \frac{u_{i,n} - u_{i,n-1}}{E_{i,n} g_{*u}'(u_{i,n}, v_{i,n}) - F_{i,n} g_{*v}'(u_{i,n}, v_{i,n})} = \\
 & = \frac{v_{i,n} - v_{i,n-1}}{-F_{i,n} g_{*u}'(u_{i,n}, v_{i,n}) + G_{i,n} g_{*v}'(u_{i,n}, v_{i,n})}, \\
 & \frac{u_{m,j} - u_{m-1,j}}{E_{m,j} f_{*u}'(u_{m,j}, v_{m,j}) - F_{m,j} f_{*v}'(u_{m,j}, v_{m,j})} = \\
 & = \frac{v_{m,j} - v_{m-1,j}}{-F_{m,j} f_{*u}'(u_{m,j}, v_{m,j}) + G_{m,j} f_{*v}'(u_{m,j}, v_{m,j})}, \\
 & \frac{u_{i,1} - u_{i,0}}{E_{i,0} g_{*u}'(u_{i,0}, v_{i,0}) - F_{i,0} g_{*v}'(u_{i,0}, v_{i,0})} = \\
 & = \frac{v_{i,1} - v_{i,0}}{-F_{i,0} g_{*u}'(u_{i,0}, v_{i,0}) + G_{i,0} g_{*v}'(u_{i,0}, v_{i,0})}, \quad i=\overline{1, m-1}, j=\overline{1, n-1} \\
 \gamma & = \frac{1}{mn} \sum_{i,j=0}^{m-1, n-1} \left((a_{i,j} + a_{i+1,j})^{-1} \left(\sqrt{(u_{i+1,j} - u_{i,j})^2 + (v_{i+1,j} - v_{i,j})^2} + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \sqrt{(u_{i+1,j+1} - u_{i,j+1})^2 + (v_{i+1,j+1} - v_{i,j+1})^2} \right) \right), \quad a_{i,j} = H_{i,j} (W_{i,j})^{-1} \times \\
 & \times \sqrt{\left(G_{i,j} (v_{i,j+1} - v_{i,j}) + F_{i,j} (u_{i,j+1} - u_{i,j}) \right)^2 + \left(F_{i,j} (v_{i,j+1} - v_{i,j}) + E_{i,j} (u_{i,j+1} - u_{i,j}) \right)^2}.
 \end{aligned} \tag{10}$$

Алгоритм наближення розв'язку даної задачі в загальному випадку будемо шляхом поетапної параметризації (“почергового заморожування”) параметра γ (або витрати Q), граничних та внутрішніх вузлів сітки G_z^γ [1] з використанням ідей методу блочної ітерації (див., напр., [7] для обґрунтування його збіжності). Особливість побудови алгоритму, при цьому, полягає в тому, що послідовні наближення коефіцієнтів $E_{i,j}$, $F_{i,j}$, $G_{i,j}$, $W_{i,j}$, $H_{i,j}$ на даному кроці у (i,j) -вузлах сітки G_ω^γ знаходяться лише після наближень відповідних значень $u_{i,j}, v_{i,j}$.

Задаємо кількість вузлів розбиття сітки m та n , параметр ε , що характеризує точність роботи алгоритму розв'язання відповідної різницевої задачі, початкові наближення координат граничних вузлів $u_{0,j}^{(0)}$, $v_{0,j}^{(0)}$, $u_{m,j}^{(0)}$, $v_{m,j}^{(0)}$, $u_{i,n}^{(0)}$, $v_{i,n}^{(0)}$, $u_{i,0}^{(0)}$, $v_{i,0}^{(0)}$ (так, щоб виконувались умови (10)) та початкові наближення координат внутрішніх вузлів $(u_{i,j}^{(0)}, v_{i,j}^{(0)})$, $i = \overline{1, n-1}$, $j = \overline{1, m-1}$ (наприклад, як середні арифметичні значення відповідних координат граничних вузлів), знаходимо за формулою (11) початкове наближення $\gamma^{(0)} = \gamma(x_{i,j}^{(0)}, y_{i,j}^{(0)})$ невідомої величини γ .

Далі проводимо уточнення координат внутрішніх вузлів $(u_{i,j}^{(k)}, v_{i,j}^{(k)})$ ($k = 0, 1, \dots$ — крок ітерації) за допомогою ітераційної схеми (8). Після цього знаходимо нові наближення $\gamma^{(k+1)}$ та $Q^{(k+1)}$ величин γ (за (11)) та $Q = \Delta\varphi \cdot \frac{n}{\gamma}$. Підправляємо координати граничних вузлів, наближено розв'язуючи систему рівнянь (9)-(10) та перевіряємо виконання умов:

$$\max_{u_{i,j}, v_{i,j} \in \partial G_z} \left(\left| u_{i,j}^{(k+1)} - u_{i,j}^{(k)} \right|, \left| v_{i,j}^{(k+1)} - v_{i,j}^{(k)} \right| \right) < \varepsilon, \quad \left| Q^{(k+1)} - Q^{(k)} \right| < \varepsilon. \quad (12)$$

Якщо умови (12) не виконуються, то повертаємось до уточнення координат внутрішніх вузлів. Обчислюємо нев'язку «квазіконформності» отриманої сітки $\delta = \sqrt{\delta_1^2 + \delta_2^2}$, де δ_1 , δ_2 — нев'язки апроксимацій рівнянь (5) в G_ω :

$$\begin{aligned} \delta_1 &= \max_{(i,j) \in G_\omega^z} \left| H_{i,j} \gamma(W_{i,j})^{-1} \left(G_{i,j} (v_{i,j+1} - v_{i,j}) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + F_{i,j} (u_{i,j+1} - u_{i,j}) \right) - (u_{i+1,j} - u_{i,j}) \right|, \\ \delta_2 &= \max_{(i,j) \in G_\omega^z} \left| H_{i,j} \gamma(W_{i,j})^{-1} \left(F_{i,j} (v_{i,j+1} - v_{i,j}) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + E_{i,j} (u_{i,j+1} - u_{i,j}) \right) + (v_{i+1,j} - v_{i,j}) \right|. \end{aligned}$$

Зауваження 1. Якщо область G_z має вигляд прямокутника, $G_z = \{z: u \in [u_0; u_1]; v \in [v_0; v_1]\}$, то поставлена задача зводиться до відповідного квазіконформного відображення даного прямокутника

на прямокутник G_{σ} . Аналогічно може бути розв'язаною задача у випадку більш загального задання поверхні $A_*B_*C_*D_*$: $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$, $(u, v) \in G_z$.

Зауваження 2. Більш адекватною дійсності є модель, коли величина, що характеризує товщину пласта $H = H(x, y)$ відкладається вздовж нормалі до біжучої точки його підшови $A_*B_*C_*D_* = \{x = u$, $y = v$, $z = f(u, v)$, $u \in [u_0; u_1]$; $v \in [v_0; v_1]\}$. В цьому випадку, параметричні рівняння кривлі приймуть вигляд:

$$A^*B^*C^*D^* = \left\{ \begin{aligned} x &= u + Hf_u(u, v) \left(\sqrt{f_u^2(u, v) + f_v^2(u, v) + 1} \right)^{-1}, \\ y &= v + Hf_v(u, v) \left(\sqrt{f_u^2(u, v) + f_v^2(u, v) + 1} \right)^{-1}, \\ z &= f(u, v) - H \left(\sqrt{f_u^2(u, v) + f_v^2(u, v) + 1} \right)^{-1}, \end{aligned} \right. u \in [u_0; u_1], v \in [v_0; v_1] \}.$$

Програмна реалізація алгоритму та числові приклади. Вище описаний алгоритм чисельного розв'язання поставленої задачі реалізований у вигляді програми для ПК IBM PC/AT. Для перевірки його коректності проведена серія чисельних експериментів, зокрема, проведені відповідні обчислення для області G_{τ} — пласта товщини $H(x, y) = 0.1$ побудованого на частині поверхні $\{\tau: x = u$, $y = v$, $z = \cos(u)\cos(v)$, $u \in [-\pi/2; \pi/2]$, $v \in [-\pi/2; \pi/2]\}$, як на підшові при $\varphi_* \Big|_{u=u_0} = 0$, $\varphi^* \Big|_{u=u_1} = 1$, $\varepsilon = 10^{-5}$. У таблиці 1, окрім заданих параметрів розбиття $m \times n$, фігурує кількість ітерацій k , значення шуканої витрати Q та нев'язки “квазіконформності” δ . На рис. 2 показано гідродинамічні сітки руху для G_{τ} та відповідної їй плоскої області G_z при $m = n = 20$.

Таблиця 1

Значення параметрів розрахунку гідродинамічної сітки в G_z .

m	n	k	Q	δ
20	20	41	0.09866	0.07011
40	40	156	0.09856	0.03636
60	60	330	0.09854	0.02438
80	80	546	0.09853	0.01828

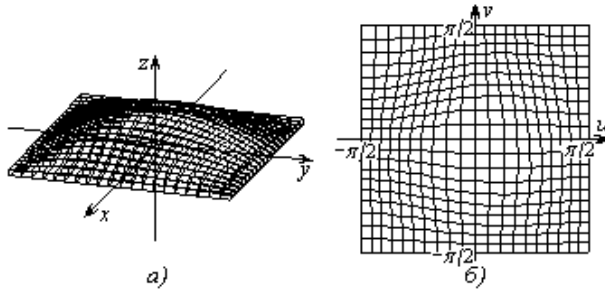


Рис. 2. Гідродинамічна сітка руху в областях а) G_z та б) G_z
при розбитті 20×20

Бачимо, що в кутових точках та в центрі даної області одержана сітка G_z є конформною, що підтверджує правильність розрахунків, враховуючи геометричне задання «підшови»: коефіцієнти першої квадратичної форми приймають значення $E = G = 1$, $F = 0$. Крім цього, підтвердженням правильності розрахунків є наявність заздалегідь запланованої симетрії області (справді розрахунки достатньо було проводити лише в одному з чотирьох квадрантів, наприклад, $u \geq 0$, $v \geq 0$).

Висновки. Задачу моделювання просторової ідеальної течії у спеціального типу просторовій області — тонкому пласті змінної товщини зведено до задачі теорії плоскої квазіідеальної течії (задачі на квазіконформне відображення) та подано алгоритм розв'язку останньої.

Можливим є більш точноше «квазіконформне» наближення просторової ідеальної течії, шляхом зведення вихідної задачі до крайової задачі для системи нелінійних інтегро-диференціальних рівнянь, одержаних у роботах В.А. Толпаєва (див., напр., [9]). При цьому, побудований алгоритм розв'язку доповнюється додатковою процедурою почергової фіксації інтегральної та диференціальної складових даних систем рівнянь. У перспективі також, є узагальнення розробленого алгоритму на випадки наявності анізотропії описаних вище просторових пластів.

Список використаних джерел:

1. Бомба А. Я. Нелінійні математичні моделі процесів геогідродинаміки / А. Я. Бомба, В. М. Булавацький, В. В. Скопечкий. — К. : Наук. думка, 2007. — 308 с.
2. Бомба А. Я. Просторові узагальнення крайових задач на конформні відображення з особливостями / А. Я. Бомба, А. В. Терєбус // Вісник Харк. нац. унту. Сер.: «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління». — Харків, 2009. — Вип. 12, № 863. — С. 13—20.
3. Бомба А. Я. Просторові гармонічні многочлени та аналоги задач на конформні відображення / А. Я. Бомба, А. В. Терєбус // Волинський математичний вісник. Серія: Прикладна математика. — 2008. — №5 (14). — С. 39—63.

4. Голубева О. В. Курс механики сплошных сред / О. В. Голубева. — М. : Высш. шк., 1972. — 367 с.
5. Коппенфельс В. Практика конформных отображений / В. Коппенфельс, Ф. Штальман. — М. : Изд-во иностр. лит., 1963. — 406 с.
6. Лаврентьев М. А. Проблемы гидродинамики и их математические модели / М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат. — М. : Наука, 1977. — 408 с.
7. Ортега Д. Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными / Д. Ортега, В. Рейнболдт. — М. : Мир. — 1975. — 558 с.
8. Рауз Х. Механика жидкости / Х. Рауз. — М. : Стройиздат. — 1967. — 390 с.
9. Толпаев В. А. Уравнения линейной двумерной фильтрации жидкости в анизотропных искривленных слоях переменной и постоянной толщины / В.А. Толпаев, В.И. Ледовской // Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. — Ростов-на-Дону. — 2004. — С. 19—30.

New algorithm for solution of a problem of ideal flow modelling for special type spatial areas, such as thin spatially curved layers with variable thickness, restricted by two equipotential surfaces and four stream surfaces is suggested.

Key words: *thin layer, boundary-value problems, quasiconformal mappings, difference schemes.*

Отримано 16.09.2010