УДК 517.443

І. М. Конет*, д-р фіз.-мат. наук,
М. П. Ленюк,** д-р фіз.-мат. наук
*Кам’янець-Подільський національний університет
імені Івана Огієнка, м. Кам’янець-Подільський,
**Національний технічний університет «ХПІ», м. Харків

ОБЧИСЛЕННЯ НЕВЛАСНИХ ІНТЕГРАЛІВ ЗА ВЛАСНИМИ ЕЛЕМЕНТАМИ ГІБРИДНОГО ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА ФУР'Є – ЕЙЛЕРА – БЕССЕЛЯ НА ОБМЕЖЕНІЙ СПРАВА ДЕКАРТОВІЙ ПІВОСІ

Методом порівняння розв'язків, одержаних для сепаратної системи з модифікованих диференціальних рівнянь Фур'є, Ейлера та Бесселя методом функцій Коші й методом відповідного гібридного інтегрального перетворення, обчислено сім'ю невласних поліпараметричних інтегралів за власними елементами гібридного диференціального оператора Фур'є – Ейлера – Бесселя на обмеженій справа декартовій півосі.

Ключові слова: *невласні інтеграли, функція Коші, головні розв’язки,гібридне інтегральне перетворення, основна тотожність, умова однозначної розв’язності.*

Вступ. Елементи конструкцій композитного типу, як правило, знаходяться в короткочасовому стаціонарному режимі, на який вони виходять після стрибкоподібного температурного або силового навантаження. Вивчення їх фізико-технічних характеристик приводить до задач термомеханіки (механіки) кусково-однорідних середовищ [1—5]. Практика показує, що навіть у найпростіших випадках величини, які характеризують стаціонарний режим композита, зображаються поліпараметричним невласним інтегралом, який може умовно збігатися навіть тоді, коли зображає аналітичну функцію. Звідси виникає природне бажання замінити невласний інтеграл його результатом збіжності (функцією), що особливо важливо при інженерних розрахунках [6; 7]. Обчисленню однієї сім'ї невласних інтегралів присвячена пропонована робота.

Основна частина. Розглянемо задачу про побудову обмеженого на множині

$$I_2 = \{r : r \in (-\infty, R_1) \cup (R_1, R_2) \cup (R_2, R_3), R_1 > 0, R_3 < \infty\}$$

розв'язку сепаратної системи звичайних диференціальних рівнянь Фур'є, Ейлера та Бесселя для модифікованих функцій

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} - q_1^2 \right) u_1(r) = -g_1(r), r \in (-\infty, R_1),$$

$$\begin{aligned}&\left(B^{*}_{\alpha_1}-q_2^2\right)u_2(r)=-g_2(r), r\in(R_1,R_2),\\&\left(B_{\upsilon,\alpha_2}-q_3^2\right)u_3(r)=-g_3(r), r\in(R_2,R_3)\end{aligned}\tag{1}$$

з крайовими умовами

$$\left.\frac{d^k u_1}{dr^k}\right|_{r=-\infty}=0, k=0,1; \left.\left(\alpha_{22}^3 \,{}^{d}\!/\!_{dr}+\beta_{22}^3\right)u_3(r)\right|_{r=R_3}=g_R \tag{2}$$

та умовами спряження

$$\left.\left[\left(\alpha_{j1}^k \,{}^{d}\!/\!_{dr}+\beta_{j1}^k\right)u_k(r)-\left(\alpha_{j2}^k \,{}^{d}\!/\!_{dr}+\beta_{j2}^k\right)u_{k+1}(r)\right]\right|_{r=R_k}=\omega_{jk}, j,k=1,2. \tag{3}$$

У рівностях (1)—(3) $q_j>0$, $\alpha_{22}^3\ge 0$, $\beta_{22}^3\ge 0$, $\alpha_{22}^3+\beta_{22}^3\ne 0$, $c_{1k}\cdot c_{2k}>0$, $c_{jk}=\alpha_{2j}^k\beta_{1j}^k-\alpha_{1j}^k\beta_{2j}^k$, $\alpha_{jk}^m\ge 0$, $\beta_{jk}^m\ge 0$; d^2/dr^2 — диференціальний оператор Фур'є [8]; $B^{*}_{\alpha_1}$ – диференціальний оператор Ейлера [8], B_{υ,α_2} — диференціальний оператор Бесселя [9]:

$$B^{*}_{\alpha_1}=r^2\, d^2/dr^2+(2\alpha_1+1)r\, d/dr+\alpha_1^2,$$

$$B_{\upsilon,\alpha_2}=d^2/dr^2+\frac{2\alpha_2+1}{r}d/dr-\frac{\upsilon^2-\alpha_2^2}{r^2},\ \upsilon\ge\alpha_2\ge -1/2,\ 2\alpha_1+1>0.$$

Фундаментальну систему розв'язків для диференціального рівняння Фур'є $(d^2/dr^2-q_1^2)v=0$ утворюють функції $v_1=\exp[q_1(r-R_1)]$ та $v_2=\exp[-q_1(r-R_1)]$ [8]; фундаментальну систему розв'язків для диференціального рівняння Ейлера $(B^{*}_{\alpha_1}-q_2^2)v=0$ утворюють функції $v_1=r^{-\alpha_1-q_2}$ та $v_2=r^{-\alpha_1+q_2}$ [8]; фундаментальну систему розв'язків для диференціального рівняння Бесселя $(B_{\upsilon,\alpha_2}-q_3^2)v=0$ утворюють модифіковані функції Бесселя $v_1=I_{\upsilon,\alpha_2}(q_3r)$ та $v_2=K_{\upsilon,\alpha_2}(q_3r)$ [9].

Наявність фундаментальної системи розв'язків дозволяє побудувати розв'язок крайової задачі (1)-(3) методом функцій Коші [8; 10]:

$$u_1(r)=A_1e^{q_1(r-R_1)}+\int_{-\infty}^{R_1}E_1(r,\rho)g_1(\rho)d\rho, r\in(-\infty,R_1),$$

$$u_2(r)=A_2r^{-\alpha_1-q_2}+B_2r^{-\alpha_1+q_2}+\int_{R_1}^{R_2}E_2(r,\rho)g_2^{*}(\rho)\rho^{2\alpha_1+1}d\rho, r\in(R_1,R_2), \tag{4}$$

$$u_3(r)=A_3I_{\upsilon,\alpha_2}(q_3r)+B_3K_{\upsilon,\alpha_2}(q_3r)+\int\limits_{R_2}^{R_3}E_3(r,\rho)g_3(\rho)\rho^{2\alpha_2+1}d\rho, r\in(R_2,R_3).$$

У рівностях (4) $E_j(r,\rho)$ — функції Коші [8; 10]:

$$E_j(r,\rho)\big|_{r=\rho+0}-E_j(r,\rho)\big|_{r=\rho-0}=0, \tag{5}$$

$$\left.\frac{dE_j(r,\rho)}{dr}\right|_{r=\rho+0}-\left.\frac{dE_j(r,\rho)}{dr}\right|_{r=\rho-0}=-\frac{1}{\varphi_j(\rho)},$$

де $\varphi_1(r)=1$, $\varphi_2(r)=r^{2\alpha_1+1}$, $\varphi_3(r)=r^{2\alpha_2+1}$, $g_2^*(r)=r^{-2}g_2(r)$.

Нехай функція Коші

$$E_1(r,\rho)=\begin{cases}\overset{-}{E}_1\equiv C_1e^{q_1(r-R_1)}, & -\infty<r<\rho<R_1,\\ \overset{+}{E}_1\equiv C_2chq_1(r-R_1)+D_2shq_1(r-R_1), & -\infty<\rho<r<R_1.\end{cases}$$

Властивості (5) функції Коші дають алгебраїчну систему рівнянь:

$$C_2chq_1(\rho-R_1)+D_2shq_1(\rho-R_1)-C_1e^{q_1(\rho-R_1)}=0,$$

$$C_2shq_1(\rho-R_1)+D_2chq_1(\rho-R_1)-C_1e^{q_1(\rho-R_1)}=-1/q_1.$$

Звідси отримуємо співвідношення:

$$C_2=C_1+q_1^{-1}shq_1(\rho-R_1),\quad D_2=C_1-q_1^{-1}chq_1(\rho-R_1). \tag{6}$$

Доповнимо рівності (6) алгебраїчним рівнянням

$$\left(\alpha_{11}^1\, d/dr+\beta_{11}^1\right)\overset{+}{E}_1\Big|_{r=R_1}=0:\ \ \beta_{11}^1C_2+\alpha_{11}^1q_1D_2=0. \tag{7}$$

Із алгебраїчної системи (6), (7) знаходимо, що

$$C_1=\frac{1}{q_1(\alpha_{11}^1q_1+\beta_{11}^1)}\left[\alpha_{11}^1q_1chq_1(\rho-R_1)-\beta_{11}^1shq_1(\rho-R_1)\right]\equiv\frac{\Phi_{11}^1(q_1R_1,q_1\rho)}{q_1(\alpha_{11}^1q_1+\beta_{11}^1)}.$$

Цим функція Коші $E_1(r,\rho)$ визначена й внаслідок симетрії відносно діагоналі $r=\rho$ має структуру:

$$E_1(r,\rho)=\frac{1}{q_1(\alpha_{11}^1q_1+\beta_{11}^1)}\begin{cases}e^{q_1(r-R_1)}\Phi_{11}^1\left(q_1,R_1,q_1\rho\right), & -\infty<r<\rho<R_1,\\ e^{q_1(r-R_1)}\Phi_{11}^1\left(q_1,R_1,q_1r\right), & -\infty<\rho<r<R_1.\end{cases} \tag{8}$$

Введемо до розгляду функції:

$$Z_{\alpha_1;jk}^{m1}\left(q_2,R_m\right)=\left[\beta_{jk}^m-\alpha_{jk}^mR_m^{-1}\left(\alpha_1+q_2\right)\right]R_m^{-\alpha_1-q_2},\quad m=1,2;$$

$$Z_{\alpha_1;jk}^{m2}\left(q_2,R_m\right)=\left[\beta_{jk}^m-\alpha_{jk}^mR_m^{-1}\left(\alpha_1-q_2\right)\right]R_m^{-\alpha_1+q_2},\quad j,k=1,2,$$

$$\Delta_{\alpha_1;jk}\left(q_2,R_1,R_2\right)=Z_{\alpha_1;j2}^{11}\left(q_2,R_1\right)Z_{\alpha_1;k1}^{22}\left(q_2,R_2\right)-$$

$$-Z_{\alpha_1;j2}^{12}\left(q_2,R_1\right)Z_{\alpha_1;k1}^{21}\left(q_2,R_2\right),$$

$$\Psi^{m*}_{\alpha_1;jk}\left(q_2,r\right)=Z^{m2}_{\alpha_1;jk}\left(q_2,R_m\right)r^{-\alpha_1-q_2}-Z^{m1}_{\alpha_1;jk}\left(q_2,R_m\right)r^{-\alpha_1+q_2}.$$

Безпосередньо перевіряється, що функція Коші

$$E_2(r,\rho)=-\frac{1}{2q_2\Delta_{\alpha_1;11}\left(q_2,R_1,R_2\right)}\begin{cases}\Psi^{1*}_{\alpha_1;12}\left(q_2,r\right)\Psi^{2*}_{\alpha_1;11}\left(q_2,\rho\right),R_1<r<\rho<R_2,\\ \Psi^{1*}_{\alpha_1;12}\left(q_2,\rho\right)\Psi^{2*}_{\alpha_1;11}\left(q_2,r\right),R_1<\rho<r<R_2.\end{cases}\quad(9)$$

Припустимо, що функція Коші

$$E_3(r,\rho)=\begin{cases}\overset{-}{E}_3\equiv C_1I_{\upsilon,\alpha_2}(q_3r)+D_1K_{\upsilon,\alpha_2}(q_3r),R_2<r<\rho<R_3,\\ \overset{+}{E}_3\equiv C_2I_{\upsilon,\alpha_2}(q_3r)+D_2K_{\upsilon,\alpha_2}(q_3r),R_2<\rho<r<R_3.\end{cases}$$

Властивості (5) функції Коші дають алгебраїчну систему

$$(C_2-C_1)I_{\upsilon,\alpha_2}(q_3\rho)+(D_2-D_1)K_{\upsilon,\alpha_2}(q_3\rho)=0,$$

$$(C_2-C_1)I'_{\upsilon,\alpha_2}(q_3\rho)+(D_2-D_1)K'_{\upsilon,\alpha_2}(q_3\rho)=-\left(q_3\rho^{2\alpha_2+1}\right)^{-1}.$$

Звідси знаходимо співвідношення:

$$C_2-C_1=-q_3^{2\alpha_2}K_{\upsilon,\alpha_2}(q_3\rho),\ \ D_2-D_1=q_3^{2\alpha_2}I_{\upsilon,\alpha_2}(q_3\rho).\qquad(10)$$

Доповнимо рівності (10) алгебраїчними рівняннями

$$\begin{matrix}(\alpha^2_{12}\,{}^{d}\!/\!_{dr}+\beta^2_{12})\overset{-}{E}_3\Big|_{r=R_2}=0: \\ (\alpha^3_{22}\,{}^{d}\!/\!_{dr}+\beta^3_{22})\overset{+}{E}_3\Big|_{r=R_3}=0:\end{matrix}\begin{cases}U^{21}_{\upsilon,\alpha_2;12}(q_3R_2)C_1+U^{22}_{\upsilon,\alpha_2;12}(q_3R_2)D_1=0,\\ U^{31}_{\upsilon,\alpha_2;22}(q_3R_3)C_2+U^{32}_{\upsilon,\alpha_2;22}(q_3R_3)D_2=0.\end{cases}\quad(11)$$

Із алгебраїчної системи (10), (11) знаходимо, що

$$C_1=-\frac{q_3^{2\alpha_2}U^{22}_{\upsilon,\alpha_2;12}(q_3R_2)}{\Delta_{\upsilon,\alpha_2;12}(q_3R_2,q_3R_3)}\Psi^{3*}_{\upsilon,\alpha_2;22}(q_3R_3,q_3\rho),$$

$$D_1=\frac{q_3^{2\alpha_2}U^{21}_{\upsilon,\alpha_2;12}(q_3R_2)}{\Delta_{\upsilon,\alpha_2;12}(q_3R_2,q_3R_3)}\Psi^{3*}_{\upsilon,\alpha_2;22}(q_3R_3,q_3\rho).$$

Цим функція Коші $E_3(r,\rho)$ визначена й внаслідок симетрії відносно діагоналі $r=\rho$ має структуру:

$$E_3(r,\rho)=\frac{q_3^{2\alpha_2}}{\Delta_{\upsilon,\alpha_2;12}(q_3R_2,q_3R_3)}\times$$
$$\times\begin{cases}\Psi^{2*}_{\upsilon,\alpha_2;12}(q_3R_2,q_3r)\Psi^{3*}_{\upsilon,\alpha_2;22}(q_3R_3,q_3\rho),R_2<r<\rho<R_3,\\ \Psi^{2*}_{\upsilon,\alpha_2;12}(q_3R_2,q_3\rho)\Psi^{3*}_{\upsilon,\alpha_2;22}(q_3R_3,q_3r),R_2<\rho<r<R_3.\end{cases}\quad(12)$$

У рівностях (11), (12) беруть участь функції:

$$\Delta_{\upsilon,\alpha_2;j2}(q_3R_2,q_3R_3)=U^{21}_{\upsilon,\alpha_2;j2}(q_3R_2)U^{32}_{\upsilon,\alpha_2;22}(q_3R_3)-U^{22}_{\upsilon,\alpha_2;j2}(q_3R_2)U^{31}_{\upsilon,\alpha_2;22}(q_3R_3),$$

$$\Psi^{m*}_{\upsilon,\alpha_2;j2}(q_3R_m,q_3r)=U^{m1}_{\upsilon,\alpha_2;j2}(q_3R_m)K_{\upsilon,\alpha_2}(q_3r)-U^{m2}_{\upsilon,\alpha_2;j2}(q_3R_m)I_{\upsilon,\alpha_2}(q_3r),\ j=1,2,$$

$$U^{m1}_{\upsilon,\alpha_2;j2}(q_3R_m)=\left(\alpha^m_{j2}\frac{\upsilon-\alpha_2}{R_m}+\beta^m_{j2}\right)I_{\upsilon,\alpha_2}(q_3R_m)+\alpha^m_{j2}R_mq_3^2I_{\upsilon+1,\alpha_2+1}(q_3R_m),$$

$$U^{m2}_{\upsilon,\alpha_2;j2}(q_3R_m)=\left(\alpha^m_{j2}\frac{\upsilon-\alpha_2}{R_m}+\beta^m_{j2}\right)K_{\upsilon,\alpha_2}(q_3R_m)-\alpha^m_{j2}R_mq_3^2K_{\upsilon+1,\alpha_2+1}(q_3R_m).$$

Умови спряження (3) та крайова умова в точці $r=R_3$ для визначення п'яти величин A_j й $B_k(j=\overline{1,3};k=2,3)$ дають неоднорідну алгебраїчну систему з п'яти рівнянь:

$$(\alpha^1_{j1}q_1+\beta^1_{j1})A_1-Z^{11}_{\alpha_1;j2}(q_2,R_1)A_2-Z^{12}_{\alpha_1;j2}(q_2,R_1)B_2=\omega_{j1}+\delta_{j2}G_{12},\quad j=1,2;$$

$$Z^{21}_{j1}(q_2,R_2)A_2+Z^{22}_{j1}(q_2,R_2)B_2-U^{21}_{\upsilon,\alpha_2;j2}(q_3R_2)A_3-U^{22}_{\upsilon,\alpha_2;j2}(q_3R_2)B_3=\omega_{j2}+\delta_{j2}G_{23};$$

$$U^{31}_{\upsilon,\alpha_2;22}(q_3R_3)A_3+U^{32}_{\upsilon,\alpha_2;22}(q_3R_3)B_3=g_R. \qquad (13)$$

У системі (13) беруть участь функції

$$G_{12}=c_{11}\int_{-\infty}^{R_1}\frac{e^{q_1(\rho-R_1)}}{\alpha^1_{11}q_1+\beta^1_{11}}g_1(\rho)d\rho+\frac{c_{21}}{R_1^{2\alpha_1+1}}\int_{R_1}^{R_2}\frac{\Psi^{2*}_{\alpha_1;11}(q_2,\rho)}{\Delta_{\alpha_1;11}(q_2,R_1,R_2)}g_2(\rho)\rho^{2\alpha_1-1}d\rho,$$

$$G_{23}=-\frac{c_{12}}{R_2^{2\alpha_1+1}}\int_{R_1}^{R_2}\frac{\Psi^{1*}_{\alpha_1;12}(q_2,\rho)}{\Delta_{\alpha_1;11}(q_2,R_1,R_2)}g_2(\rho)\rho^{2\alpha_1-1}d\rho-$$

$$-\frac{c_{22}}{R_2^{2\alpha_2+1}}\int_{R_2}^{R_3}\frac{\Psi^{3*}_{\upsilon,\alpha_2;22}(q_3R_3,q_3\rho)}{\Delta_{\upsilon,\alpha_2;12}(q_3R_2,q_3R_3)}\times g_3(\rho)\rho^{2\alpha_2+1}d\rho$$

та символ Кронекера $\delta_{j2}(\delta_{12}=0,\delta_{22}=1)$ [11].

Введемо до розгляду функції:

$$A_{\alpha_1;j}=\left(\alpha^1_{11}q_1+\beta^1_{11}\right)\Delta_{\alpha_1;2j}\left(q_2,R_1,R_2\right)-\left(\alpha^1_{21}q_1+\beta^1_{21}\right)\Delta_{\alpha_1;1j}\left(q_2,R_1,R_2\right),\ j=1,2;$$

$$B_{\upsilon,(\alpha);j}=\Delta_{q_3,\alpha_2;22}\left(q_3R_2,q_3R_3\right)\Delta_{\alpha_1;j1}\left(q_2,R_1,R_2\right)-$$

$$-\Delta_{q_3,\alpha_2;12}\left(q_3R_2,q_3R_3\right)\Delta_{\alpha_1;j2}\left(q_2,R_1,R_2\right);$$

$$\Theta_{\alpha_1;1}(r,q)=\left(\alpha^1_{11}q_1+\beta^1_{11}\right)\Psi^{1*}_{\alpha_1;22}\left(q_2,r\right)-\left(\alpha^1_{21}q_1+\beta^1_{21}\right)\Psi^{1*}_{\alpha_1;12}(q_2,r),\ (\alpha)=\left(\alpha_1,\alpha_2\right);$$

$$\Theta_{\upsilon,(\alpha);2}(r,q)=\Delta_{q_3,\alpha_2;12}\left(q_3R_2,q_3R_3\right)\Psi^{2*}_{\alpha_1;21}\left(q_2,r\right)-\Delta_{q_3,\alpha_2;22}\left(q_3R_2,q_3R_3\right)\Psi^{2*}_{\alpha_1;11}\left(q_2,r\right).$$

Припустимо, що виконана умова однозначної розв'язності крайової задачі (1)-(3): визначник алгебраїчної системи (13)

$$\Delta_{\upsilon,(\alpha)}(q)\equiv A_{\alpha_1;1}\Delta_{\upsilon,\alpha_2;22}\left(q_3R_2,q_3R_3\right)-A_{\alpha_1;2}\Delta_{\upsilon,\alpha_2;12}\left(q_3R_2,q_3R_3\right)=$$

$$=\left(\alpha^1_{11}q_1+\beta^1_{11}\right)B_{\upsilon,(\alpha);2}(q)-\left(\alpha^1_{21}q_1+\beta^1_{21}\right)B_{\upsilon,(\alpha);1}(q)\neq 0,\ (\alpha)=\left(\alpha_1,\alpha_2\right). \qquad (14)$$

Визначимо головні розв'язки крайової задачі (1)—(3):

1) породжені неоднорідністю умов спряження функції Гріна

$$R^1_{\upsilon,(\alpha);11}(r,q)=\frac{B_{\upsilon,(\alpha);2}}{\Delta_{\upsilon,(\alpha)}(q)}e^{q_1(r-R_1)},\quad R^1_{\upsilon,(\alpha);21}(r,q)=-\frac{B_{\upsilon,(\alpha);1}}{\Delta_{\upsilon,(\alpha)}(q)}e^{q_1(r-R_1)};$$

$$R^1_{\upsilon,(\alpha);12}(r,q)=-\frac{2q_2c_{21}}{R_1^{2\alpha_1+1}}\cdot\frac{1}{\Delta_{\upsilon,(\alpha)}(q)}\Delta_{\upsilon,\alpha_2;22}(q_3R_2,q_3R_3)e^{q_1(r-R_1)};$$

$$R^1_{\upsilon,(\alpha);22}(r,q)=\frac{2q_2c_{21}}{R_1^{2\alpha_1+1}}\frac{1}{\Delta_{\upsilon,(\alpha)}(q)}\Delta_{\upsilon,\alpha_2;12}(q_3R_2,q_3R_3)e^{q_1(r-R_1)};$$

$$R^2_{\upsilon,(\alpha);11}(r,q)=-\frac{\alpha^1_{21}q_1+\beta^1_{21}}{\Delta_{\upsilon,(\alpha)}(q)}\Theta_{\upsilon,(\alpha);2}(r,q),R^2_{\upsilon,(\alpha);21}(r,q)=\frac{\alpha^1_{11}q_1+\beta^1_{11}}{\Delta_{\upsilon,(\alpha)}(q)}\Theta_{\upsilon,(\alpha);2}(r,q);$$

$$R^2_{\upsilon,(\alpha);12}(r,q)=-\frac{\Delta_{\upsilon,\alpha_2;22}}{\Delta_{\upsilon,(\alpha)}(q)}\Theta_{\alpha_1;1}(r,q),R^2_{\upsilon,(\alpha);22}(r,q)=\frac{\Delta_{\upsilon,\alpha_2;12}}{\Delta_{\upsilon,(\alpha)}(q)}\Theta_{\alpha_1;1}(r,q);$$

$$R^3_{\upsilon,(\alpha);11}(r,q)=\frac{2q_2c_{12}}{R_2^{2\alpha_1+1}}\frac{\alpha^1_{21}q_1+\beta^1_{21}}{\Delta_{\upsilon,(\alpha)}(q)}\Psi^{3*}_{\upsilon,\alpha_2;22}(q_3R_3,q_3r);\tag{15}$$

$$R^3_{\upsilon,(\alpha);21}(r,q)=-\frac{2q_2c_{12}}{R_2^{2\alpha_1+1}}\frac{\alpha^1_{11}q_1+\beta^1_{11}}{\Delta_{\upsilon,(\alpha)}(q)}\Psi^{3*}_{\upsilon,\alpha_2;22}(q_3R_3,q_3r);$$

$$R^3_{\upsilon,(\alpha);12}(r,q)=-\frac{A_{\alpha_1;2}}{\Delta_{\upsilon,(\alpha)}(q)}\Psi^{3*}_{\upsilon,\alpha_2;22}(q_3R_3,q_3r);$$

$$R^3_{\upsilon,(\alpha);22}(r,q)=\frac{A_{\alpha_1;1}}{\Delta_{\upsilon,(\alpha)}(q)}\Psi^{3*}_{\upsilon,\alpha_2;22}(q_3R_3,q_3r);$$

2) породжені неоднорідністю системи функції впливу

$$H_{\upsilon,(\alpha);11}(r,\rho,q)=\frac{1}{q_1\Delta_{\upsilon,(\alpha)}(q)}\begin{cases}e^{q_1(r-R_1)}\left[B_{\upsilon,(\alpha);2}(q)\Phi^1_{11}\left(q_1R_1,q_1\rho\right)-\right.\\ e^{q_1(\rho-R_1)}\left[B_{\upsilon,(\alpha);2}(q)\Phi^1_{11}\left(q_1R_1,q_1r\right)-\right.\end{cases}$$

$$\begin{matrix}\left.-B_{\upsilon,(\alpha);1}(q)\Phi^1_{21}\left(q_1R_1,q_1\rho\right)\right],\ -\infty<r<\rho<R_1\\ \left.-B_{\upsilon,(\alpha);1}(q)\Phi^1_{21}\left(q_1R_1,q_1r\right)\right],\ -\infty<\rho<r<R_1\end{matrix};$$

$$H_{\upsilon,(\alpha);12}(r,\rho,q)=\frac{c_{21}}{R_1^{2\alpha_1+1}}\frac{1}{\Delta_{\upsilon,(\alpha)}(q)}e^{q_1(r-R_1)}\Theta_{\upsilon,(\alpha);2}(r,q);$$

$$H_{\upsilon,(\alpha);13}(r,\rho,q)=-\frac{c_{22}}{R_2^{2\alpha_2+1}}\frac{2q_2c_{21}}{\Delta_{\upsilon,(\alpha)}(q)}\frac{e^{q_1(r-R_1)}}{R_1^{2\alpha_1+1}}\Psi^{3*}_{\upsilon,\alpha_2;22}(q_3R_3,q_3\rho);$$

$$H_{\upsilon,(\alpha);21}(r,\rho,q)=\frac{c_{11}}{\Delta_{\upsilon,(\alpha)}(q)}\cdot e^{q_1(\rho-R_1)}\Theta_{\upsilon,(\alpha);2}(r,q);\tag{16}$$

$$H_{\upsilon,(\alpha);22}(r,\rho,q)=\frac{1}{2q_2\Delta_{\upsilon,(\alpha)}(q)}\begin{cases}\Theta_{\alpha_1;1}(r,q)\Theta_{\upsilon,(\alpha);2}(\rho,q), R_1<r<\rho<R_2\\ \Theta_{\alpha_1;1}(\rho,q)\Theta_{\upsilon,(\alpha);2}(r,q), R_1<\rho<r<R_2\end{cases};$$

$$H_{\upsilon,(\alpha);23}(r,\rho,q)=-\frac{c_{22}}{R_2^{2\alpha_2+1}}\frac{1}{\Delta_{\upsilon,(\alpha)}(q)}\Theta_{\alpha_1;1}(r,q)\Psi^{3*}_{\upsilon,\alpha_2;22}\left(q_3R_3,q_3\rho\right);$$

$$H_{\upsilon,(\alpha);31}(r,\rho,q)=-\frac{2q_2c_{12}\cdot c_{11}}{R_2^{2\alpha_1+1}\Delta_{\upsilon,(\alpha)}(q)}\cdot e^{q_1(\rho-R_1)}\Psi^{3*}_{\upsilon,\alpha_2;22}\left(q_3R_3,q_3r\right);$$

$$H_{\upsilon,(\alpha);32}(r,\rho,q)=-\frac{c_{12}}{R_2^{2\alpha_1+1}}\frac{1}{\Delta_{\upsilon,(\alpha)}(q)}\Theta_{\alpha_1;1}(\rho,q)\Psi^{3*}_{\upsilon,\alpha_2;22}\left(q_3R_3,q_3\rho\right);$$

$$H_{\upsilon,(\alpha);33}(r,\rho,q)=\frac{q_3^{2\alpha_2}}{\Delta_{\upsilon,(\alpha)}(q)}\begin{cases}\Psi^{3*}_{\upsilon,\alpha_2;22}\left(q_3R_3,q_3\rho\right)\left[A_{\alpha_1;1}\Psi^{2*}_{\upsilon,\alpha_2;22}\left(q_3R_2,q_3r\right)-\right.\\ \Psi^{3*}_{\upsilon,\alpha_2;22}(q_3R_3,q_3r)\left[A_{\alpha_1;1}\Psi^{2*}_{\upsilon,\alpha_2;22}(q_3R_2,q_3\rho)-\right.\end{cases}$$

$$\begin{matrix}\left.-A_{\alpha_1;2}\Psi^{2*}_{\upsilon,\alpha_2;12}\left(q_3R_2,q_3r\right)\right],\ \ R_2<r<\rho<R_3\\ \left.-A_{\alpha_1;2}\Psi^{2*}_{\upsilon,\alpha_2;12}\left(q_3R_2,q_3\rho\right)\right],\ \ R_2<\rho<r<R_3\end{matrix};$$

3) породжені крайовою умовою в точці $r=R_3$ функції Гріна

$$W_{\upsilon,(\alpha);31}(r,q)=-\frac{2q_2c_{21}}{R_1^{2\alpha_1+1}}\frac{c_{22}}{q_3^{2\alpha_2}R_2^{2\alpha_2+1}}\cdot\frac{1}{\Delta_{\upsilon,(\alpha)}(q)}e^{q_1(r-R_1)};$$

$$W_{\upsilon,(\alpha);32}(r,q)=-\frac{c_{22}}{q_3^{2\alpha_2}R_2^{2\alpha_2+1}}\cdot\frac{1}{\Delta_{\upsilon,(\alpha)}(q)}\Theta_{\alpha_1;1}(r,q); \qquad (17)$$

$$W_{\upsilon,(\alpha);33}(r,q)=\frac{1}{\Delta_{\upsilon,(\alpha)}(q)}\left[A_{\alpha_1;1}\Psi^{2*}_{\upsilon,\alpha_2;22}\left(q_3R_2,q_3r\right)-A_{\alpha_1;2}\Psi^{2*}_{\upsilon,\alpha_2;12}\left(q_3R_2,q_3r\right)\right].$$

У результаті однозначної розв'язності алгебраїчної системи (13) й підстановки отриманих значень A_j та B_k у формули (4) маємо єдиний розв'язок крайової задачі (1)-(3):

$$u_j(r)=\sum_{m,k=1}^{2}R^j_{\upsilon,(\alpha);mk}(r,q)\omega_{mk}+W_{\upsilon,(\alpha);3j}(r,q)g_R+$$

$$+\int_{-\infty}^{R_1}H_{\upsilon,(\alpha);j1}(r,\rho,q)g_1(\rho)d\rho+\int_{R_1}^{R_2}H_{\upsilon,(\alpha);j2}(r,\rho,q)g_2(\rho)\rho^{2\alpha_1-1}d\rho+ \qquad (18)$$

$$+\int_{R_2}^{R_3}H_{\upsilon,(\alpha);j3}(r,\rho,q)g_3(\rho)\rho^{2\alpha_2+1}d\rho,\quad j=\overline{1,3}.$$

Побудуємо тепер розв'язок крайової задачі (1)-(3) методом інтегрального перетворення, породженого на множині I_2 гібридним диференціальним оператором (ГДО)

$$M_{\upsilon,(\alpha)} = \theta(R_1 - r)\frac{d^2}{dr^2} + \theta(r - R_1)\theta(R_2 - r)B^*_{\alpha_1} + \theta(r - R_2)\theta(R_3 - r)B_{\upsilon,\alpha_2}. \quad (19)$$

Диференціальний оператор $M_{\upsilon,(\alpha)}$ самоспряжений і має одну особливу точку $r = -\infty$. Тому його спектр дійсний та неперервний [12]. Можна вважати, що спектральний параметр $\beta \in (0,\infty)$. Йому відповідає спектральна вектор-функція

$$V_{\upsilon,(\alpha)}(r,\beta) = V_{\upsilon,(\alpha);1}(r,\beta)\theta(R_1 - r) + \sum_{k=2}^{3}\theta(r - R_{k-1})\theta(R_k - r)V_{\upsilon,(\alpha);k}(r,\beta). \quad (20)$$

При цьому функції $V_{\upsilon,(\alpha);j}(r,\beta)$ є розв'язками відповідно диференціальних рівнянь Фур'є, Ейлера та Бесселя для звичайних функцій [13]

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + b_1^2\right)V_{\upsilon,(\alpha);1}(r,\beta) = 0, \quad r \in (-\infty, R_1),$$
$$\left(B^*_{\alpha_1} + b_2^2\right)V_{\upsilon,(\alpha);2}(r,\beta) = 0, \quad r \in (R_1, R_2), \quad (21)$$
$$\left(B_{\upsilon,\alpha_2} + b_3^2\right)V_{\upsilon,(\alpha);3}(r,\beta) = 0, \quad r \in (R_2, R_3)$$

з однорідними крайовими умовами та однорідними умовами спряження, де $b_j(\beta) = (\beta^2 + k_j^2)^{1/2}, \;\; k_j \ge 0, \;\; j = \overline{1,3}$.

Фундаментальну систему розв'язків для диференціального рівняння Фур'є $(\frac{d^2}{dr^2} + b_1^2)v = 0$ утворюють функції $v_1 = \cos b_1 r$ та $v_2 = \sin b_1 r$; фундаментальну систему розв'язків для диференціального рівняння Ейлера $(B^*_{\alpha_1} + b_2^2)v = 0$ утворюють функції $v_1 = r^{-\alpha_1}\cos(b_2 \ln r)$ та $v_2 = r^{-\alpha_1}\sin(b_2 \ln r)$ [8]; фундаментальну систему розв'язків для диференціального рівняння Бесселя $(B_{\upsilon,\alpha_2} + b_3^2)v = 0$ утворюють функції Бесселя $v_1 = J_{\upsilon,\alpha_2}(b_3 r)$ та $v_2 = N_{\upsilon,\alpha_2}(b_3 r)$ [9].

Якщо покласти

$$V_{\upsilon,(\alpha);1}(r,\beta) = A_1 \cos b_1 r + B_1 \sin b_1 r, r \in (-\infty, R_1),$$
$$V_{\upsilon,(\alpha);2}(r,\beta) = A_2 r^{-\alpha_1}\cos(b_2 \ln r) + B_2 r^{-\alpha_1}\sin(b_2 \ln r), r \in (R_1, R_2), \quad (22)$$
$$V_{\upsilon,(\alpha);3}(r,\beta) = A_3 J_{\upsilon,\alpha_2}(b_3 r) + B_3 N_{\upsilon,\alpha_2}(b_3 r), \quad r \in (R_2, R_3),$$

то умови спряження (3) при $\omega_{jk} = 0$ та крайова умова в точці $r = R_3$ при $g_R = 0$ дають однорідну лінійну алгебраїчну систему з п'яти рівнянь відносно шести невідомих:

$$v_{j1}^{11}(b_1 R_1)A_1 + v_{j1}^{12}(b_1 R_1)B_1 - Y^{11}_{\alpha_1;j2}(b_2, R_1)A_2 - Y^{12}_{\alpha_1;j2}(b_2, R_1)B_2 = 0, j = 1,2;$$

$$Y^{21}_{\alpha_1;j1}(b_2,R_2)A_2+Y^{22}_{\alpha_1;j1}(b_2,R_2)B_2-u^{21}_{\upsilon,\alpha_2;j2}(b_3R_2)A_3-u^{22}_{\upsilon,\alpha_2;j2}(b_3R_2)B_3=0; \quad (23)$$
$$u^{31}_{\upsilon,\alpha_2;22}(b_3R_3)A_3+u^{32}_{\upsilon,\alpha_2;22}(b_3R_3)B_3=0.$$

Алгебраїчна система (23) сумісна. Візьмемо $A_3=-A_0u^{32}_{\upsilon,\alpha_2;22}(b_3R_3)$, $B_3=A_0u^{31}_{\upsilon,\alpha_2;22}(b_3R_3)$, де A_0 підлягає визначенню.

Розглянемо стосовно A_2, B_2 алгебраїчну систему рівнянь

$$Y^{21}_{\alpha_1;j1}(b_2,R_2)A_2+Y^{22}_{\alpha_1;j1}(b_2,R_2)B_2=-A_0[u^{21}_{\upsilon,\alpha_2;j2}(b_3R_2)u^{32}_{\upsilon,\alpha_2;22}(b_3R_3)-$$
$$-u^{22}_{\upsilon,\alpha_2;j2}(b_3R_2)u^{31}_{\upsilon,\alpha_2;22}(b_3R_3)]\equiv-A_0\delta_{\upsilon,\alpha_2;j2}(\beta),\quad j=1,2. \quad (24)$$

Визначник алгебраїчної системи (24)

$$q_{\alpha_1}(\beta)\equiv Y^{21}_{\alpha_1;11}(b_2,R_2)Y^{22}_{\alpha_1;21}(b_2,R_2)-Y^{21}_{\alpha_1;21}(b_2,R_2)Y^{22}_{\alpha_1;11}(b_2,R_2)=b_2c_{12}R_2^{-(2\alpha_1+1)}\neq 0.$$

Отже, алгебраїчна система (24) має єдиний розв'язок [11]:

$$A_2=\frac{A_0}{q_{\alpha_1}(\beta)}[\delta_{\upsilon,\alpha_2;22}(b_3R_2,b_3R_3)Y^{22}_{\alpha_1;11}(b_2,R_2)-\delta_{\upsilon,\alpha_2;12}(b_3R_2,b_3R_3)Y^{22}_{\alpha_1;21}(b_2,R_2)],$$
$$B_2=\frac{-A_0}{q_{\alpha_1}(\beta)}[\delta_{\upsilon,\alpha_2;22}(b_3R_2,b_3R_3)Y^{21}_{\alpha_1;11}(b_2,R_2)-\delta_{\upsilon,\alpha_2;12}(b_3R_2,b_3R_3)Y^{21}_{\alpha_1;21}(b_2,R_2)]. \quad (25)$$

При визначених A_2, B_2 розглянемо алгебраїчну систему стосовно A_1 та B_1:

$$v^{11}_{j1}(b_1R_1)A_1+v^{12}_{j1}(b_1R_1)B_1=A_0[q_{\alpha_1}(\beta)]^{-1}b_{\upsilon,(\alpha);j}(\beta), \quad (26)$$

де $b_{\upsilon,(\alpha);j}(\beta)=\delta_{\upsilon,\alpha_2;22}\delta_{\alpha_1;j1}-\delta_{\upsilon,\alpha_2;12}\delta_{\alpha_1;j2}$, $j=1,2$;

$$\delta_{\alpha_1;jk}(b_2,R_1,R_2)=Y^{11}_{\alpha_1;j2}(b_2,R_1)Y^{22}_{\alpha_1;k1}(b_2,R_2)-Y^{12}_{\alpha_1;j2}(b_2,R_1)Y^{21}_{\alpha_1;k1}(b_2,R_2),\ j,k=1,2.$$

Визначник алгебраїчної системи (26)

$$v^{11}_{11}(b_1R_1)v^{12}_{21}(b_1R_1)-v^{11}_{21}(b_1R_1)v^{12}_{11}(b_1R_1)=c_{11}b_1\neq 0.$$

Отже, алгебраїчна система (26) має єдиний розв'язок:

$$A_1=\omega_{\upsilon,(\alpha);2}(\beta);B_1=-\omega_{\upsilon,(\alpha);1}(\beta),A_0=c_{11}b_1q_{\alpha_1}(\beta)\equiv\frac{c_{11}b_1c_{12}b_2}{R_2^{2\alpha_1+1}}, \quad (27)$$
$$\omega_{\upsilon,(\alpha);j}(\beta)=b_{\upsilon,(\alpha);1}(\beta)v^{1j}_{21}(b_1R_1)-b_{\upsilon,(\alpha);2}(\beta)v^{1j}_{11}(b_1R_1),\ j=1,2.$$

Підставивши визначені величини A_j, B_j згідно формул (25), (27) та вибору A_0 у рівності (22), маємо функції:

$$V_{\upsilon,(\alpha);1}(r,\beta)=\omega_{\upsilon,(\alpha);2}(\beta)\cos b_1r-\omega_{\upsilon,(\alpha);1}(\beta)\sin b_1r;$$
$$V_{\upsilon,(\alpha);2}(r,\beta)=c_{11}b_1[\delta_{\upsilon,\alpha_2;22}(b_3R_2,b_3R_3)\Psi^2_{\alpha_1;11}(b_2,r)-\delta_{\upsilon,\alpha_2;12}(b_3R_2,b_3R_3)\Psi^2_{\alpha_1;21}(b_2,r)]$$
$$\Psi^2_{\alpha_1;j1}(b_2,r)=Y^{22}_{\alpha_1;j1}(b_2,R_2)r^{-\alpha_1}\cos(b_2\ln r)-Y^{21}_{\alpha_1;j1}(b_2,R_2)r^{-\alpha_1}\sin(b_2\ln r), \quad (28)$$

$$V_{\upsilon,(\alpha);3}(r,\beta)=c_{11}b_1\frac{c_{12}b_2}{R_2^{2\alpha_1+1}}[u^{31}_{\upsilon,\alpha_2;22}(b_3R_3)N_{\upsilon,\alpha_2}(b_3r)-u^{32}_{\upsilon,\alpha_2;22}(b_3R_3)J_{\upsilon,\alpha_2}(b_3r)]\,.$$

Цим вектор-функція $V_{\upsilon,(\alpha)}(r,\beta)$ повністю визначена.

Введемо до розгляду величини

$$\sigma_1=1\,,\ \sigma_2=\frac{c_{21}}{c_{11}}\frac{1}{R_1^{2\alpha_1+1}}\,,\ \sigma_3=\frac{c_{21}c_{22}}{c_{11}c_{12}}\frac{R_2^{2\alpha_1+1}}{R_1^{2\alpha_1+1}}\frac{1}{R_2^{2\alpha_2+1}}\,,$$

вагову функцію

$$\sigma(r)=\theta(R_1-r)\sigma_1+\theta(r-R_1)\theta(R_2-r)\sigma_2r^{2\alpha_1-1}+\theta(r-R_2)\theta(R_3-r)\sigma_3r^{2\alpha_2+1}$$

та спектральну щільність (густину)

$$\Omega_{\upsilon,(\alpha)}(\beta)=\beta[b_1(\beta)]^{-1}\left([\omega_{\upsilon,(\alpha);1}(\beta)]^2+[\omega_{\upsilon,(\alpha);2}(\beta)]^2\right)^{-1}.$$

Наявність спектральної вектор-функції $V_{\upsilon,(\alpha)}(r,\beta)$, вагової функції $\sigma(r)$ та спектральної щільності $\Omega_{\upsilon,(\alpha)}(\beta)$ дозволяють визначити пряме $H_{\upsilon,(\alpha)}$ та обернене $H^{-1}_{\upsilon,(\alpha)}$ гібридне інтегральне перетворення (ГІП), породжене на множині I_2 ГДО $M_{\upsilon,(\alpha)}$ [13]:

$$H_{\upsilon,(\alpha)}\left[g(r)\right]=\int\limits_{-\infty}^{R_3}g(r)V_{\upsilon,(\alpha)}(r,\beta)\sigma(r)dr\equiv\tilde g(\beta),\tag{29}$$

$$H^{-1}_{\upsilon,(\alpha)}\left[\tilde g(\beta)\right]=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\infty}\tilde g(\beta)V_{\upsilon,(\alpha)}(r,\beta)\Omega_{\upsilon,(\alpha)}(\beta)d\beta\equiv g(r),\tag{30}$$

де $g(r)$ — вектор-функція із області визначення ГДО.

При цьому справедлива основна тотожність ГІП ГДО $M_{\upsilon,(\alpha)}$:

$$H_{\upsilon,(\alpha)}[M_{\upsilon,(\alpha)}[g(r)]]=-\beta^2\tilde g(\beta)-\sum_{j=1}^{3}k_j^2\tilde g_j(\beta)+\frac{\sigma_3R_3^{2\alpha_2+1}}{\alpha_{22}^3}V_{\upsilon,(\alpha);3}(R_3,\beta)g_R+$$
$$+\sum_{k=1}^{2}h_k[Z^k_{\upsilon,(\alpha);12}(\beta)\omega_{2k}-Z^k_{\upsilon,(\alpha);22}(\beta)\omega_{1k}],\tag{31}$$

де

$$\tilde g_1(\beta)=\int\limits_{-\infty}^{R_1}g_1(r)V_{\upsilon,(\alpha);1}(r,\beta)\sigma_1dr,\ \tilde g_2(\beta)=\int\limits_{R_1}^{R_2}g_2(r)V_{\upsilon,(\alpha);2}(r,\beta)\sigma_2r^{2\alpha_1-1}dr\,,$$

$$\tilde g_3(\beta)=\int\limits_{R_2}^{R_3}g_3(r)V_{\upsilon,(\alpha);3}(r,\beta)\sigma_3r^{2\alpha_2+1}dr\,,\ h_1=\sigma_1c_{11}^{-1},\ \ h_2=\sigma_2R_2^{2\alpha_1+1}c_{12}^{-1}\,;$$

$$Z^k_{\upsilon,(\alpha);j2}(\beta)=\left(\alpha^k_{j2}\,{}^{d}\!/_{dr}+\beta^k_{j2}\right)V_{\upsilon,(\alpha);k+1}(r,\beta)\Big|_{r=R_k};\ \ j,k=1,2\,.$$

Згідно з роботою [14] запишемо систему (1) в матричній формі

$$\begin{bmatrix} \left(d^2/dr^2 - q_1^2\right)u_1(r) \\ \left(B^*_{\alpha_1} - q_2^2\right)u_2(r) \\ \left(B_{\upsilon,\alpha_2} - q_3^2\right)u_3(r) \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} g_1(r) \\ g_2(r) \\ g_3(r) \end{bmatrix}. \qquad (32)$$

Інтегральний оператор $H_{\upsilon,(\alpha)}$, який діє за правилом (29), зобразимо у формі операторної матриці-рядка

$$H_{\upsilon,(\alpha)}[\cdots] = \Bigg[\int_{-\infty}^{R_1} \cdots V_{\upsilon,(\alpha);1}(r,\beta)\sigma_1 dr \int_{R_1}^{R_2} \cdots V_{\upsilon,(\alpha);2}(r,\beta) \times$$
$$\times \sigma_2 r^{2\alpha_1 - 1} dr \int_{R_2}^{R_3} \cdots V_{\upsilon,(\alpha);3}(r,\beta)\sigma_3 r^{2\alpha_2+1} dr \Bigg]. \qquad (33)$$

Застосуємо операторну матрицю-рядок (33) до системи (32) за правилом множення матриць. Внаслідок основної тотожності (31) одержуємо алгебраїчне рівняння

$$\sum_{j=1}^{3}[\tilde{u}_j(\beta) + q_j^2 + k_j^2 + \beta^2] = \tilde{g}(\beta) + \sigma_3 R_3^{2\alpha_2+1}(\alpha_{22}^3)^{-1} V_{\upsilon,(\alpha);3}(R_3,\beta) g_R +$$
$$+\sum_{k=1}^{2} h_k [Z^k_{\upsilon,(\alpha);12}(\beta)\omega_{2k} - Z^k_{\upsilon,(\alpha);22}(\beta)\omega_{1k}]. \qquad (34)$$

Припустимо, не зменшуючи загальності, що $\max\{q_1^2; q_2^2; q_3^2\} = = q_3^2 > 0$. Покладемо $k_3^2 = 0$, $k_1^2 = q_3^2 - q_1^2 \geq 0$, $k_2^2 = q_3^2 - q_2^2 \geq 0$. Алгебраїчне рівняння (34) набуває вигляду

$$(q_3^2 + \beta^2)\tilde{u}(\beta) = \tilde{g}(\beta) + \sum_{k=1}^{2} h_k \left[Z^k_{\upsilon,(\alpha);12}(\beta)\omega_{2k} - Z^k_{\upsilon,(\alpha);22}(\beta)\omega_{1k} \right] +$$
$$+\sigma_3(\alpha_{22}^3)^{-1} V_{\upsilon,(\alpha);3}(R_3,\beta) R_3^{2\alpha_2+1} g_R.$$

Звідси одержуємо, що функція

$$\tilde{u}(\beta) = \frac{\tilde{g}(\beta)}{\beta^2 + q_3^2} + \sum_{k=1}^{2} h_k \left[\frac{Z^k_{\upsilon,(\alpha);12}(\beta)}{\beta^2 + q_3^2}\omega_{2k} - \frac{Z^k_{\upsilon,(\alpha);22}(\beta)}{\beta^2 + q_3^2}\omega_{1k} \right] +$$
$$+\frac{V_{\upsilon,(\alpha);3}(R_3,\beta)}{\alpha_{22}^3(\beta^2 + q_3^2)}\sigma_3 R_3^{2\alpha_2+1} g_R. \qquad (35)$$

Інтегральний оператор $H^{-1}_{\upsilon,(\alpha)}$ згідно правила (30) як обернений до (33) зобразимо у вигляді операторної матриці-стовпця

$$H_{\upsilon,(\alpha)}^{-1}[\cdots]=\begin{bmatrix}\dfrac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty \cdots V_{\upsilon,(\alpha);1}(r,\beta)\Omega_{\upsilon,(\alpha)}(\beta)d\beta \\ \dfrac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty \cdots V_{\upsilon,(\alpha);2}(r,\beta)\Omega_{\upsilon,(\alpha)}(\beta)d\beta \\ \dfrac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty \cdots V_{\upsilon,(\alpha);3}(r,\beta)\Omega_{\upsilon,(\alpha)}(\beta)d\beta\end{bmatrix}. \qquad (36)$$

Застосувавши операторну матрицю-стовпець (36) за правилом множення матриць до матриці-елемента $[\tilde{u}(\beta)]$, де функція $\tilde{u}(\beta)$ визначена формулою (35), маємо єдиний розв'язок крайової задачі (1)-(3):

$$u_j(r)=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty \tilde{u}(\beta)V_{\upsilon,(\alpha);j}(r,\beta)\Omega_{\upsilon,(\alpha)}(\beta)d\beta=$$

$$=\int\limits_{-\infty}^{R_1}\left(\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty \frac{V_{\upsilon,(\alpha);j}(r,\beta)V_{\upsilon,(\alpha);1}(\rho,\beta)}{\beta^2+q_3^2}\Omega_{\upsilon,(\alpha)}(\beta)d\beta\right)g_1(\rho)\sigma_1 d\rho+$$

$$+\int\limits_{R_1}^{R_2}\left(\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty V_{\upsilon,(\alpha);j}(r,\beta)V_{\upsilon,(\alpha);2}(\rho,\beta)\frac{\Omega_{\upsilon,(\alpha)}(\beta)}{\beta^2+q_3^2}d\beta\right)g_2(\rho)\sigma_2\rho^{2\alpha_1-1}d\rho+$$

$$+\int\limits_{R_2}^{R_3}\left(\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty V_{\upsilon,(\alpha);j}(r,\beta)V_{\upsilon,(\alpha);3}(\rho,\beta)\frac{\Omega_{\upsilon,(\alpha)}(\beta)}{\beta^2+q_3^2}d\beta\right)g_3(\rho)\sigma_3\rho^{2\alpha_2+1}d\rho+$$

$$+\sum_{k=1}^{2}h_k\left[\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty \frac{Z_{\upsilon,(\alpha);12}^{k}(\beta)}{\beta^2+q_3^2}V_{\upsilon,(\alpha);j}(r,\beta)\Omega_{\upsilon,(\alpha)}(\beta)d\beta\cdot\omega_{2k}-\right. \qquad (37)$$

$$\left.-\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty \frac{Z_{\upsilon,(\alpha);22}^{k}(\beta)}{\beta^2+q_3^2}V_{\upsilon,(\alpha);j}(r,\beta)\Omega_{\upsilon,(\alpha)}(\beta)d\beta\cdot\omega_{1k}\right]+$$

$$+\left(\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty V_{\upsilon,(\alpha);j}(r,\beta)V_{\upsilon,(\alpha);3}(R_3,\beta)\frac{\Omega_{\upsilon,(\alpha)}(\beta)d\beta}{\alpha_{22}^3(\beta^2+q_3^2)}\right)\sigma_3 R_3^{2\alpha_2+1}g_R;\quad j=\overline{1,3}.$$

Порівнюючи розв'язки (18) та (37) крайової задачі (1)—(3) в наслідок теореми єдиності, отримуємо формули обчислення поліпараметричних невласних інтегралів:

$$\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty V_{\upsilon,(\alpha);j}(r,\beta)V_{\upsilon,(\alpha);k}(\rho,\beta)\frac{\Omega_{\upsilon,(\alpha)}(\beta)}{\beta^2+q_3^2}d\beta=\frac{1}{\sigma_k}H_{\upsilon,(\alpha);jk}(r,\rho,q);\, j,k=\overline{1,3};\ (38)$$

$$\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty Z_{\upsilon,(\alpha);12}^{k}(\beta)V_{\upsilon,(\alpha);j}(r,\beta)\frac{\Omega_{\upsilon,(\alpha)}(\beta)}{\beta^2+q_3^2}d\beta=R_{\upsilon,(\alpha);2k}^{j}(r,q)h_k^{-1};\, k=1,2,\ j=\overline{1,3};\ (39)$$

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty Z^k_{\upsilon,(\alpha);22}(\beta)V_{\upsilon,(\alpha);j}(r,\beta)\frac{\Omega_{\upsilon,(\alpha)}(\beta)}{\beta^2+q_3^2}d\beta=-h_k^{-1}R^j_{\upsilon,(\alpha);1k}(r,q);k=1,2,\ j=\overline{1,3};\ (40)$$

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty V_{\upsilon,(\alpha);3}(R_3,\beta)V_{\upsilon,(\alpha);j}(r,\beta)\frac{\Omega_{\upsilon,(\alpha)}(\beta)}{\alpha_{22}^3(\beta^2+q_3^2)}d\beta=\frac{1}{\sigma_3R_3^{2\alpha_2+1}}W_{\upsilon,(\alpha);3j}(r,q);\ j=\overline{1,3}.\ (41)$$

Підсумком виконаних у статті досліджень є твердження.

Теорема. Якщо функція $f(r)=\left\{g_1''(r);B^*_{\alpha_1}\left[g_2(r)\right];B_{\upsilon,\alpha_2}\left[g_3(r)\right]\right\}$ неперервна на множині I_2, а функції $g_j(r)$ задовольняють крайові умови

$$\lim_{r\to-\infty}[g_1'(r)V_{\upsilon,(\alpha);1}(r,\beta)-g_1(r)V'_{\upsilon,(\alpha);1}(r,\beta)]=0\ ,$$

$$\left(\alpha_{22}^3\,{}^{d}\!/_{dr}+\beta_{22}^3\right)g_3\Big|_{r=R_3}=g_R$$

та умови спряження (3) і виконується умова (14) однозначної розв'язності крайової задачі (1)—(3), то справджуються формули (38)—(41) обчислення поліпараметричних невласних інтегралів за власними елементами ГДО $M_{\upsilon,(\alpha)}$, визначеного рівністю (19).

Зауваження 1. Аналіз одержаних формул (38)-(41) в залежності від параметрів q_1, q_2, q_3, α_{22}^3, β_{22}^3, α_{jm}^k, β_{jm}^k, які беруть участь у формулюванні задачі (1)—(3), здійснюється безпосередньо.

Зауваження 2. Якщо $\max\{q_1^2;q_2^2;q_3^2\}=q_2^2>0$, то покладаємо $k_1^2=q_2^2-q_1^2\geq 0$, $k_2^2=0$, $k_3^2=q_2^2-q_3^2\geq 0$ і замість виразу $(\beta^2+q_3^2)$ буде вираз $(\beta^2+q_2^2)$.

Зауваження 3. Якщо $\max\left\{q_1^2;q_2^2;q_3^2\right\}=q_1^2>0$, то покладаємо $k_1^2=0$, $k_2^2=q_1^2-q_2^2\geq 0$, $k_3^2=q_1^2-q_3^2\geq 0$ і вираз $(\beta^2+q_3^2)$ заміниться на вираз $(\beta^2+q_1^2)$.

Висновки. Обчислено нові класи невласних поліпараметричних інтегралів за власними елементами гібридного диференціального оператора Фур'є – Ейлера – Бесселя на обмеженій справа декартовій півосі.

Список використаних джерел:

1. Подстригач Я. С. Термоупругость тел неоднородной структуры / Я. С. Подстригач, В. А. Ломакин, Ю. М. Коляно. — М. : Наука, 1984. — 368 с.
2. Коляно Ю. М. Методы теплопроводности и термоупругости неоднородного тела / Ю. М. Коляно. — К. : Наук. думка, 1992. — 280 с.

3. Ленюк М. П. Температурні поля в плоских кусково-однорідних ортотропних областях / М. П. Ленюк. — К. : Ін-т математики НАН України, 1997. — 188 с.
4. Конет І. М. Стаціонарні та нестаціонарні температурні поля в ортотропних сферичних областях / І. М. Конет. — К. : Ін-т математики НАН України, 1998. — 209 с.
5. Конет І. М. Температурні поля в кусково-однорідних циліндричних областях / І. М. Конет, М. П. Ленюк. — Чернівці : Прут, 2004. – 276 с.
6. Конет И. М. Вычисление несобственных интегралов по собственным элементам гибридного дифференциального оператора Бесселя-Фурье-Эйлера на полярной оси / И. М. Конет, М. П. Ленюк // Materialy IX Miedzynarodnowej naukowi-praktycznej konferencij «Naukowy potencial swiata — 2008». — Przemysl : Nauka i studia, 2008. — Tym 9. — S. 69—77.
7. Конет И. М. Вычисление несобственных интегралов по собственным элементам гибридного дифференциального оператора Бесселя-Эйлера-Фурье на полярной оси / И. М. Конет, М. П. Ленюк // Materialy V Miedzynarodnowej naukowi-praktycznej konferencij «Dynamika naukowych badan — 2009». — Przemysl : Nauka i studia, 2009. — Vol. 9. — S. 7—16.
8. Степанов В. В. Курс дифференциальных уравнений / В. В. Степанов. — М. : Физматгиз, 1959. — 468 с.
9. Ленюк М. П. Исследование основных краевых задач для диссипативного волнового уравнения Бесселя / М. П. Ленюк. — К., 1983. – 62 с. — (Препр. / АН УССР. Ин-т математики; 83. 3).
10. Шилов Г. Е. Математический анализ. Второй специальный курс / Г. Е. Шилов. — М. : Наука, 1965. — 328 с.
11. Курош А. Г. Курс высшей алгебры / А. Г. Курош. — М. : Наука, 1971. — 432 с.
12. Ленюк М. П. Гібридні інтегральні перетворення (Фур'є, Бесселя, Лежандра) / М. П. Ленюк, М. І. Шинкарик. — Тернопіль : Економ. думка, 2004. — 368 с.
13. Ленюк М. П. Гібридні інтегральні перетворення типу (Фур'є, Конторовича-Лєбєдєва) — Лежандра / М. П. Ленюк, М. Л. Янчишин. — Чернівці : Прут, 2002. — 76 с.
14. Ленюк М. П. Обчислення невласних інтегралів методом гібридних інтегральних перетворень (Фур'є, Бесселя, Лежандра) / М. П. Ленюк. — Чернівці : Прут, 2005. — 368 с.

By the method of comparison of the decisions got for the separate system from the modified differential evening by the Four'e, Eylera and Besselya method of functions Coshi and method of the proper hybrid integral transformation, family of unown poliparametrichnih integrals after the own elements of hybrid differential operator Four'e – Eylera – Besselya is calculated on limited matter of cartesian semiaxis.

Key words: *not own integrals, functions Cauchy, the main decisions, hybrid integrated transformation, the basic identity, condition of unequivocal resolvability.*

Отримано 21.09.2010