УДК 519.21+62

Я. М. Чабанюк*, д-р фіз.-мат. наук,
У. Т. Хімка*, асистент,
М. В. Раєвський,** канд. техн. наук
*Національний університет «Львівська політехніка», м. Львів,
**Черкаський державний технологічний університет, м. Черкаси

ПРОЦЕДУРА СТОХАСТИЧНОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ В СХЕМІ ДИФУЗІЙНОЇ АПРОКСИМАЦІЇ З МАРКОВСЬКИМИ ПЕРЕКЛЮЧЕННЯМИ

Одержано достатні умови збіжності процедури стохастичної оптимізації Кіфера-Вольфовиця в схемі дифузійної апроксимації з марковськими переключеннями методом малого параметру та розв'язком проблеми сингулярного збурення для генератора процедури.

Ключові слова: *стохастична оптимізація, марковський процес, розв'язок проблеми сингулярного збурення.*

Вступ. Для встановлення достатніх умов стійкості динамічної системи з марковським збуренням в умовах дифузійної апроксимації в роботі В.С. Королюка [1] використано властивості асимптотичних представлень породжуючого оператора системи. Розв'язок проблеми сингулярного збурення для асимптотичних представлень генератора процедури стохастичної оптимізації дозволяє встановити умови збіжності процедури в схемі дифузійної апроксимації [2] в умовах експоненційної стійкості усередненої динамічної системи.

Постановка задачі. Нехай $C(u,x)$, $u \in R^d$, — функція регресії залежить від впливу зовнішнього середовища, яке описується рівномірно ергодичним марковським процесом $x(t), t \geq 0$, у вимірному фазовому просторі станів $(X, \boldsymbol{X})$ [3]. Для генератора

$$Q\varphi(x) = q(x)\int_X P(x,dy)\left[\varphi(y)-\varphi(x)\right]$$

марковського процесу $x(t), t \geq 0,$ що визначений на банаховому просторі $\boldsymbol{B}(X)$ дійснозначних неперервних функцій $\varphi(x), x \in X$, з супремум нормою $\|\varphi(x)\| = \sup_{x\in X}|\varphi(x)|$, де $P(x,B)$, $x \in X$, $B \in \boldsymbol{X}$, — стохастичне ядро, $q(x) = g^{-1}(x)$, $g(x) = E\theta_x$, θ_x — час перебування марковського процесу в стані x, будується потенціал $R_0 = \Pi - (\Pi + Q)^{-1}$, де

$\Pi\varphi(x) = \int\limits_X \pi(dx)\varphi(x)$ — проектор на підпростір нулів оператора Q: $N_Q = \{\varphi : Q\varphi = 0\}$, а $\pi(B), B \in \boldsymbol{X}$, — стаціонарний розподіл марковського процесу.

Неперервна процедура Кіфера-Вольфовиця [4] пошуку точки $u_0 \in R^d$ максимуму функції регресії $C(u,x)$ в схемі дифузійної апроксимації задається стохастичним диференціальним рівнянням:

$$du^\varepsilon(t) = a(t)\left[\nabla_b C\left(u^\varepsilon(t), x\left(t/\varepsilon^2\right)\right) + \varepsilon^{-1} C_0\left(u^\varepsilon(t), x\left(t/\varepsilon^2\right)\right)\right]dt \quad (1)$$

де

$$\nabla_b C(u,\cdot) = \left\{\left(C\left(u_i^+,\cdot\right) - C\left(u_i^-,\cdot\right)\right)/2b(t), i = \overline{1,d}\right\},\ \ u_i^\pm = u_i \pm b(t)e_i,$$

$$e_i = \{0,...,1,0,...0\},\ C_0(u,x) = \left\{C_{0i}(u,x); i = \overline{1,d}\right\},\ \ u \in R^d,\ x \in X.$$

Поряд з системою (1) розглядаємо параметричну систему

$$du_x(t) = C_b^{\varepsilon,\nabla}\left(u_x, x\right)dt,\ \ x \in X,$$

де $C_b^{\varepsilon,\nabla}\left(u,x\right) = \nabla_b C\left(u,x\right) + \varepsilon^{-1} C_0\left(u,x\right)$, з породжуючим оператором

$$\boldsymbol{C}_b^{\varepsilon,\nabla}(x)\varphi\left(u,x\right) = \left[\nabla_b \boldsymbol{C}(x) + \varepsilon^{-1}\boldsymbol{C}_0(x)\right]\varphi(u,x),$$

де $\nabla_b \boldsymbol{C}(x)\varphi\left(u,x\right) = \nabla_b C\left(u,x\right)\varphi'\left(u,x\right)$, $\boldsymbol{C}_0(x)\varphi\left(u,x\right) = C_0(x)\varphi'\left(u,x\right)$.

Процедура (1) розглядається в умовах балансу на збурення $C_0(u,x)$:

$$\int\limits_X \pi(dx) C_0(u,x) = 0. \quad (2)$$

Для усередненої функції регресії $C(u) = \Pi C(u,x) = \int\limits_X \pi(dx) C(u,x)$ розглянемо усереднену динамічну систему

$$\frac{du(t)}{dt} = grad\, C\left(u(t)\right)^T,\ \ grad\, C(u) = \left\{\frac{\partial C(u)}{\partial u_i}, i = 1,...,d\right\}. \quad (3)$$

Припустимо, що існує єдина точка максимуму функції регресії.

Основний результат.

Теорема. Нехай усереднена функція регресії $C(u)$ має неперервні часткові похідні по $u \in R^d$, що задовольняють глобальну умову Ліпшиця

$$B\!: \left|\nabla_b C(u) - gradC(u)\right| < kb(t),\ k > 0;$$

вектор-функція $C_0(u,x)$ має перші дві похідні, а вектор-функція $\nabla_b C(u,x)$ має перші похідні по $u \in R^d$, обмежені рівномірно по $x \in X$, функція Ляпунова $V(u)$ для усередненої системи (3), що має обмежені похідні до третього порядку включно, задовольняє умовам:

C1: експоненційної стійкості динамічної систем (3)

$$grad\, C(u)V'(u) < -cV(u),\ c > 0;$$

C2: $\left|V'(u)\right| \le c_1(1+V(u)),\ c_1 > 0;$

C3: $\left|C_0(u,x)R_0\left[C_0(u,x)V'(u)\right]'\right| \le c_2\left(1+V(u)\right), c_2 > 0;$

C4: $\left|\nabla_b C(u,x)R_0\left[C_0(u,x)V'(u)\right]'\right| \le c_3\left(1+V(u)\right),\ c_3 > 0;$

C5: $\left|C_0(u,x)R_0\left[\nabla_b \tilde{C}(u,x)V'(u)\right]'\right| \le c_4\left(1+V(u)\right),\ c_4 > 0;$

C6: $\left|\nabla_b C(u,x)R_0\left[\nabla_b \tilde{C}(u,x)V'\left(u\right)\right]'\right| \le c_5\left(1+V(u)\right),\ c_5 > 0;$

C7: $\left|C_0(u,x)R_0\left[C_0(u,x)R_0\left[C_0(u,x)V'(u)\right]'\right]'\right| \le c_6\left(1+V(u)\right),\ c_6 > 0;$

C8: $\left|\nabla_b C(u,x)R_0\left[C_0(u,x)R_0\left[C_0(u,x)V'(u)\right]'\right]'\right| \le c_6\left(1+V(u)\right),\ c_6 > 0,$

де $\nabla_b \tilde{C}(u,x) = \nabla_b C(u,x) - \nabla_b C(u)$.

Крім того виконується умова балансу (2), а функції $a(t) > 0$, $b(t) > 0$ такі, що виконуються умови

$$\int_0^\infty a(t)dt = \infty,\ \int_0^\infty a^2(t)dt < \infty,\ \int_0^\infty a(t)b(t)dt < \infty.$$

Тоді, для кожного початкового значення $u^\varepsilon(0) = u \in R^d$, розв’язок рівняння (1) при достатньо малих $\varepsilon \le \varepsilon_0$ збігаються із ймовірністю 1 до точки екстремуму u_0, що визначається однозначно рівнянням $\mathrm{grad} C(u_0) = 0$.

Асимптотичні представлення генератора процедури (1). Для встановлення умов збіжності процедури стохастичної оптимізації побудуємо генератор процедури стохастичної оптимізації та розглянемо його асимптотичне представлення.

Розглянемо двокомпонентний марковський процес

$$u^{\varepsilon}(t),\ x_t^{\varepsilon} := x(t/\varepsilon^2),\ t \geq 0. \tag{4}$$

Лема 1. Генератор двокомпонентного марковського процесу (4) на тест-функціях $\varphi(u,x) \in C^{2,0}(R^d, X)$ має аналітичне представлення:

$$\boldsymbol{L}_t^{\varepsilon}\varphi(u,x) = \varepsilon^{-2}Q\varphi(u,x) + \varepsilon^{-1}a(t)\boldsymbol{C}_0(x)\varphi(u,x) + a(t)\nabla_b\boldsymbol{C}(x)\varphi(u,x).$$

Доведення. Розглянемо умовне математичне сподівання:

$$E\left[\varphi\left(u^{\varepsilon}(t+\Delta), x_{t+\Delta}^{\varepsilon}\right)\Big| u^{\varepsilon}(t) = u, x_t^{\varepsilon} = x\right] = E_{u,x}\varphi\left(u^{\varepsilon}(t+\Delta), x_{t+\Delta}^{\varepsilon}\right) =$$

$$= E_{u,x}\varphi\left(u + \int_t^{t+\Delta} a(s)C_b^{\varepsilon,\nabla}\left(u^{\varepsilon}(s), x\left(s/\varepsilon^2\right)\right)ds, x\right) I\left(\theta_x > \varepsilon^{-2}\Delta\right) + \tag{5}$$

$$+E_{u,x}\varphi\left(u + \int_t^{t+\Delta} a(s)C_b^{\varepsilon,\nabla}\left(u^{\varepsilon}(s), x\left(s/\varepsilon^2\right)\right)ds, x_{t+\Delta}^{\varepsilon}\right) I\left(\theta_x \leq \varepsilon^{-2}\Delta\right) + o(\Delta).$$

Часу перебування θ_x в стані x має показниковий розподіл, тобто мають місце розклади:

$$\begin{aligned} I\left(\theta_x > \varepsilon^{-2}\Delta\right) &= e^{-\varepsilon^{-2}q(x)\Delta} = 1 - \varepsilon^{-2}q(x)\Delta + o(\Delta), \\ I\left(\theta_x \leq \varepsilon^{-2}\Delta\right) &= 1 - e^{-\varepsilon^{-2}q(x)\Delta} = \varepsilon^{-2}q(x)\Delta + o(\Delta), \end{aligned} \tag{6}$$

де $q(x)$ — інтенсивність.

Проведемо перетворення для тест-функцій $\varphi(u,x)$:

$$\begin{aligned} &\varphi(u + \int_t^{t+\Delta} a(s)C_b^{\varepsilon,\nabla}\left(u^{\varepsilon}(s), x\left(s/\varepsilon^2\right)\right)ds, x) = \\ &= \varphi(u,x) + \varphi_u'(u,x)\int_t^{t+\Delta} a(s)C_b^{\varepsilon,\nabla}\left(u^{\varepsilon}(s), x\left(s/\varepsilon^2\right)\right)ds = \\ &= \varphi(u,x) + C_b^{\varepsilon,\nabla}(u,x)\varphi_u'(u,x)a(t)\Delta + o(\Delta). \end{aligned} \tag{7}$$

Враховуючи (6) та (7) обчислимо умовне математичне сподівання (5):

$$\begin{aligned} &E_{u,x}\left[\varphi(u,x) + a(t)C_b^{\varepsilon,\nabla}(u,x)\varphi_u'(u,x)\Delta\right]\left[1 - \varepsilon^{-2}q(x)\Delta + o(\Delta)\right] + \\ &+E_{u,x}\left[\varphi\left(u, x_{t+\Delta}^{\varepsilon}\right) + a(t)C_b^{\varepsilon,\nabla}\left(u,x\right)\varphi_u'\left(u, x_{t+\Delta}^{\varepsilon}\right)\Delta\right]\left[\varepsilon^{-2}q(x)\Delta + \right. \\ &\left. +o(\Delta)\right] = \varphi(u,x) + a(t)C_b^{\varepsilon,\nabla}(u,x)\varphi_u'(u,x)\Delta - \\ &-\varepsilon^{-2}q(x)\Delta\left[E_{u,x}\varphi(u,x) + o(\Delta)\right] + \varepsilon^{-2}q(x)\Delta\left[E_{u,x}\varphi\left(u, x_{t+\Delta}^{\varepsilon}\right) + \right. \end{aligned} \tag{8}$$

$$+o(\Delta)\big] = \varphi(u,x) + a(t)C_b^{\varepsilon,\nabla}(u,x)\varphi'_u(u,x)\Delta +$$
$$+\varepsilon^{-2}q(x)\Delta\int_X P\big(x,dy\big)\big[\varphi(u,y) - \varphi(u,x)\big] + o(\Delta).$$

Враховуючи (8) та означення генератора двокомпонентного марковського процесу (4), отримаємо:

$$\boldsymbol{L}_t^{\varepsilon}\varphi(u,x) = \lim_{\Delta\to 0}\frac{1}{\Delta}\Big(E\Big(\varphi\Big(u^{\varepsilon}\big(t+\Delta\big), x_{t+\Delta}^{\varepsilon}\Big) \mid u^{\varepsilon}(t) = u, x_t^{\varepsilon} = x\Big) - \varphi(u,x)\Big) =$$
$$= \varepsilon^{-2}Q\varphi(u,x) + \varepsilon^{-1}a(t)\boldsymbol{C}_0(x)\varphi\big(u,x\big) + a(t)\nabla_b\boldsymbol{C}(x)\varphi(u,x).$$

Лему доведено.

Використаємо збурену функцію Ляпунова у вигляді:

$$V^{\varepsilon}(u,x) = V(u) + \varepsilon a(t)V_1(u,x) + \varepsilon^2 a(t)V_2(u,x)\,,$$

де $V(u)\in C^3(R^d)$ — функція Ляпунова усередненої системи (3).

Лема 2. Генератор $\boldsymbol{L}_t^{\varepsilon}$ на збуреній функції Ляпунова $V^{\varepsilon}(u,x)$ допускає асимптотичний розклад:

$$\boldsymbol{L}_t^{\varepsilon}V^{\varepsilon}(u,x) = a(t)\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{t}}V(u) + \varepsilon a^2(t)\theta_t(x)V(u),$$

де

$$\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{t}}V(u) = \big[a(t)\Pi\boldsymbol{C}_0(x)R_0\boldsymbol{C}_0(x) + \Pi\nabla_b\boldsymbol{C}(x)\big]V(u),$$
$$\theta_t(x)V(u) = \boldsymbol{C}_0(x)R_0\tilde{\boldsymbol{L}}_{\boldsymbol{t}}(x)V(u) + \nabla_b\boldsymbol{C}(x)R_0\boldsymbol{C}_0(x)V(u) +$$
$$+\varepsilon\nabla_b\boldsymbol{C}_0(x)R_0\tilde{\boldsymbol{L}}_{\boldsymbol{t}}(x)V(u),$$
$$\tilde{\boldsymbol{L}}_{\boldsymbol{t}}(x) = \boldsymbol{L}_{\boldsymbol{t}}(x) - \boldsymbol{L}_{\boldsymbol{t}}\,.$$

Доведення. Генератор на збуреній функції Ляпунова має представлення:

$$\boldsymbol{L}_t^{\varepsilon}V^{\varepsilon}(u,x) = \varepsilon^{-2}QV(u) +$$
$$+\varepsilon^{-1}a(t)\big[a(t)QV_1(u,x) + \boldsymbol{C}_0(x)V(u)\big] +$$
$$+a(t)\big[QV_2(u,x) + a(t)\boldsymbol{C}_0(x)V_1(u,x) + \nabla_b\boldsymbol{C}(x)V(u)\big] +$$
$$+\varepsilon a^2(t)\big[\boldsymbol{C}_0(x)V_2(u,x) + \nabla_b\boldsymbol{C}(x)V_1(u,x) + \varepsilon\nabla_b\boldsymbol{C}(x)V_2(u,x)\big].$$

Розглянемо доданки погруповані за степенями параметру ε.

Оскільки функція $V(u)$ не залежить від змінної x, то перший доданок дорівнює нулеві [3]:

$$QV(u) = 0.$$

Використовуючи першу умову розв'язності проблеми сингулярного збурення, доданок з коефіцієнтом ε^{-1} прирівнюємо до нуля [3]:

$$a(t)QV_1(u,x) + a(t)\boldsymbol{C}_0(x)V(u) = 0. \qquad (9)$$

Використовуючи умову балансу (2) для рівняння (9) та додаткову умову $\Pi V_1 = 0$, отримаємо розв'язок у вигляді:

$$V_1(u,x) = R_0 \boldsymbol{C}_0(x) V(u). \tag{10}$$

З розв'язності проблеми сингулярного збурення [3] для визначеності функції $V_2(u,x)$ маємо рівність

$$QV_2(u,x) + \boldsymbol{L_t}(x)V(u) = \boldsymbol{L_t}V(u),$$

де

$$\boldsymbol{L_t}(x)V(u) = a(t)\boldsymbol{C}_0(x)R_0\boldsymbol{C}_0(x)V(u) + \nabla_b \boldsymbol{C}(x)V(u),$$

а $\boldsymbol{L_t} = \Pi \boldsymbol{L_t}(x)$, тобто

$$\boldsymbol{L_t} = a(t)\Pi \boldsymbol{C}_0(x)R_0\boldsymbol{C}_0(x) + \Pi\nabla_b \boldsymbol{C}(x). \tag{11}$$

Отже, отримаємо

$$V_2(u,x) = R_0 \tilde{\boldsymbol{L}}_{\boldsymbol{t}}(x)V(u), \tag{12}$$

де $\tilde{\boldsymbol{L}}_{\boldsymbol{t}}(x) = \boldsymbol{L_t}(x) - \boldsymbol{L_t}$.

У четвертий доданок підставимо значення функцій $V_1(u,x)$ (10) та $V_2(u,x)$ (12) і виділимо залишковий член $\theta_t(x)V(u)$:

$$\begin{aligned}\theta_t(x)V(u) &= \boldsymbol{C}_0(x)V_2(u,x) + \nabla_b\boldsymbol{C}(x)V_1(u,x) + \varepsilon\nabla_b\boldsymbol{C}(x)V_2(u,x) = \\ &= \boldsymbol{C}_0(x)R_0\tilde{\boldsymbol{L}}_{\boldsymbol{t}}(x)V(u) + \nabla_b\boldsymbol{C}(x)R_0\boldsymbol{C}_0(x)V(u) + \varepsilon\nabla_b\boldsymbol{C}(x)R_0\tilde{\boldsymbol{L}}_{\boldsymbol{t}}(x)V(u).\end{aligned} \tag{13}$$

Лему доведено.

Доведення теореми. Встановимо ряд оцінок для асимптотичного розкладу генератора $\boldsymbol{L}_t^\varepsilon$. Зокрема, враховуючи (11), умови $C1$—$C3$ та B теореми, для першого доданку маємо

$$\begin{aligned}\boldsymbol{L_t}V(u) &= \int_X \pi(dx)\nabla_b C(u,x)V'(u) + \\ &+ a(t)\int_X \pi(dx)C_0(u,x)R_0\left[C_0(u,x)V'(u)\right] < -cV(u) + \\ &+ k^* b(t)\left(1+V(u)\right) + c_1^* a(t)\left(1+V(u)\right).\end{aligned} \tag{14}$$

Позначимо через θ_1, θ_2, θ_3 відповідні доданки без коефіцієнтів в (13). Отже для θ_1 маємо

$$\begin{aligned}\theta_1 &= \boldsymbol{C}_0(x)R_0\tilde{\boldsymbol{L}}_{\boldsymbol{t}}(x)V(u) = C_0(u,x)R_0\left[\nabla_b\tilde{C}(u,x)V'(u)\right]' + \\ &+ a(t)C_0(u,x)R_0\left[C_0(u,x)R_0\left[C_0(u,x)V'(u)\right]'\right]' - \\ &- a(t)\int_X \pi(dx)C_0(u,x)R_0\left[C_0(u,x)R_0\left[C_0(u,x)V'(u)\right]'\right]'.\end{aligned}$$

Враховуючи умови $C5$—$C8$ теореми отримуємо

$$\left|\theta_1\right| \le c_2^*\left(1+V(u)\right). \qquad (15)$$

Для θ_2 маємо

$$\theta_2 = \nabla_b \boldsymbol{C}(x) R_0 \boldsymbol{C}_0(x) V(u) = \nabla_b C(u,x) R_0 \left[C_0(u,x)V'(u)\right]'.$$

Згідно умови $C4$ теореми

$$\left|\theta_2\right| \le c_2^*\left(1+V(u)\right). \qquad (16)$$

Для третього доданку маємо

$$\theta_3 = \nabla_b \boldsymbol{C}(x) R_0 \tilde{\boldsymbol{L}}_t(x) V(u) = \nabla_b C(u,x) R_0 \left[\nabla_b \tilde{C}(u,x) V'(u)\right]' +$$

$$+a(t)\nabla_b C(u,x) R_0 \left[C_0(u,x) R_0 \left[C_0(u,x)V'(u)\right]'\right]' -$$

$$-a(t)\int_X \pi(dx) \nabla_b C(u,x) R_0 \left[C_0(u,x) R_0 \left[C_0(u,x)V'(u)\right]'\right]'.$$

Отже

$$\left|\theta_2\right| \le c_3^*(1+V(u)). \qquad (17)$$

Таким чином, враховуючи (15)-(17), для залишкового члена $\theta_t(x)V(u)$ маємо сумарну оцінку

$$\left|\theta_t(x)V(u)\right| \le c_4^*(1+V(u). \qquad (18)$$

Разом з (14) та (18) отримуємо для $\boldsymbol{L}_t^{\varepsilon} V^{\varepsilon}(u,x)$ обмеження

$$\boldsymbol{L}_t^{\varepsilon} V^{\varepsilon}(u,x) \le -ca(t)V(u) + k^* a(t) b(t)(1+V(u)) + c_5^* a^2(t)(1+V(u)).$$

З останнього та з мартингальної характеризації процесу $V^{\varepsilon}\left(u^{\varepsilon}(t), x_t^{\varepsilon}\right)$, $t \ge 0$, [2] випливає твердження теореми, згідно теореми Невельсона-Хасьмінського [4, с. 100].

Наслідок 1. У випадку, коли збурення $C_0(u,x) = C_0(x)$ [5], тобто не залежить від еволюції u, твердження теореми має місце при наступних умовах:

$C3^*: \left|C_0(x) R_0 \left[C_0(x) V''(u)\right]'\right| \le c_2\left(1+V(u)\right), c_2 > 0;$

$C4^*: \left|\nabla_b C(u,x) R_0 \left[C_0(x) V''(u)\right]'\right| \le c_3\left(1+V(u)\right),\ c_3 > 0;$

$C5^*: \left|C_0(x) R_0 \left[\nabla_b \tilde{C}(u,x) V'(u)\right]'\right| \le c_4\left(1+V(u)\right),\ c_4 > 0;$

$C7^*: \left|C_0(x) R_0 \left[C_0(x) R_0 \left[C_0(x) V'''(u)\right]\right]\right| \le c_6\left(1+V(u)\right),\ c_6 > 0;$

$$\mathrm{C8}^*: \left|\nabla_b C(u,x) R_0 \left[C_0(x) R_0 \left[C_0(x) V'''(u) \right]\right]\right| \le c_6 \left(1 + V(u)\right),\ c_6 > 0.$$

Наслідок 2. З обчислення (14) граничного оператора $\boldsymbol{L_t}$ робимо висновок при збіжність процедури (1) до процедури, що визначається стохастичним диференціальним рівнянням

$$du(t) = a(t)\nabla_b C(u(t))dt + a^2(t)\left[b(u(t))dt + B(u(t))dw_t\right],$$

де вираз в квадратних дужках є збурюючим дифузійним процесом з функцією зсуву

$$b(u) = \Pi C_0(u,x) R_0 C_0'(u,x) = \int_X \pi(dx) C_0(u,x) R_0 C_0'(u,x),$$

та матрицею дисперсії

$$B(u) = \Pi C_0(u,x) R_0 C_0(u,x) = \int_X \pi(dx) C_0(u,x) R_0 C_0(u,x);$$

$u \in R^d$ і всі похідні обчислюються по змінній u: $C_0'(u,x) = \left\{\partial C_0(u,x) \big/ \partial u_k, k = \overline{1,N}\right\}$; w_t — стандартний вінерівський процес.

Висновки. Умови $C3$—$C8$ теореми визначаються методом дослідження процедури стохастичної оптимізації (1), а саме розв'язком проблеми сингулярного збурення та мартингальною характеризацією двокомпонентного марковського процесу, при оцінці залишкового члена зверху величиною співмірною з величиною функції $1 + V(u)$. Як і в схемі усереднення [6], вдалось отримати достатньо прості умови збіжності процедури стохастичної оптимізації з сингулярно збуреним доданком, що визначає дифузійність граничного процесу. Отриманий результат може бути використаний для отримання умов асимптотичної нормальності процедури (1) як в одномірному випадку, так і в багатовимірному випадку.

Список використаних джерел:

1. Королюк В. С. Стійкість стохастичних систем у схемі дифузійної апроксимації / В. С. Королюк // Укр. мат. журн. — 1998. — № 1. — С. 36—47.
2. Чабанюк Я. М. Непрерывная процедура стохастической аппроксимации с сингулярным возмущением в условиях баланса / Я. М. Чабанюк // Кібернетика і системний аналіз. — 2006. — № 3 — С. 133—139.
3. Koroliuk V. Stochastic Systems in Merging Phase Space / V. Koroliuk, N. Limnios. — London : World Scientific Publishing. — 2005. — 330 p.
4. Невельсон М. Б. Стохастическая аппроксимация и рекуррентное оценивание / М. Б. Невельсон, Р. З. Хасьминский. — М. : Наука, 1972. — 304 с.
5. Чабанюк Я.М. Асимптотика генератора процедури стохастичної оптимізації з дифузійним збуренням / Я. М. Чабанюк, У. Т. Хімка // Збірник наукових праць за матеріалами 4-ї міжнар. наук. конф. «Сучасні проблеми

математичного моделювання, прогнозування та оптимізації». — Кам'янець-Подільський : Кам'янець-Подільський нац. ун-т ім. І. Огієнка, 2010. — С. 263—264.
6. Khimka U.T., Chabanyuk Ya.M. Stochastic Optimization Procedure Convergence with Markov Switching in the Average Scheme / U. T. Khimka, Ya. M. Chabanyuk // Математичні студії. — 2010. — Vol. 34, № 1. — P. 101—105.

It has been established the sufficient conditions for the convergence of the continuous stochastic optimization procedure of Kiefer-Wolfowitz in the diffusion approximation scheme with Markov switching. The convergence of the proposed procedure has been proved by using the method of the small parameter and the solution of the singular perturbation problem for the Markov process generator.

Key words: *stochastic optimization, the markov process, solution of the singular perturbation problem.*

Отримано 16.10.2010

УДК 517.9

E. V. Cheremnikh*, Ph. D.,
F. Diaba**, Ph. D.,
G. V. Ivasyk*, assistant
*Lviv Polytechnic National University, Ukraine,
**Badji Mokhtar-Annaba, Algeria

ON TIME ASYMPTOTIC OF THE SOLUTIONS OF TRANSPORT EVOLUTION EQUATION

Authors consider in the space $L^2(D), D = R\times[-1,1]$ the transport operator

$$Lf = -i\mu\frac{\partial f}{\partial x} + a(x)b_1(\mu)\int_{-1}^{1} b(\mu')f\left(x,\mu'\right)d\mu'.$$

To obtain the representation of the solution of the equation $\dot{u} = iLu, u\big|_{t=0} = u(0)$ authors introduce some integral (like known expression the semigroup by the resolvent) and prove directly that this integral is corresponding semigroup. To simplify the calculus the authors reduce the operator L to some Friedrichs' model using Fourier transformation.

Key words: *spectrum, transport operator, Friedrichs' model, semigroup.*

Spectral theory for various types of transport operators is the subject of many works (see for example [1; 2]). In the work [3] the authors begin to use Friedrichs' model to study the spectrum of some transport operator. Analogic result was obtained in the works [4; 5].

