

УДК 519.63:532.5

А. Я. Бомба*, д-р техн., наук, професор,

А. П. Сафоник**, канд. техн. наук

*Рівненський державний гуманітарний університет, м. Рівне,

**Національний університет водного господарства та природокористування, м. Рівне

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСУ АЕРОБНОГО ОЧИЩЕННЯ СТИЧНИХ ВОД В ПОРИСТОМУ СЕРЕДОВИЩІ

Побудовано математичну модель процесу аеробного очищення стічних вод в пористому середовищі, що враховує взаємодію бактерій, органічної і біологічно неокиснюваної речовин. Запропонований алгоритм розв'язання відповідної моделі нелінійної сингулярно збуреної задачі типу «фільтрація-конвекція-дифузія-масообмін» із запізненням у часі.

Ключові слова: *нелінійні задачі, процес аеробного очищення, фільтрування, сингулярні збурення, асимптотика, запізнення.*

Пошуки економічно вигідних і екологічно прийнятних методів очищення промислових та господарсько-комунальних стічних вод були і залишаються вкрай актуальними, особливо для великих міст. Постійно зростаюча чисельність жителів населених пунктів, розгалужена інфраструктура, інтенсивне функціонування харчових, мікробіологічних, фармацевтичних та багатьох інших виробництв призводять до щоденного зростання обсягів стічних вод, забруднених органічними речовинами. Тому зростає потреба в очищенні води.

На даний час проектування систем очищення стічних вод засновано на результатах великого вітчизняного й закордонного досвіду [1—6]. Оскільки стічні води можуть значно відрізнятися по можливостях культивування на них бактерій (наявність достатньої кількості живильних елементів, токсичність і т.д.), у кожному конкретному випадку необхідна перевірка придатності води для вирощування бактерій. Прогнозування якості води у водоймах, здійснюване згідно існуючих математичних моделей (для загально прийнятих нормованих показників) у значній мірі дозволяє визначити необхідний ступінь очищення стічних вод.

Метою роботи є розробка математичних моделей процесів очищення стічних вод від біогенних елементів, що враховує взаємодію бактерій, органічної і біологічно неокиснюваної речовини в пористому середовищі.

1. Постановка задачі. Розглянемо процес очищення рідин від органічних забруднень шляхом внесення розчину біопрепарату. Згідно літе-

ратурних джерел (теоретичних і експериментальних даних) [1—6] розрізняють наступні його складові (компоненти): розкладання органічного забруднення бактеріями, ріст і відмирання бактерій, вироблення бактеріями поверхнево-активних речовин, перехід органічного забруднення до біологічно неокиснюваної речовини, перенесення бактерій з урахуванням їх сорбції й десорбції, перенесення біологічно неокиснюваної речовини з рідиною з урахуванням її сорбції й десорбції та дифузії (рис. 1).

Для опису динаміки бактеріальної популяції з урахуванням відмирання клітин мікроорганізмів використовується рівняння типу Моно [1; 4; 6]:

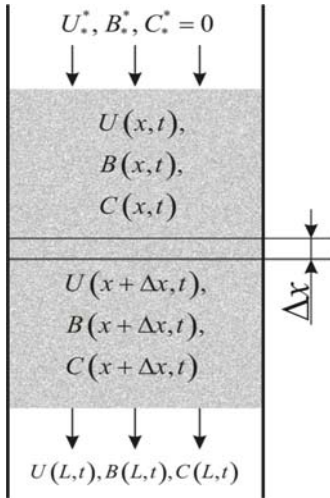


Рис. 1. Схематичне зображення процесу аеробного очищення.

де v — швидкість руху речовини, σ_e — ефективна пористість ($\sigma_e = k_a \rho + \sigma$, k_a — коефіцієнт адсорбції бактерій, ρ — густина середовища, σ — пористість).

Зниження вмісту забруднення рідини відбувається за рахунок його розкладання бактеріями і фільтрування біологічно неокислювальних речовин. Біологічний розклад може бути описано рівнянням типу Моно, а вимивання — рівнянням конвективного переносу, їх комбінація описує зміну концентрації забруднення з часом:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = -\frac{1}{q} \frac{\mu_m U}{U + K_S} B - \frac{v \sigma}{\rho} \frac{\partial C}{\partial x}, \quad (3)$$

де q — коефіцієнт пропорційності, який зв'язує кількість клітин, що утворилися при їх поглинанні субстратом, C — концентрація біологічно неокислюваної речовини.

$$\frac{\partial B}{\partial t} = \frac{\mu_{\max} U}{U + K_S} B - \lambda B, \quad (1)$$

де B — концентрація бактерій, μ_{\max} — максимальна швидкість їх росту бактерій, U — концентрація забруднення (субстрату) в рідині, K_S — константа спорідненості субстрату до мікроорганізму, λ — швидкість відмирання клітин.

Враховуючи те, що бактерії рухаються разом із забрудненою речовиною у пористому середовищі, аналогічно до [6], приходимо до наступного рівняння для росту, відмирання й перенесення бактерій:

$$\frac{\partial B}{\partial t} = \frac{\mu_{\max} U}{U + K_S} B - \lambda B - \frac{v}{\sigma_e} \frac{\partial B}{\partial x}, \quad (2)$$

У більшості випадків можна вважати, що бактерії виробляють поверхнево-активні речовини одночасно з розкладанням вуглеводнів, тобто деяка частина вуглеводнів використовується для створення поверхнево активних речовин.

Аналогічно до попереднього, використовуючи рівняння типу Моно, запишемо рівняння, що характеризує зміну концентрації біологічно неокислюваної речовини:

$$\sigma \frac{\partial C}{\partial t} = \frac{1}{\rho q_S} \frac{\mu_m U}{K_S + U} B - v \frac{\partial C}{\partial x} - \beta C + D_C \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}, \quad (4)$$

де q_S — коефіцієнт пропорційності, що зв'язує кількість утвореної органічно неокислюваної речовини з поглиненим субстратом, β — коефіцієнт, який характеризує кількість захоплених частинок біологічно неокислюваної речовини фільтром, D_C — коефіцієнт дифузії, $D_C = b_C \varepsilon$, $0 < b_C \leq 1$, ε — малий параметр.

Система диференціальних рівнянь (2), (3) і (4) описує в комплексі зміну концентрації бактерій, органічної і біологічно неокислюваної речовини в пористому середовищі. Різноманітні взаємовпливи характеристик середовища та процесу доцільно враховувати шляхом введення у відповідні рівняння запізнення за часом, що дає можливість вихідну “сильно нелінійну” задачу дещо “розщепити” на більш простіші нелінійні задачі. У реальних системах завжди є деяке запізнення, викликане певними причинами. У даному випадку перенесення забрудненої речовини вимагає певного часу. Далі прийматимемо, що будь-яка зміна зовнішніх факторів, наприклад, збільшення концентрації забруднення чи бактерій, відбувається лише по закінченні деякого часу (часу запізнення $\tau > 0$). Виходячи з вище сказаного, приходимо до наступної модельної задачі із запізненням:

$$\begin{cases} \frac{\partial B}{\partial t} = \Phi(U(x, t - \tau)) B - \lambda B - \frac{v}{\sigma_e} \frac{\partial B}{\partial x}, \\ \frac{\partial U}{\partial t} = -\frac{1}{q} \Phi(U(x, t - \tau)) B - \frac{v\sigma}{\rho} \frac{\partial C}{\partial x}, \\ \sigma \frac{\partial C}{\partial t} = \frac{1}{\rho q_S} \Phi(U(x, t - \tau)) B - v \frac{\partial C}{\partial x} - \beta C + D_C \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}, \end{cases} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} B|_{x=0} &= B^*(t), \quad U|_{x=0} = U^*(t), \quad C|_{x=0} = 0, \\ \frac{\partial B}{\partial x} \Big|_{x=L} &= 0, \quad \frac{\partial U}{\partial x} \Big|_{x=L} = 0, \quad \frac{\partial C}{\partial x} \Big|_{x=L} = 0, \end{aligned} \quad (6)$$

$$B_{t=0} = 0, C|_{t=0} = 0, U|_{t=\tilde{t}} = 0, -\tau \leq \tilde{t} \leq 0,$$

де L — довжина фільтра, $\Phi(U) = \frac{\mu_{\max} U}{U + K_S}$.

2. Алгоритм розв'язку. Розв'язування задачі (5)—(6) із запізненням τ на часових проміжках $[(n-1)\tau, n\tau]$ ($n = 1, 2, \dots$) замінимо послідовним розв'язанням n задач без запізнення [7]

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial B^{[n]}}{\partial t} = (\Phi_{n\tau} - \lambda) B^{[n]} - \frac{v}{\sigma_e} \frac{\partial B^{[n]}}{\partial x}, \\ \frac{\partial U^{[n]}}{\partial t} = -\frac{1}{q} \Phi_{n\tau} B^{[n]} - \frac{v\sigma}{\rho} \frac{\partial C^{[n]}}{\partial x}, \\ \sigma \frac{\partial C^{[n]}}{\partial t} = \frac{1}{\rho q_S} \Phi_{n\tau} B^{[n]} - v \frac{\partial C^{[n]}}{\partial x} - \beta C + \varepsilon b_C \frac{\partial^2 C^{[n]}}{\partial x^2}, \\ B^{[n]}|_{x=0} = B_*^*(t), U^{[n]}|_{x=0} = U_*^*(t), C^{[n]}|_{x=0} = 0, \\ B^{[n]}|_{t=0} = 0, C^{[n]}|_{t=0} = 0, U^{[n]}|_{t=\tilde{t}} = 0, -\tau \leq \tilde{t} \leq 0, \\ \Phi_{n\tau} = \Phi(x, t) = \Phi(U^{[n-1]}(x, t - \tau)), U^{[0]}(x, 0) = 0, \end{array} \right. \quad (7)$$

де $B^{[n]}$, $U^{[n]}$, $C^{[n]}$, — відповідно концентрації бактерій, органічної речовини і біологічно неокисненої в пористому середовищі на часовому проміжку $[(n-1)\tau, n\tau]$.

Розв'язок задачі (7) з точністю $O(\varepsilon^{m+1})$ шукаємо у вигляді асимптотичних рядів за степенями малого параметра ε [8]

$$\begin{aligned} B^{[n]}(x, t) &= B_0^{[n]}(x, t) + \sum_{i=1}^m \varepsilon^i B_i^{[n]}(x, t) + R_B^{[n]}(x, t, \varepsilon), \\ U^{[n]}(x, t) &= U_0^{[n]}(x, t) + \sum_{i=1}^m \varepsilon^i U_i^{[n]}(x, t) + R_U^{[n]}(x, t, \varepsilon), \end{aligned} \quad (8)$$

$$C^{[n]}(x, t) = C_0^{[n]}(x, t) + \sum_{i=1}^m \varepsilon^i C_i^{[n]}(x, t) + \sum_{i=0}^m \varepsilon^i \tilde{C}_i^{[n]}(\tilde{\mu}, t) + R_C^{[n]}(x, t, \varepsilon),$$

де $R_B^{[n]}$, $R_U^{[n]}$, $R_C^{[n]}$ — залишкові члени, $B_i^{[n]}(x, t)$, $U_i^{[n]}(x, t)$, $C_i^{[n]}(x, t)$ ($i = \overline{0, m}$) — члени регулярних частин асимптоти, $\tilde{C}_i^{[n]}(\tilde{\mu}, t)$ ($i = \overline{0, m}$) — функції типу примежового шару (відповідно поправки на виході фільтраційної речовини), $\tilde{\mu} = (L-x) \cdot \varepsilon^{-1}$ — відповідні регуляризуючі перетворення.

У результаті підстановки (8) у (7) та застосування стандартної «процедури прирівнювання» [8] отримуємо такі задачі для визначення функцій $B_i^{[n]}(x, t)$, $U_i^{[n]}(x, t)$, $C_i^{[n]}(x, t)$ ($i = 0, m$):

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial B_0^{[n]}}{\partial t} = (\Phi_{nr} - \lambda) B_0^{[n]} - \frac{v}{\sigma_e} \frac{\partial B_0^{[n]}}{\partial x}, \\ \frac{\partial U_0^{[n]}}{\partial t} = -\frac{1}{q} \Phi_{nr} B^{[n]} - \frac{v\sigma}{\rho} \frac{\partial C_0^{[n]}}{\partial x}, \\ \sigma \frac{\partial C_0^{[n]}}{\partial t} + v \frac{\partial C_0^{[n]}}{\partial x} + \beta C_0^{[n]} = \frac{1}{\rho q_S} \Phi_{nr} B^{[n]}, \\ B^{[n]} \Big|_{x=0} = B_*^*(t), \quad U^{[n]} \Big|_{x=0} = U_*^*(t), \quad C^{[n]} \Big|_{x=0} = 0, \\ B^{[n]} \Big|_{t=0} = 0, \quad C^{[n]} \Big|_{t=0} = 0, \quad U^{[n]} \Big|_{t=\tilde{t}} = 0, \quad -\tau \leq \tilde{t} \leq 0, \\ \Phi_{nr} = \Phi(U^{[n-1]}(x, t - \tau)), \quad U^{[0]}(x, 0) = 0, \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial B_i^{[n]}}{\partial t} = \Phi \left(\sum_{i=1}^m U_{i-1}^{[n]} \right) B_{i-1}^{[n]} - \lambda B_i^{[n]} - \frac{v}{\sigma_e} \frac{\partial B_i^{[n]}}{\partial x}, \\ \frac{\partial U_i^{[n]}}{\partial t} = \Phi \left(\sum_{i=1}^m U_{i-1}^{[n]} \right) B_{i-1}^{[n]} - \frac{v\sigma}{\rho} \frac{\partial C_i^{[n]}}{\partial x}, \\ \sigma \frac{\partial C_i^{[n]}}{\partial t} + v \frac{\partial C_i^{[n]}}{\partial x} + \beta C_i^{[n]} = \Phi \left(\sum_{i=1}^m U_{i-1}^{[n]} \right) B_{i-1}^{[n]} + b_C \frac{\partial^2 C_{i-1}^{[n]}}{\partial x^2}, \\ B^{[n]} \Big|_{x=0} = 0, \quad U^{[n]} \Big|_{x=0} = 0, \quad C^{[n]} \Big|_{x=0} = 0, \quad B^{[n]} \Big|_{t=0} = 0, \quad U^{[n]} \Big|_{t=0} = 0, \quad C^{[n]} \Big|_{t=0} = 0. \end{array} \right.$$

У результаті їх розв'язання маємо:

$$B_0^{[n]}(x, t) = \begin{cases} B_*^* \left(t - \frac{\sigma_e x}{v} \right) \cdot e^{\frac{\sigma_e x}{v} \int_0^x (\lambda - \Phi_{nr}(\tilde{x}, t)) d\tilde{x}}, & t \geq \frac{\sigma_e x}{v}, \\ 0, & t < \frac{\sigma_e x}{v}, \end{cases}$$

$$B_i^{[n]}(x, t) = \begin{cases} \frac{\sigma_e}{v} e^{\frac{\lambda \sigma_e x}{v}} \cdot \int_0^x e^{-\frac{\lambda \sigma_e \tilde{x}}{v}} g_i^{[n]} \left(\tilde{x}, t + \frac{\sigma_e}{v} (\tilde{x} - x) \right) d\tilde{x}, & t \geq \frac{\sigma_e x}{v}, \\ \frac{e^{\lambda t}}{\sigma_e} \cdot \int_0^t e^{-\lambda \tilde{t}} g_i^{[n]} \left(\frac{v}{\sigma_e} (\tilde{t} - t) + x, \tilde{t} \right) d\tilde{t}, & t < \frac{\sigma_e x}{v}, \end{cases}$$

$$C_i^{[n]}(x, t) = \begin{cases} \frac{\sigma}{v} e^{\frac{\beta\sigma x}{v}} \cdot \int_0^x e^{-\frac{\beta\sigma \tilde{x}}{v}} W_i^{[n]} \left(\tilde{x}, t + \frac{\sigma}{v} (\tilde{x} - x) \right) d\tilde{x}, & t \geq \frac{\sigma x}{v}, \\ \frac{e^{\beta t}}{\sigma} \cdot \int_0^t e^{-\beta \tilde{t}} W_i^{[n]} \left(\frac{v}{\sigma} (\tilde{t} - t) + x, \tilde{t} \right) d\tilde{t}, & t < \frac{\sigma x}{v}, \quad i = \overline{0, m}, \end{cases}$$

$$U_0^{[n]}(x, t) = \int_0^t G_0^{[n]}(x, \tilde{t}) d\tilde{t} + U_*^*(t) - \int_0^t G_0^{[n]}(0, \tilde{t}) d\tilde{t},$$

$$U_i^{[n]}(x, t) = \int_0^t G_i^{[n]}(x, \tilde{t}) d\tilde{t},$$

де

$$g_i^{[n]} = \Phi \left(\sum_{i=1}^m U_{i-1}^{[n]} \right) B_{i-1}^{[n]}, \quad W_0^{[n]} = \frac{1}{\rho q_s} \Phi_{nr} B^{[n]},$$

$$G_0^{[n]} = -\frac{1}{q} \Phi_{nr} B^{[n]} - \frac{v\sigma}{\rho} \frac{\partial C_0^{[n]}}{\partial x}, \quad W_i^{[n]} = \Phi \left(\sum_{i=1}^m U_{i-1}^{[n]} \right) B_{i-1}^{[n]} + b_C \frac{\partial^2 C_{i-1}^{[n]}}{\partial x^2},$$

$$G_i^{[n]} = -\Phi \left(\sum_{i=1}^m U_{i-1}^{[n]} \right) B_{i-1}^{[n]} - \frac{v\sigma}{\rho} \frac{\partial C_i^{[n]}}{\partial x}, \quad i = \overline{1, m}.$$

Функції $\tilde{C}^{[n]} = \sum_{i=0}^m \tilde{C}_i^{[n]} \varepsilon^i$ ($i = \overline{0, m}$) призначені для усунення неузгодженостей, внесених побудованими регулярними частинами $C^{[n]}(x, t) = \sum_{i=0}^m C_i^{[n]} \varepsilon^i$ в околі точки $x = L$ (виходу фільтраційної течії), тобто забезпечують виконання умови: $\frac{\partial}{\partial x} (C^{[n]} + \tilde{C}^{[n]}) = O(\varepsilon^{m+1})$. Для знаходження цих функцій маємо такі задачі:

$$\begin{cases} b_C \frac{\partial^2 \tilde{C}_0^{[n]}}{\partial \tilde{\mu}^2} + v \frac{\partial \tilde{C}_0^{[n]}}{\partial \tilde{\mu}} + \beta \tilde{C}_0^{[n]} = 0, \\ \tilde{C}_0^{[n]} \xrightarrow{\tilde{\mu} \rightarrow \infty} 0, \quad \tilde{C}_{0\tilde{\mu}}^{[n]}(L, t) = \tilde{C}_{0x}^{[n]}(L, t), \end{cases} \quad (9)$$

$$\begin{cases} b_C \frac{\partial^2 \tilde{C}_i^{[n]}}{\partial \tilde{\mu}^2} + v \frac{\partial \tilde{C}_i^{[n]}}{\partial \tilde{\mu}} + \beta \tilde{C}_i^{[n]} = \sigma \frac{\partial \tilde{C}_{i-1}^{[n]}}{\partial t}, \\ \tilde{C}_i^{[n]} \xrightarrow{\tilde{\mu} \rightarrow \infty} 0, \quad \tilde{C}_{i\tilde{\mu}}^{[n]}(L, t) = C_{ix}^{[n]}(L, t), \quad i = \overline{1, m}. \end{cases} \quad (10)$$

З огляду на те, що (9)—(10) є звичайними диференціальними рівняннями першого порядку та параболічними рівняннями зі сталими

коефіцієнтами, розв'язки відповідних задач можна записати в явному вигляді. Оцінки залишкових членів проводяться, аналогічно до [8].

3. Результати числових розрахунків. Наведемо результати розрахунків за формулами (8) при $B_*^*(t) = 10 \text{ кл/мл}$, $U_*^*(t) = 0.005 \text{ г/г}$, $L = 5 \text{ м}$, $v = 5 \text{ м/год}$, $\beta = 36^{-1} \text{ м}^2/\text{с}$, $\lambda = 0.06 \text{ доб}^{-1}$, $\sigma_e = 5$, $\sigma = 0.37$, $\mu_m = 2.5 \text{ доб}^{-1}$, $K_S = 0.1 \text{ г/г}$, $b_U = 1.25 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2/\text{год}$, $b_C = 2 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2/\text{год}$, $\rho = 1.5 \text{ г/см}^3$, $q = 2 \cdot 10^{-9} \text{ кл/г}$, $q_S = 4 \cdot 10^{11} \text{ кл/г}$.

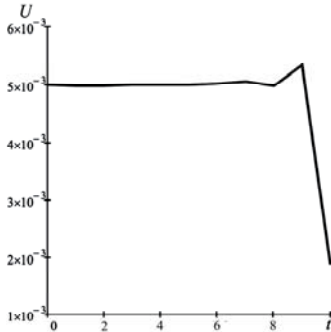


Рис. 2. Розподіл концентрації забруднення на виході фільтра протягом 9 годин

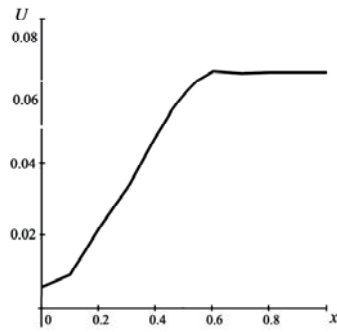


Рис. 3. Розподіл концентрації забруднення вздовж фільтра у момент часу 9 годин

На рис. 2, 3 зображено розподіл концентрації забруднення на виході фільтра та вздовж фільтра відповідно. Як бачимо, протягом 9 год фільтр практично не діє, цей проміжок часу є так званою «зарядкою» фільтра, тобто за цей час утворюються біологічно активні елементи, які і сприяють процесу очищення стічної води (див. рис. 4, 5). Починаючи з даного моменту часу бактерії інтенсивно породжують самі себе, отже можемо призупинити їх подачу.

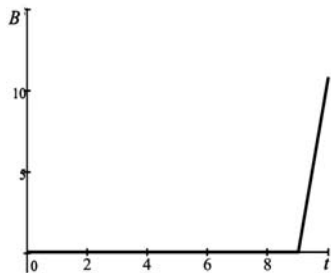


Рис. 4. Розподіл концентрації бактерій на виході фільтра протягом 9 годин

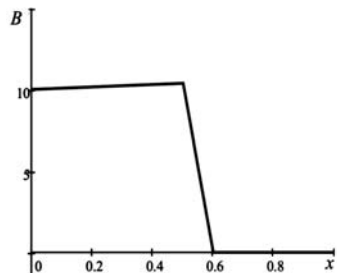


Рис. 5. Розподіл концентрації бактерій вздовж фільтра у момент часу 9 годин

На рисунках 6, 7 зображені розподіли концентрації біологічно неокислюваної речовини на виході фільтра протягом 9 год., та вздовж фільтра у момент часу 9 год. Як бачимо, вздовж фільтра концентрація біологічно неокислюваної речовини за даний період часу зростає практично за лінійним законом, це пояснюється тим, що ріст кількості бактерій (рис. 4, 5) продукт їх життєдіяльності впливає на утворення біологічно неокислюваної речовини.

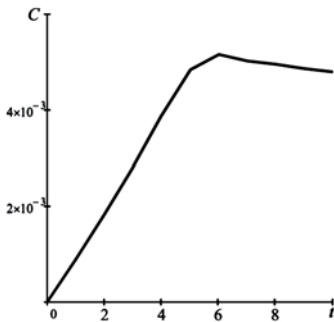


Рис. 6. Розподіл концентрації біологічно неокислюваної речовини на виході фільтра протягом 9 годин

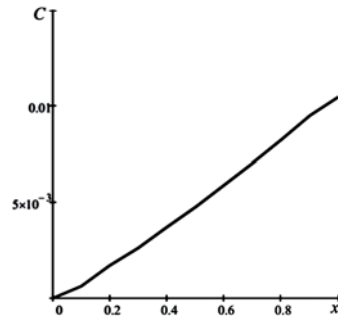


Рис. 7. Розподіл концентрації біологічно неокислюваної речовини вздовж фільтра у момент часу 9 годин

Висновок. На основі узагальнення моделей типу Моно нами розроблено нову математичну модель процесу аеробного очищення стічної води в пористому середовищі, що враховує взаємодію бактерій, органічної і біологічно неокислюваної речовини в пористому середовищі. Запропонований алгоритм розв'язання відповідної нелінійної сингулярно збуреної задачі, що надає можливість автоматизованого визначення оцінки ефективної роботи біофільтра, зокрема, часу припинення подачі бактерій, а отже суттєво зменшувати вартість процесу очищення.

Список використаних джерел:

1. Поляков В. Л. До теоретичного обґрунтування біоконвеєрних технологій очищення стічних вод / В. Л. Поляков // Пробл. водопостачання, водовідведення та гідраліки. — 2005. — Вип. 5. — С. 54—61.
2. Ружинська Л. І. Модель процесу анаеробного очищення стічної води в біореакторі з листовими нерухомими носіями іммобілізованої мікрофлори / Л. І. Ружинська, І. Г. Баранова // Наукові вісті НТУУ “КПІ”. — 2009. — № 2. — С. 84—88.
3. Олейник А. Я. Теоретические исследования фильтрационных процессов в пористых средах с изменяющимися водно-физическими свойствами / А. Я. Олейник, В. Л. Поляков // Прикладна гідромеханіка. — 2007. — Т. 9, № 2—3. — С. 122—138.
4. Горбунова С. Ю. Математическая модель биологической системы по очистке сточных вод / С. Ю. Горбунова, А. Б. Боровков, Р. П. Тренкеншу // Экология моря. — 2008. — Т. 76. — С. 81—85.

5. Яковлев С. В. Биологическая очистка производственных сточных вод: Процессы, аппараты и сооружения / С. В. Яковлев, И. В. Скирдов, В. Н. Швецов и др. ; под ред. С. В. Яковлева. — М. : Стройиздат, 1985. — 208 с.
6. Огняник Н. С. Основы изучения загрязнения геологической среды легкими нефтепродуктами / Н. С. Огняник, Н. К. Парамонов, А. Л. Брикс, И. С. Пашковский, Д. В. Коннов. — К. : А.П.Н., 2006. — 278 с.
7. Бомба А. Я. Моделювання процесів очищення стічної води на каркасно-засипних фільтрах з урахуванням зворотного впливу / А. Я. Бомба, І. М. Присяжнюк, А. П. Сафоник // Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології. — 2007. — Вип. 6. — С. 101—108.
8. Бомба А. Я. Нелінійні сингулярно-збурені задачі типу "конвекція — дифузія" / А. Я. Бомба, С. В. Барановський, І. М. Присяжнюк. — Рівне : НУВГП, 2008. — 252 с.

The mathematical model of process of aerobic sewage treatment in the porous environment which considers interaction of bacteria, organic and biologically not oxidising substances is constructed. The offered algorithm of the decision corresponding modelling nonlinear singular the indignant problem of type «convection-diffusion-mass exchange» with time delay

Key words: *nonlinear problems, process of aerobic clearing, filtering, singular indignations, asymptotic, time delay.*

Отримано: 06.03.2011

УДК 517.9+531.19+530.145

V. I. Gerasimenko*, Doctor of phys.-math. sci.,

D. O. Polishchuk**, PhD student

*Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, Kyiv,

**Taras Shevchenko National University of Kyiv

ON EVOLUTION EQUATIONS FOR MARGINAL CORRELATION OPERATORS

This paper is devoted to the problem of the description of nonequilibrium correlations of quantum many-particle systems. A non-perturbative solution of the Cauchy problem of the nonlinear quantum BBGKY hierarchy for marginal correlation operators is constructed as an expansion over particle clusters which evolution is governed by the corresponding-order cumulant of the nonlinear groups of operators generated by the von Neumann hierarchy.

Key words: *nonlinear quantum BBGKY hierarchy, von Neumann hierarchy, correlation operator, quantum many-particle system.*

Introduction. The importance of the mathematical description of correlations in numerous problems of the modern statistical mechanics is well-known. Among them in particular, we refer to such fundamental