УДК 517.443

М. П. Ленюк, д-р фіз.-мат. наук, професор

Чернівецький факультет Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут», м. Чернівці

ОБЧИСЛЕННЯ НЕВЛАСНИХ ІНТЕГРАЛІВ ЗА ВЛАСНИМИ ЕЛЕМЕНТАМИ ГІБРИДНОГО ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА ЕЙЛЕРА — ЛЕЖАНДРА — ФУР`Є НА ПОЛЯРНІЙ ОСІ

Методом порівняння розв'язку крайової задачі для системи диференціальних рівнянь Ейлера, Лежандра та Фур'є на полярній осі $r \geq R_0 > 0$ з двома точками спряження, побудованого, з одного боку, методом функцій Коші, а з другого боку методом відповідного гібридного інтегрального перетворення, обчислено поліпараметричну сім`ю невласних інтегралів за власними елементами гібридного диференціального оператора Ейлера—Лежандра—Фур'є.

Ключові слова: *невласні інтеграли, функції Коші, головні розв'язки, гібридне інтегральне перетворення, умови однозначної розв'язності, основна тотожність, логічна схема.*

Постановка проблеми та її аналіз. Тонкостінні елементи конструкцій композитного типу,як правило, знаходяться в короткочасовому стаціонарному режимі, на який вони виходять після стрибкоподібного температурного або силового навантаження. Вивчення їх фізико-технічних характеристик приводить до задач термомеханіки (механіки) кусково-однорідних середовищ. Практика показує, що навіть у найпростіших випадках величини, які характеризують стаціонарний режим композита, зображаються поліпараметричним невласним інтегралом, який може бути умовно збіжним навіть тоді, коли зображає аналітичну функцію. Звідси виникає природне бажання замінити невласний інтеграл його результатом збіжності (функцією), що особливо важливо при інженерних розрахунках. Обчисленню однієї сім`ї невласних інтегралів присвячена ця стаття.

Основна частина. Побудуємо на множині

$$I_2^+ = \{r : r \in (R_0, R_1) \cup (R_1, R_2) \cup (R_2, \infty); R_0 > 0\}$$

розв'язок сепаратної системи звичайних диференціальних рівнянь Ейлера, Лежандра та Фур'є для модифікованих функцій

$$\left(B_\alpha^* - q_1^2\right) u_1(r) = -g_1(r), r \in (R_0, R_1),$$

$$\left(\Lambda_{(\mu)} - q_2^2\right) u_2(r) = -g_2(r), r \in (R_1, R_2), \tag{1}$$

$$\left(\frac{d^2}{dr^2}-q_3^2\right)u_3(r)=-g_3(r), r\in\left(R_2,\infty\right)$$

з крайовими умовами

$$\left.\left(\alpha_{11}^0\frac{d}{dr}+\beta_{11}^0\right)u_1(r)\right|_{r=R_0}=g_0, \lim_{r\to\infty}\left[r^{\gamma}u_3(r)\right]=0 \qquad (2)$$

та умовами спряження

$$\left.\left[\left(\alpha_{j1}^k\frac{d}{dr}+\beta_{j1}^k\right)u_k(r)-\left(\alpha_{j2}^k\frac{d}{dr}+\beta_{j2}^k\right)u_{k+1}(r)\right]\right|_{r=R_k}=\omega_{jk}; j,k=1,2. \quad (3)$$

У рівностях (1)—(3)

$q_1>0, q_2>0, q_3>0, c_{1k}c_{2k}>0, c_{jk}=\alpha_{2j}^k\beta_{1j}^k-\alpha_{1j}^k\beta_{2j}^k, \alpha_{jm}^k\ge 0,\ \beta_{jm}^k\ge 0;$

$\alpha_{11}^0\le 0, \beta_{11}^0\ge 0, \left|\alpha_{11}^0\right|+\beta_{11}^0\ne 0; B_{\alpha}^*=r^2\frac{d^2}{dr^2}+\left(2\alpha+1\right)r\frac{d}{dr}+\alpha^2$ — диференціальний оператор Ейлера [1];

$\Lambda_{(\mu)}=\frac{d^2}{dr^2}+cthr\frac{d}{dr}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\left(\frac{\mu_1^2}{1-chr}+\frac{\mu_2^2}{1+chr}\right)$ — узагальнений диференціальний оператор Лежандра, $\mu_1\ge\mu_2\ge 0$ [2]; $\frac{d^2}{dr^2}$ — диференціальний оператор Фур'є [3].

Фундаментальну систему розв'язків для диференціального рівняння Ейлера $\left(B_{\alpha}^*-q_1^2\right)v=0$ складають функції $v_1=r^{-\alpha-q_1}$ та $v_2=r^{-\alpha+q_1}$ [1]; фундаментальну систему розв'язків для диференціального рівняння Лежандра $\left(\Lambda_{(\mu)}-q_2^2\right)v=0$ складають узагальнені приєднані функції Лежандра першого роду $P_{\nu_2}^{(\mu)}(chr)$ та другого роду $L_{\nu_2}^{(\mu)}(chr)$ [2]; $\nu_2=-\frac{1}{2}+q_2$; фундаментальну систему розв'язків для диференціального рівняння Фур'є $\left(\frac{d^2}{dr^2}-q_3^2\right)v=0$ складають функції $v_1=\exp\left[+q_3\left(r-R_2\right)\right]$ та $v_2=\exp\left[-q_3\left(r-R_2\right)\right]$ [1].

Наявність фундаментальної системи розв'язків дозволяє будувати розв'язок крайової задачі (1)—(3) методом функцій Коші [1; 3]:

$$u_1(r) = A_1 r^{-\alpha-q_1} + B_1 r^{-\alpha+q_1} + \int\limits_{R_0}^{R_1} E_1(r,\rho) g_1(\rho) \rho^{2\alpha-1} d\rho,$$

$$u_2(r) = A_2 P_{\nu_2}^{(\mu)}(chr) + B_2 L_{\nu_2}^{(\mu)}(chr) + \int\limits_{R_1}^{R_2} E_2(r,\rho) g_2(\rho) sh\rho d\rho, \qquad (4)$$

$$u_3(r) = B_3 e^{-q_3(r-R_2)} + \int\limits_{R_2}^{\infty} E_3(r,\rho) g_3(\rho) d\rho.$$

Тут $E_j(r,\rho)$ — функції Коші [1; 3]:

$$E_j(r,\rho)\Big|_{r=\rho+0} - E_j(r,\rho)\Big|_{r=\rho-0} = 0,$$

$$\frac{d}{dr}E_j(r,\rho)\Big|_{r=\rho+0} - \frac{d}{dr}E_j(r,\rho)\Big|_{r=\rho-0} = -\frac{1}{\varphi_j(\rho)}, \qquad (5)$$

де $\varphi_1(r) = r^{2\alpha+1}, \varphi_2(r) = 1, \varphi_3(r) = shr.$

Безпосередньо перевіряється, що за функції Коші $E_j(r,\rho)$ можна взяти функції:

$$E_1(r,\rho) = -\frac{1}{2q_1 \Delta_{\alpha;11}(q_1, R_0, R_1)} \times$$

$$\times \begin{cases} \psi_{\alpha;11}^{0*}(q_1, r) \psi_{\alpha;11}^{1*}(q_1, \rho), \ R_0 < r < \rho < R_1, \\ \psi_{\alpha;11}^{0*}(q_1, \rho) \psi_{\alpha;11}^{1*}(q_1, r), \ R_0 < \rho < r < R_1, \end{cases} \qquad (6)$$

$$E_2(r,\rho) = \frac{B_{(\mu)}(q_2)}{\Delta_{\nu_2;11}^{(\mu)}(chR_1, chR_2)} \times$$

$$\times \begin{cases} \mathcal{F}_{\nu_2;12}^{(\mu),1}(chR_1, chr) \mathcal{F}_{\nu_2;11}^{(\mu),2}(chR_2, ch\rho), \ R_1 < r < \rho < R_2, \\ \mathcal{F}_{\nu_2;12}^{(\mu),1}(chR_1, ch\rho) \mathcal{F}_{\nu_2;11}^{(\mu),2}(chR_2, chr), \ R_1 < \rho < r < R_2, \end{cases} \qquad (7)$$

$$E_3(r,\rho) = \frac{1}{q_3(\alpha_{12}^2 q_3 - \beta_{12}^2)} \begin{cases} e^{-q_3(\rho-R_2)} \Phi_{12}^2(q_3 R_2, q_3 r), R_2 < r < \rho < \infty, \\ e^{-q_3(r-R_2)} \Phi_{12}^2(q_3 R_2, q_3 \rho), R_2 < \rho < r < \infty. \end{cases} \qquad (8)$$

Функції, які беруть участь у формулах (6)—(8), загальноприйняті [4; 5].

Крайова умова в точці $r = R_0$ та умови спряження (3) для визначення величин A_1, A_2, B_1, B_2, B_3, дають неоднорідну алгебраїчну систему рівнянь:

$$Z_{\alpha;11}^{01}(q_1, R_0) A_1 + Z_{\alpha;11}^{01}(q_1, R_0) B_1 = g_0$$

$$Z_{\alpha;j1}^{11}\left(q_1,R_1\right)A_1+Z_{\alpha;j1}^{12}\left(q_1,R_1\right)B_1-Z_{\nu_2;j1}^{(\mu),11}\left(chR_1\right)A_2-$$
$$-Z_{\nu_2;j2}^{(\mu),12}\left(chR_1\right)B_2=\omega_{j1}+\delta_{j2}G_{12},\ j=1,2; \tag{9}$$
$$Z_{\nu_2;j1}^{(\mu),21}\left(chR_2\right)A_2+Z_{\nu_2;j1}^{(\mu),22}\left(chR_2\right)B_2+\left(\alpha_{j2}^2q_3-\beta_{j2}^2\right)B_3=\omega_{j2}+\delta_{j2}G_{23}.$$

У системі (9) беруть участь функції:

$$G_{12}=\frac{c_{11}}{R_1^{2\alpha+1}}\int\limits_{R_0}^{R_1}\frac{\psi_{\alpha;11}^{0*}\left(q_1,\rho\right)}{\Delta_{\alpha;11}\left(q_1,R_0,R_1\right)}g_1(\rho)\rho^{2\alpha-1}d\rho-$$
$$-\frac{c_{21}}{shR_1}\int\limits_{R_1}^{R_2}\frac{\mathcal{F}_{\nu_2;11}^{(\mu),2}\left(chR_2,ch\rho\right)}{\Delta_{\nu_2;11}^{(\mu)}\left(chR_1,chR_2\right)}g_2(\rho)sh\rho d\rho,$$

$$G_{23}=\frac{c_{12}}{shR_2}\int\limits_{R_1}^{R_2}\frac{\mathcal{F}_{\nu_2;12}^{(\mu),1}\left(chR_1,ch\rho\right)}{\Delta_{\nu_2;11}^{(\mu)}\left(chR_1,chR_2\right)}g_2(\rho)sh\rho d\rho-c_{22}\int\limits_{R_2}^{\infty}\frac{e^{-q_3(\rho-R_2)}}{\alpha_{12}^2q_3-\beta_{12}^2}g_3(\rho)d\rho$$

та символ Кронекера $\delta_{j2}\left(\delta_{12}=0,\delta_{22}=1\right)$ [6].

Введемо до розгляду функції:

$$A_{\alpha,j}^{(\mu)}(q)=\Delta_{\alpha;21}\left(q_1,R_0,R_1\right)\Delta_{\nu_2;1j}^{(\mu)}\left(chR_1,chR_2\right)-$$
$$-\Delta_{\alpha;11}\left(q_1,R_0,R_1\right)\Delta_{\nu_2;2j}^{(\mu)}\left(chR_1,chR_2\right),$$
$$B_{(\mu),j}(q)=\left(\alpha_{12}^2q_3-\beta_{12}^2\right)\Delta_{\nu_2;j2}^{(\mu)}\left(chR_1,chR_2\right)-$$
$$-\left(\alpha_{22}^2q_3-\beta_{22}^2\right)\Delta_{\nu_2;j1}^{(\mu)}\left(chR_1,chR_2\right),$$
$$\theta_{\alpha,1}^{(\mu)}(r,q)=\Delta_{\alpha;21}\left(q_1,R_0,R_1\right)\mathcal{F}_{\nu_2;12}^{(\mu),1}\left(chR_1,chr\right)-$$
$$-\Delta_{\alpha;11}\left(q_1,R_0,R_1\right)\mathcal{F}_{\nu_2;22}^{(\mu),1}\left(chR_1,chr\right),$$
$$\theta_{(\mu);2}(r,q)=\left(\alpha_{22}^2q_3-\beta_{22}^2\right)\mathcal{F}_{\nu_2;11}^{(\mu),2}\left(chR_1,chr\right)-$$
$$-\left(\alpha_{12}^2q_3-\beta_{12}^2\right)\mathcal{F}_{\nu_2;21}^{(\mu),2}\left(chR_1,chr\right).$$

Припустимо, що виконана умова однозначної розв'язності крайової задачі (1)—(3): для будь-якого ненульового вектора $\vec{q}=\{q_1;q_2;q_3\}$ визначник алгебраїчної системи (9) відмінний від нуля [6]

$$\Delta_{\alpha}^{(\mu)}(q)\equiv\left(\alpha_{22}^2q_3-\beta_{22}^2\right)A_{\alpha;1}^{(\mu)}(q)-\left(\alpha_{12}^2q_3-\beta_{12}^2\right)A_{\alpha;2}^{(\mu)}(q)=$$
$$=\Delta_{\alpha;11}\left(q_1,R_0,R_1\right)B_{(\mu),2}(q)-\Delta_{\alpha;21}\left(q_1,R_0,R_1\right)B_{(\mu),1}(q)\neq 0. \tag{10}$$

Визначимо головні розв'язки крайової задачі (1)—(3):

1) породжені крайовою умовою в точці $r=R_0$ функції Гріна

$$W_{\alpha;11}^{(\mu)}\left(r,q\right)=\frac{1}{\Delta_{\alpha}^{(\mu)}(q)}\left[B_{(\mu);2}(q)\psi_{\alpha;11}^{1*}\left(q_1,r\right)-B_{(\mu);1}(q)\psi_{\alpha;21}^{1*}\left(q_1,r\right)\right],$$

$$W_{\alpha;12}^{(\mu)}\left(r,q\right)=-\frac{2q_1c_{11}}{R_1^{2\alpha+1}}\frac{1}{\Delta_{\alpha}^{(\mu)}(q)}\theta_{(\mu);2}\left(r,q\right), \qquad (11)$$

$$W_{\alpha;13}^{(\mu)}\left(r,q\right)=-\frac{2q_1c_{11}}{R_1^{2\alpha+1}}\frac{c_{12}}{B_{(\mu)}\left(q_2\right)shR_2}\frac{1}{\Delta_{\alpha}^{(\mu)}(q)}e^{-q_3(r-R_2)},$$

2) породжені неоднорідністю умов спряження функції Гріна

$$\mathcal{R}_{\alpha;11}^{(\mu),1}(r,q)=-\frac{B_{(\mu),2}}{\Delta_{\alpha}^{(\mu)}(q)}\psi_{\alpha;11}^{0*}\left(q_1,r\right),\quad \mathcal{R}_{\alpha;21}^{(\mu),1}(r,q)=\frac{B_{(\mu),1}}{\Delta_{\alpha}^{(\mu)}(q)}\psi_{\alpha;11}^{0*}\left(q_1,r\right),$$

$$\mathcal{R}_{\alpha;12}^{(\mu),1}\left(r,q\right)=\frac{c_{21}}{B_{(\mu)}\left(q_2\right)shR_1}\frac{\alpha_{22}^2q_3-\beta_{22}^2}{\Delta_{\alpha}^{(\mu)}(q)}\psi_{\alpha;11}^{0*}\left(q_1,r\right),$$

$$\mathcal{R}_{\alpha;22}^{(\mu),1}\left(r,q\right)=-\frac{c_{21}}{B_{(\mu)}\left(q_2\right)shR_1}\frac{\alpha_{12}^2q_3-\beta_{12}^2}{\Delta_{\alpha}^{(\mu)}(q)}\psi_{\alpha;11}^{0*}\left(q_1,r\right),$$

$$\mathcal{R}_{\alpha;11}^{(\mu),2}\left(r,q\right)=\frac{\Delta_{\alpha;21}}{\Delta_{\alpha}^{(\mu)}(q)}\theta_{(\mu);2}\left(r,q\right),\quad \mathcal{R}_{\alpha;21}^{(\mu),2}\left(r,q\right)=-\frac{\Delta_{\alpha;11}}{\Delta_{\alpha}^{(\mu)}(q)}\theta_{(\mu);2}\left(r,q\right),$$

$$\mathcal{R}_{\alpha;12}^{(\mu),2}\left(r,q\right)=\frac{\alpha_{22}^2q_3-\beta_{22}^2}{\Delta_{\alpha}^{(\mu)}(q)}\theta_{\alpha;1}^{(\mu)}\left(r,q\right),$$

$$\mathcal{R}_{\alpha;22}^{(\mu),2}\left(r,q\right)=-\frac{\alpha_{12}^2q_3-\beta_{12}^2}{\Delta_{\alpha}^{(\mu)}(q)}\theta_{\alpha;1}^{(\mu)}\left(r,q\right),$$

$$\mathcal{R}_{\alpha;11}^{(\mu),3}\left(r,q\right)=\frac{c_{12}}{B_{(\mu)}\left(q_2\right)shR_2}\frac{\Delta_{\alpha;21}\left(q_1,R_0,R_1\right)}{\Delta_{\alpha}^{(\mu)}(q)}e^{-q_3(r-R_2)},$$

$$\mathcal{R}_{\alpha;21}^{(\mu),3}\left(r,q\right)=-\frac{c_{12}}{B_{(\mu)}\left(q_2\right)shR_2}\frac{\Delta_{\alpha;11}\left(q_1,R_0,R_1\right)}{\Delta_{\alpha}^{(\mu)}(q)}e^{-q_3(r-R_2)}, \qquad (12)$$

$$\mathcal{R}_{\alpha;12}^{(\mu),3}\left(r,q\right)=-\frac{A_{\alpha,2}^{(\mu)}(q)}{\Delta_{\alpha}^{(\mu)}(q)}e^{-q_3(r-R_2)},\mathcal{R}_{\alpha;22}^{(\mu),3}\left(r,q\right)=\frac{A_{\alpha;1}^{(\mu)}(q)}{\Delta_{\alpha}^{(\mu)}(q)}e^{-q_3(r-R_2)},$$

3) породжені неоднорідністю системи (1) функції впливу

$$\mathcal{H}_{\alpha;11}^{(\mu)}\left(r,\rho,q\right)=-\frac{1}{2q_1}\begin{cases}\psi_{\alpha;11}^{0*}\left(q_1,r\right)W_{\alpha;11}^{(\mu)}\left(\rho,q\right),R_0<r<\rho<R_1,\\ \psi_{\alpha;11}^{0*}\left(q_1,\rho\right)W_{\alpha;11}^{(\mu)}\left(r,q\right),R_0<\rho<r<R_1,\end{cases}$$

$$\mathcal{H}_{\alpha;12}^{(\mu)}\left(r,\rho,q\right)=\frac{c_{21}}{shR_1}\frac{1}{\Delta_{\alpha}^{(\mu)}(q)}\psi_{\alpha;11}^{0*}\left(q_1,r\right)\theta_{(\mu);2}\left(\rho,q\right),$$

$$\mathcal{H}_{\alpha;13}^{(\mu)}(r,\rho,q)=\frac{c_{21}c_{22}}{B_{(\mu)}(q_2)shR_1}\frac{1}{\Delta_\alpha^{(\mu)}(q)}\psi_{\alpha;11}^{0*}(q_1,r)e^{-q_3(\rho-R_2)},$$

$$\mathcal{H}_{\alpha,21}^{(\mu)}\left(r,\rho,q\right)=\frac{c_{11}}{R_1^{2\alpha+1}}\frac{1}{\Delta_\alpha^{(\mu)}(q)}\psi_{\alpha;11}^{0*}\left(q_1,\rho\right)\theta_{(\mu);2}\left(r,q\right), \qquad (13)$$

$$\mathcal{H}_{\alpha,21}^{(\mu)}\left(r,\rho,q\right)=\frac{B_{(\mu)}(q_2)}{\Delta_\alpha^{(\mu)}(q)}\begin{cases}\theta_{\alpha,1}^{(\mu)}\left(r,q\right)\theta_{(\mu),2}\left(\rho,q\right), R_1<r<\rho<R_2,\\ \theta_{\alpha,1}^{(\mu)}\left(\rho,q\right)\theta_{(\mu),2}\left(r,q\right), R_1<\rho<r<R_2,\end{cases}$$

$$\mathcal{H}_{\alpha;23}^{(\mu)}\left(r,\rho,q\right)=\frac{c_{22}}{\Delta_\alpha^{(\mu)}(q)}\theta_{\alpha,1}\left(r,q\right)e^{-q_3(\rho-R_2)},$$

$$\mathcal{H}_{\alpha;31}^{(\mu)}\left(r,\rho,q\right)=\frac{c_{11}}{R_1^{2\alpha+1}}\frac{c_{12}}{B_{(\mu)}\left(q_2\right)shR_2}\frac{1}{\Delta_\alpha^{(\mu)}(q)}\psi_{\alpha;11}^{0*}\left(q_1,\rho\right)e^{-q_3(r-R_2)},$$

$$\mathcal{H}_{\alpha;32}^{(\mu)}\left(r,\rho,q\right)=\frac{c_{12}}{shR_2}\frac{1}{\Delta_\alpha^{(\mu)}(q)}\theta_{\alpha,1}^{(\mu)}\left(\rho,q\right)e^{-q_3(r-R_2)},$$

$$\mathcal{H}_{\alpha,33}^{(\mu)}(r,\rho,q)=\frac{1}{q_3\Delta_\alpha^{(\mu)}(q)}\begin{cases}e^{-q_3(\rho-R_2)}\Big[A_{\alpha,1}^{(\mu)}(q)\Phi_{22}^2\left(q_3R_2,q_3r\right)-\\ e^{-q_3(r-R_2)}\Big[A_{\alpha,1}^{(\mu)}(q)\Phi_{22}^2\left(q_3R_2,q_3\rho\right)-\end{cases}$$

$$-A_{\alpha,2}^{(\mu)}(q)\Phi_{12}^2\left(q_3R_2,q_3r\right)\Big],\ R_2<r<\rho<\infty,$$

$$-A_{\alpha,2}^{(\mu)}(q)\Phi_{12}^2\left(q_3R_2,q_3\rho\right)\Big],\ R_2<\rho<r<\infty.$$

У результаті однозначної розв'язності алгебраїчної системи (9) й підстановки одержаних значень $A_j\,(j=1,2;)$ та $B_k\,(k=\overline{1,3})$ у рівності (4) маємо єдиний розв'язок крайової задачі (1)—(3):

$$u_j(r)=W_{\alpha;1j}^{(\mu)}\left(r,q\right)g_0+\sum_{i,k=1}^{2}R_{\alpha;ik}^{(\mu),j}\left(r,q\right)\omega_{ik}+$$

$$+\int_{R_0}^{R_1}\mathcal{H}_{\alpha;j1}^{(\mu)}\left(r,\rho,q\right)g_1(\rho)\rho^{2\alpha-1}d\rho+ \qquad (14)$$

$$+\int_{R_1}^{R_2}\mathcal{H}_{\alpha;j2}^{(\mu)}\left(r,\rho,q\right)g_2(\rho)sh\rho d\rho+\int_{R_2}^{\infty}\mathcal{H}_{\alpha;j3}^{(\mu)}\left(r,\rho,q\right)g_3(\rho)d\rho,\ j=\overline{1,3}.$$

Побудуємо тепер розв'язок крайової задачі (1)—(3) методом інтегрального перетворення, породженого на множині I_2^+ гібридним диференціальним оператором (ГДО)

$$M_{\alpha}^{(\mu)} = \theta(r-R_0)\theta(R_1-r)B_{\alpha}^{*} + \theta(r-R_1)\theta(R_2-r)\Lambda_{(\mu)} + \theta(r-R_2)\frac{d^2}{dr^2}. \quad (15)$$

Диференціальний оператор $M_{\alpha}^{(\mu)}$ самоспряжений і на множині I_2^{+} має одну особливу точку $r=\infty$. Отже, його спектр дійсний та неперервний [4]. Можна вважати, що спектральний параметр $\beta \in (0,\infty)$. Йому відповідає дійсна спектральна вектор функція

$$V_{\alpha}^{(\mu)}(r,\beta) = \sum_{k=1}^{2} \theta(r-R_{k-1})\theta(R_k-r)V_{\alpha,k}^{(\mu)}(r,\beta) + \theta(r-R_2)V_{\alpha,3}^{(\mu)}(r,\beta), \quad (16)$$

де $\theta(x)$ — одинична функція Гевісайда [3].

При цьому функції $V_{\alpha,j}^{(\mu)}(r,\beta)$ повинні задовольняти відповідно диференціальні рівняння

$$\begin{gathered} \left(B_{\alpha}^{*} + b_1^2\right)V_{\alpha,1}^{(\mu)}(r,\beta) = 0, r \in (R_0, R_1), \\ \left(\Lambda_{(\mu)} + b_2^2\right)V_{\alpha,2}^{(\mu)}(r,\beta) = 0, r \in (R_1, R_2), \\ \left(\frac{d^2}{dr^2} + b_3^2\right)V_{\alpha,3}^{(\mu)}(r,\beta) = 0, r \in (R_2, \infty), \end{gathered} \quad (17)$$

крайові умови

$$\left(\alpha_{11}^{0}\frac{d}{dr} + \beta_{11}^{0}\right)V_{\alpha,1}^{(\mu)}(r,\beta)\Big|_{r=R_0} = 0, \ \lim_{r\to 0}\left[\frac{d^m V_{\alpha,3}^{(\mu)}}{dr^m}\right] = 0, \ m = 0,1 \quad (18)$$

та умови спряження

$$\left[\left(\alpha_{j1}^{k}\frac{d}{dr} + \beta_{j1}^{k}\right)V_{\alpha,k}^{(\mu)}(r,\beta) - \left(\alpha_{j2}^{k}\frac{d}{dr} + \beta_{j2}^{k}\right)V_{\alpha,k+1}^{(\mu)}(r,\beta)\right]\Big|_{r=R_k} = 0; \quad j,k = 1,2, \quad (19)$$

де $b_j = (\beta^2 + k_j^2)^{\frac{1}{2}}, k_j^2 \geq 0, j = \overline{1,3}.$

Фундаментальну систему розв'язків для диференціального рівняння Ейлера $\left(B_{\alpha}^{*} + b_1^2\right)v = 0$ складають функції $v_1 = r^{-\alpha}\cos(b_1 \ln r)$ та $v_2 = r^{-\alpha}\sin(b_1 \ln r)$ [1]; фундаментальну систему розв'язків для диференціального рівняння Лежандра $\left(\Lambda_{(\mu)} + b_2^2\right)v = 0$ складають функції $v_1 = A_{\upsilon_2^*}^{(\mu)}(chr)$ та $v_2 = B_{\upsilon_2^*}^{(\mu)}(chr)$ [2]; $\upsilon_2^* = -\frac{1}{2} + ib_2$; фундаментальну систему розв'язків для диференціального рівняння Фур'є $\left(\frac{d^2}{dr^2}+b_3^2\right)v=0$ складають функції $v_1=\cos b_3 r$ та $v_2=\sin b_3 r$ [1].

Якщо покласти

$$\begin{gathered}V_{\alpha,1}^{(\mu)}(r,\beta)=A_1 r^{-\alpha}\cos(b_1\ln r)+B_1 r^{-\alpha}\sin(b_1\ln r),\\ V_{\alpha,2}^{(\mu)}(r,\beta)=A_2 A_{\upsilon_2^*}^{(\mu)}(chr)+B_2 B_{\upsilon_2^*}^{(\mu)}(chr),\\ V_{\alpha,3}^{(\mu)}(r,\beta)=A_3\cos b_3 r+B_3\sin b_3 r,\end{gathered}\tag{20}$$

то крайова умова в точці $r=R_0$ та умови спряження (19) для визначення шести невідомих $A_j,B_j\,(j=\overline{1,3})$ дають однорідну алгебраїчну систему із п’яти рівнянь:

$$\begin{gathered}Y_{\alpha,11}^{01}(b_1,R_0)A_1+Y_{\alpha,11}^{02}(b_1,R_0)B_1=0,\\ Y_{\alpha,j1}^{11}(b_1,R_1)A_1+Y_{\alpha,j1}^{12}(b_1,R_1)B_1-\\ -Y_{\upsilon_2^*;j2}^{(\mu),11}(chR_1)A_2-Y_{\upsilon_2^*;j2}^{(\mu),12}(chR_1)B_2=0,\ j=1,2;\\ Y_{\upsilon_2^*,j1}^{(\mu),21}(chR_2)A_2+Y_{\upsilon_2^*,j1}^{(\mu),22}(chR_2)B_2-v_{j2}^{21}(b_3R_2)A_3-v_{j2}^{22}(b_3R_2)B_3=0.\end{gathered}\tag{21}$$

У системі (21) беруть участь функції [5]:

$$Y_{\alpha,jk}^{m1}(b_1,R_m)=\left[\left(\beta_{jk}^m-\alpha_{jk}^m R_{m\alpha}^{-1}\right)\cos(b_1\ln R_m)-b_1R_m^{-1}\alpha_{jk}^m\sin(b_1\ln R_m)\right],$$

$$Y_{\alpha,jk}^{m2}(b_1,R_m)=\left[\left(\beta_{jk}^m-\alpha_{jk}^m R_{m\alpha}^{-1}\right)\sin(b_1\ln R_m)+b_1R_m^{-1}\alpha_{jk}^m\cos(b_1\ln R_m)\right],$$

$$Y_{\upsilon_2^*,jk}^{(\mu),m1}(chR_m)=\left[\left(\alpha_{jk}^m\frac{d}{dr}+\beta_{jk}^m\right)A_{\upsilon_2^*}^{(\mu)}(chr)\right]\Bigg|_{r=R_m},$$

$$Y_{\upsilon_2^*,jk}^{(\mu),m2}(chR_m)=\left[\left(\alpha_{jk}^m\frac{d}{dr}\frac{d}{dr}+\beta_{jk}^m\right)B_{\upsilon_2^*}^{(\mu)}(chr)\right]\Bigg|_{r=R_m},$$

$$v_{j2}^{21}(b_3R_2)=-\alpha_{j2}^2 b_3\sin b_3R_2+\beta_{j2}^2\cos b_3R_2\equiv\left(\alpha_{j2}^2\frac{d}{dr}+\beta_{j2}^2\right)\cos b_3 r\Big|_{r=R_2},$$

$$v_{j2}^{22}(b_3R_2)=\alpha_{j2}^2 b_3\cos b_3R_2+\beta_{j2}^2\sin b_3R_2\equiv\left(\alpha_{j2}^2\frac{d}{dr}+\beta_{j2}^2\right)\sin b_3 r\Big|_{r=R_2},$$

Алгебраїчна система (21) сумісна [6]. Припустимо, що $A_1=A_0Y_{\alpha,11}^{02}(b_1,R_0)$, $B_1=-A_0Y_{\alpha,11}^{02}(b_1,R_0)$, де $A_0\neq 0$ й підлягає визначенню. Перше рівняння алгебраїчної системи (21) стає тотожністю.

Розглянемо алгебраїчну систему стосовно A_2,B_2:

$$Y^{(\mu)11}_{\upsilon_2^*;j2}\left(chR_1\right)A_2+Y^{(\mu),12}_{\upsilon_2^*;j2}\left(chR_1\right)B_2=\left[Y^{11}_{\alpha,j1}\left(b_1R_1\right)Y^{02}_{\alpha,11}\left(b_1R_0\right)-\right.$$
$$\left.-Y^{12}_{\alpha,j1}\left(b_1R_1\right)Y^{01}_{\alpha,11}\left(b_1R_0\right)\right]A_0\equiv -A_o\delta_{\alpha,j1}\left(b_1,R_0,R_1\right),\ j=1,2. \tag{22}$$

Визначник алгебраїчної системи (22)

$$q_{(\mu)}(\beta)\equiv Y^{(\mu),11}_{\upsilon_2^*;12}Y^{(\mu),12}_{\upsilon_2^*;22}-Y^{(\mu),11}_{\upsilon_2^*;22}Y^{(\mu),12}_{\upsilon_2^*;12}\left(chR_1\right)=\frac{c_{21}}{shR_1}\frac{1}{S_{(\mu)}\left(b_2\right)}\neq 0;$$

$$S_{(\mu)}(b_2)=\frac{2^{\mu_1-\mu_2}\pi^3\cos\left(\mu_1\pi\right)}{\left(\cos\mu_2\pi+\cos\mu_1\pi ch2\pi b_2\right)\left|\Gamma\left(\tfrac{1}{2}+ib_2+\upsilon^+_{12}\right)\right|^2\left|\Gamma\left(\tfrac{1}{2}+ib_2+\upsilon^-_{12}\right)\right|^2};$$

$$\upsilon^{\pm}_{12}=\frac{1}{2}(\mu_1\pm\mu_2).$$

Алгебраїчна система (22) має єдиний розв’язок [6]:

$$A_2=-\frac{A_0}{q_{(\mu)}(\beta_n)}\left[\delta_{\alpha;11}(b_1,R_0,R_1)Y^{(\mu),12}_{v_2^*,22}(chR_1)-\right.$$
$$\left.-\delta_{\alpha;21}(b_1,R_0,R_1)Y^{(\mu),12}_{v_2^*,12}(chR_1)\right],$$
$$B_2=\frac{A_0}{q_{(\mu)}(\beta_n)}\left[\delta_{\alpha;11}(b_1,R_0,R_1)Y^{(\mu),11}_{v_2^*,22}(chR_1)-\right.$$
$$\left.-\delta_{\alpha;21}(b_1,R_0,R_1)Y^{(\mu),11}_{v_2^*,12}(chR_1)\right]. \tag{23}$$

При відомих A_2,B_2 розглянемо алгебраїчну систему стосовно A_3,B_3:

$$v^{21}_{j2}\left(b_3R_2\right)A_3+v^{22}_{j2}\left(b_3R_2\right)B_3=A_0\left[q_{(\mu)}(\beta_n)\right]^{-1}a^{(\mu)}_{\alpha,j}(\beta\ ),\ j=1,2\,. \tag{24}$$

Визначник алгебраїчної системи (24)

$$v^{21}_{12}\left(b_3R_2\right)v^{22}_{22}\left(b_3R_2\right)-v^{21}_{22}\left(b_3R_2\right)v^{22}_{12}\left(b_3R_2\right)=c_{22}b_3\neq 0.$$

Алгебраїчна система (24) має єдиний розв’язок [6]:

$$A_3=\omega^{(\mu)}_{\alpha,2}(\beta),\ \ B_3=-\omega^{(\mu)}_{\alpha,1}(\beta),\ \ A_0=q_{(\mu)}(\beta)c_{22}b_3. \tag{25}$$

У рівностях (25) прийняті позначення:

$$\omega^{(\mu)}_{\alpha,j}(\beta)=a^{(\mu)}_{\alpha,1}(\beta)v^{2j}_{22}\left(b_3R_2\right)-a^{(\mu)}_{\alpha,2}(\beta)v^{2j}_{12}\left(b_3R_2\right),\ j=1,2;$$

$$a^{(\mu)}_{\alpha,j}(\beta)=\delta_{\alpha,11}\left(b_1,R_0,R_1\right)\delta^{(\mu)}_{v_2^*;2j}\left(chR_1,chR_2\right)-$$
$$-\delta_{\alpha,21}\left(b_1,R_0,R_1\right)\delta^{(\mu)}_{v_2^*;1j}\left(chR_1,chR_2\right);$$

$$\delta^{(\mu)}_{v_2^*;jk}\left(chR_1,chR_2\right)=Y^{(\mu),11}_{v_2^*;j2}\left(chR_1\right)Y^{(\mu),22}_{v_2^*;k1}\left(chR_2\right)-$$

$$-Y^{(\mu),12}_{\overset{*}{\nu}_2;j2}\left(chR_1\right)Y^{(\mu),21}_{\overset{*}{\nu}_2;k1}\left(chR_2\right).$$

Визначимо числа

$$\sigma_1=\frac{c_{11}c_{12}}{c_{21}c_{22}}\frac{shR_1}{R_1^{2\alpha+1}}\frac{1}{shR_2},\sigma_2=\frac{c_{12}}{c_{22}}\frac{1}{shR_2},\sigma_3=1,$$

вагову функцію

$$\begin{gathered}\sigma(r)=\theta\left(r-R_0\right)\theta\left(R_1-r\right)\sigma_1 r^{2\alpha-1}+\\+\theta\left(r-R_1\right)\theta\left(R_2-r\right)\sigma_2 shr+\theta\left(r-R_2\right)\sigma_3,\end{gathered}\tag{26}$$

та спектральну щільність

$$\Omega^{(\mu)}_{\alpha}(\beta)=\beta\left[b_3(\beta)\right]^{-1}\left(\left[\omega^{(\mu)}_{\alpha,1}(\beta)\right]^2+\left[\omega^{(\mu)}_{\alpha,2}(\beta)\right]^2\right)^{-1}.\tag{27}$$

Підставивши визначені величини A_j, B_j згідно формул (23) та (25) у рівності (20), отримуємо функції:

$$\begin{gathered}V^{(\mu)}_{\alpha,1}(r,\beta)=q_{(\mu)}(\beta)c_{22}b_3\times\\
\times\left[Y^{02}_{\alpha;11}\left(b_1,R_0\right)r^{-\alpha}\cos\left(b_1\ln r\right)-Y^{01}_{\alpha;11}\left(b_1,R_0\right)r^{-\alpha}\sin\left(b_1\ln r\right)\right],\\
V^{(\mu)}_{\alpha,2}(r,\beta)=c_{22}b_3\times\\
\times\left[\delta_{\alpha,11}\left(b_1,R_0,R_1\right)f^{(\mu),1}_{\overset{*}{\nu}_2,22}\left(chR_1,chr\right)-\delta_{\alpha,21}\left(b_1,R_0,R_1\right)f^{(\mu),1}_{\overset{*}{\nu}_2,12}(chR_1,chr)\right],\\
f^{(\mu),1}_{\overset{*}{\nu}_2,j2}\left(chR_1,chr\right)=Y^{(\mu),11}_{\overset{*}{\nu}_2,j2}\left(chR_1\right)B^{(\mu)}_{\overset{*}{\nu}_2}\left(chr\right)-Y^{(\mu),12}_{\overset{*}{\nu}_2,j2}\left(chR_1\right)A^{(\mu)}_{\overset{*}{\nu}_2}\left(chr\right),\ j=1,2;\\
V^{(\mu)}_{\alpha,3}(r,\beta)=\omega^{(\mu)}_{\alpha,2}(\beta)\cos b_3 r-\omega^{(\mu)}_{\alpha,1}(\beta)\sin b_3 r.\end{gathered}\tag{28}$$

Таким чином, спектральна вектор-функція $V^{(\mu)}_{\alpha}(r,\beta)$ згідно рівності (16) стає відомою.

Наявність спектральної функції $V^{(\mu)}_{\alpha}(r,\beta)$, вагової функції $\sigma(r)$, та спектральної щільності $\Omega^{(\mu)}_{\alpha}(\beta)$ дозволяє визначити пряме $H^{(\mu)}_{\alpha}$ й обернене $H^{-(\mu)}_{\alpha}$ гібридне інтегральне перетворення (ГІП), породжене на множині I_2^+ ГДО $M^{(\mu)}_{\alpha}$ [7]:

$$H^{(\mu)}_{\alpha}\left[g(r)\right]=\int\limits_{R_0}^{\infty}g(r)V^{(\mu)}_{\alpha}\left(r,\beta\right)\sigma(r)dr\equiv\tilde{g}(\beta),\tag{29}$$

$$H^{-(\mu)}_{\alpha}\left[\tilde{g}(\beta)\right]=\frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty}\tilde{g}(\beta)V^{(\mu)}_{\alpha}\left(r,\beta\right)\Omega^{(\mu)}_{\alpha}(\beta)d\beta\equiv g(r).\tag{30}$$

Введемо до розгляду величини та функції:

$$d_1=\sigma_1 R_1^{2\alpha+1}:c_{11}, d_2=\sigma_2 shR_2:c_{12}, \tilde{g}_1(\beta)=\int_{R_0}^{R_1} g_1(r)V_{\alpha,1}^{(\mu)}(r,\beta)\sigma_1 r^{2\alpha-1}dr,$$

$$\tilde{g}_2(\beta)=\int_{R_1}^{R_2} g_2(r)V_{\alpha,2}^{(\mu)}(r,\beta)\sigma_2 shrdr, \tilde{g}_3(\beta)=\int_{R_2}^{\infty} g_3(r)V_{\alpha,3}^{(\mu)}(r,\beta)\sigma_3 dr,$$

$$Z_{\alpha,i2}^{(\mu),k}(\beta)=\left(\alpha_{i2}^k\frac{d}{dr}+\beta_{i2}^k\right)V_{\alpha,k+1}^{(\mu)}(r,\beta)\big|_{r=R_k}; i,k=1,2.$$

Основна тотожність. Якщо вектор-функція $f(r)=\left\{B_\alpha^*[g_1(r)];\ \Lambda_{(\mu)}[g_2(r)]; g_3''(r)\right\}$ неперервна на множині I_2^+, а функції $g_j(r)$ задовольняють крайові умови (2) та умови спряження (3), то має місце основна тотожність ГІП ГДО $M_\alpha^{(\mu)}$:

$$\begin{aligned} H_\alpha^{(\mu)}\left[M_\alpha^{(\mu)}[g(r)]\right]=-\beta^2\tilde{g}(\beta)-\sum_{i=1}^{3}k_i^2\tilde{g}_i(\beta)+\left(-\alpha_{11}^0\right)^{-1}V_{\alpha;1}^{(\mu)}\times \\ \times\left(R_0,\beta\right)\sigma_1 R_0^{2\alpha+1}g_0+\sum_{k=1}^{2}d_k\left[Z_{\alpha;12}^{(\mu),k}(\beta)\omega_{2k}-Z_{\alpha;22}^{(\mu),k}(\beta)\omega_{1k}\right]. \end{aligned} \quad (31)$$

Правила (29), (30) та (31) складають математичний апарат для розв’язання крайової задачі (1)—(3) за відомою логічною схемою [5; 7].

Запишемо систему (1) в матричній формі:

$$\begin{bmatrix} \left(B_\alpha^*-q_1^2\right)u_1(r) \\ \left(\Lambda_{(\mu)}-q_2^2\right)u_2(r) \\ \left(\dfrac{d^2}{dr^2}-q_3^2\right)u_3(r) \end{bmatrix}=-\begin{bmatrix} g_1(r) \\ g_2(r) \\ g_3(r) \end{bmatrix}. \quad (32)$$

Інтегральний оператор $H_\alpha^{(\mu)}$ згідно правила (29) зобразимо у вигляді операторної матриці-рядка:

$$\begin{aligned} H_\alpha^{(\mu)}[...]=\Bigg[\int_{R_0}^{R_1}...V_{\alpha,1}^{(\mu)}(r,\beta)\sigma_1 r^{2\alpha-1}dr \quad \int_{R_1}^{R_2}...V_{\alpha,2}^{(\mu)}(r,\beta)\sigma_2 shrdr \\ \int_{R_2}^{\infty}...V_{\alpha,3}^{(\mu)}(r,\beta)\sigma_3 dr\Bigg]. \end{aligned} \quad (33)$$

Застосуємо операторну матрицю-рядок (33) до системи (32) за правилом множення матриць. Внаслідок тотожності (31) отримуємо алгебраїчне рівняння

$$\left(\beta^2+q^2\right)\tilde{u}(\beta)=\tilde{g}(\beta)+\left(-\alpha_{11}^{0}\right)^{-1}V_{\alpha,1}^{(\mu)}\left(R_0,\beta\right)\sigma_1 R_0^{2\alpha+1}g_0+$$

$$+\sum_{k=1}^{2}d_k\left[Z_{\alpha,12}^{(\mu),k}(\beta)\omega_{2k}-Z_{\alpha,22}^{(\mu),k}(\beta)\omega_{1k}\right],q^2=\max\left\{q_1^2;q_2^2;q_3^2\right\}.$$

Звідси знаходимо, що функція

$$\tilde{u}(\beta)=\frac{\tilde{g}(\beta)}{\beta^2+q^2}+\frac{V_{\alpha,1}^{(\mu)}\left(R_0,\beta\right)}{\left(-\alpha_{11}^{0}\right)\left(\beta^2+q^2\right)}\sigma_1 R_0^{2\alpha+1}g_0+$$

$$+\sum_{k=1}^{2}d_k\left[\frac{Z_{\alpha,12}^{(\mu),k}(\beta)}{\beta^2+q^2}\omega_{2k}-\frac{Z_{\alpha,22}^{(\mu),k}(\beta)}{\beta^2+q^2}\omega_{1k}\right]. \tag{34}$$

Інтегральний оператор $H_{\alpha}^{-(\mu)}$ згідно правила (30) як обернений до (33) зобразимо у вигляді операторної матриці-стовпця:

$$H_{\alpha}^{-(\mu)}[...]=\begin{bmatrix}\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\infty}...V_{\alpha;1}^{(\mu)}\left(r,\beta\right)\Omega_{\alpha}^{(\mu)}(\beta)d\beta\\ \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\infty}...V_{\alpha;2}^{(\mu)}\left(r,\beta\right)\Omega_{\alpha}^{(\mu)}(\beta)d\beta\\ \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\infty}...V_{\alpha;3}^{(\mu)}\left(r,\beta\right)\Omega_{\alpha}^{(\mu)}(\beta)d\beta\end{bmatrix}. \tag{35}$$

Застосуємо операторну матрицю-стовпець (35) за правилом множення матриць до матриці-елемента $[\tilde{u}(\beta)]$, де функція $\tilde{u}(\beta)$ визначена формулою (34). У результаті низки елементарних перетворень маємо єдиний розв’язок крайової задачі (1)—(3):

$$u_j(r)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\tilde{u}(\beta)V_{\alpha,j}^{(\mu)}\left(r,\beta\right)\Omega_{\alpha}^{(\mu)}(\beta)d\beta=$$

$$=\int_{R_0}^{R_1}\left(\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{V_{\alpha,j}^{(\mu)}\left(r,\beta\right)}{\beta^2+q^2}V_{\alpha,1}^{(\mu)}(\rho,\beta)\Omega_{\alpha}^{(\mu)}(\beta)d\beta\right)\times g_1(\rho)\sigma_1\rho^{2\alpha-1}d\rho+$$

$$+\int_{R_1}^{R_2}\left(\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{V_{\alpha,j}^{(\mu)}\left(r,\beta\right)}{\beta^2+q^2}V_{\alpha,2}^{(\mu)}(\rho,\beta)\Omega_{\alpha}^{(\mu)}(\beta)d\beta\right)g_2(\rho)\sigma_2 sh\rho d\rho+$$

$$+\int_{R_2}^{\infty}\left(\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{V_{\alpha,j}^{(\mu)}(r,\beta)}{\beta^2+q^2}V_{\alpha,3}^{(\mu)}(\rho,\beta)\Omega_{\alpha}^{(\mu)}(\beta)d\beta\right)\sigma_3 g_3(\rho)d\rho+ \quad (36)$$

$$+\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{V_{\alpha,1}^{(\mu)}(R_0,\beta)}{(-\alpha_{11}^0)(\beta^2+q^2)}V_{\alpha,j}^{(\mu)}(r,\beta)\Omega_{\alpha}^{(\mu)}(\beta)d\beta\sigma_1 R_0^{2\alpha+1}g_0+$$

$$+\sum_{k=1}^{2}d_k\left[\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{Z_{\alpha,12}^{(\mu),k}(\beta)}{\beta^2+q^2}V_{\alpha,j}^{(\mu)}(r,\beta)\Omega_{\alpha}^{(\mu)}(\beta)d\beta\omega_{2k}-\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{Z_{\alpha,22}^{(\mu),k}(\beta)}{\beta^2+q^2}\times\right.$$

$$\left.\times V_{\alpha,j}^{(\mu)}(r,\beta)\Omega_{\alpha}^{(\mu)}(\beta)d\beta\omega_{1k}\right],\ j=\overline{1,3}.$$

Порівнюючи розв'язки (14) та (36) в силу теореми єдиності, одержуємо формули обчислення поліпапаметричних невласних інтегралів:

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{V_{\alpha,j}^{(\mu)}(r,\beta)}{\beta^2+q^2}V_{\alpha,k}^{(\mu)}(\rho,\beta)\Omega_{\alpha}^{(\mu)}(\beta)d\beta=\sigma_k^{-1}\mathcal{H}_{\alpha;jk}^{(\mu)}(r,\rho,q);\ j,k=\overline{1,3}\,, \quad (37)$$

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{V_{\alpha,1}^{(\mu)}(R_0,\beta)}{(-\alpha_{11}^0)(\beta^2+q^2)}V_{\alpha,j}^{(\mu)}(r,\beta)\Omega_{\alpha}^{(\mu)}(\beta)d\beta= \quad (38)$$

$$=\left(\sigma_1 R_0^{2\alpha+1}\right)^{-1}W_{\alpha;1j}^{(\mu)}(r,q),\ j=\overline{1,3},$$

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{Z_{\alpha,12}^{(\mu),k}(\beta)}{\beta^2+q^2}V_{\alpha,j}^{(\mu)}(r,\beta)\Omega_{\alpha}^{(\mu)}(\beta)d\beta=d_k^{-1}\mathcal{R}_{\alpha,2k}^{(\mu),j}(r,q);k=1,2;\ j=\overline{1,3}, \quad (39)$$

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{Z_{\alpha,22}^{(\mu),k}(\beta)}{\beta^2+q^2}V_{\alpha,j}^{(\mu)}(r,\beta)\Omega_{\alpha}^{(\mu)}(\beta)d\beta=-d_k^{-1}\mathcal{R}_{\alpha,1k}^{(\mu);j}(r,q);k=1,2;\ j=\overline{1,3}. \quad (40).$$

Функції впливу $\mathcal{H}_{\alpha;jk}^{(\mu)}(r,\rho,q)$, де $q=(q_1,q_2,q_3)$, визначені згідно формул (13), функції Гріна $\mathcal{R}_{\alpha;ik}^{(\mu);j}(r,q)$ визначені згідно формул (12), а функції Гріна $W_{\alpha,1j}^{(\mu)}(r,q)$ — згідно формул (11).

Зауваження 1.
Якщо $q^2=q_1^2>0$, то $k_1^2=0, k_2^2=q_1^2-q_2^2\ge 0,\ \ k_3^2=q_1^2-q_3^2\ge 0;$
якщо $q^2=q_2^2>0$, то $k_1^2=q_2^2-q_1^2\ge 0, k_2^2=0, k_3^2=q_2^2-q_3^2\ge 0;$
якщо $q^2=q_3^2>0$, то $k_1^2=q_3^2-q_1^2\ge 0, k_2^2=q_3^2-q_2^2\ge 0, k_3^2=0.$

Зауваження 2. Праві частини в рівностях (37)—(40) не залежать від нерівностей $(q_j^2-q_m^2)\ge 0$. Це дає можливість в разі необхідності покласти $q_1^2=q_2^2=q_3^2\equiv q_0^2>0$.

Підсумком виконаного дослідження є твердження.

Основна теорема. Якщо вектор-функція $g(r) = \{g_1(r); g_2(r); g_3(r)\}$ задовольняє умови основної тотожності та виконується умова (10) однозначної розв'язності крайової задачі (1)—(3), то справджуються формули (37)—(40) обчислення поліпараметричних невласних інтегралів за власними елементами ГДО $M_{\alpha}^{(\mu)}$, визначеного рівністю (15).

Висновок. Одержані формули (37)—(40) обчислення поліпараметричних невласних інтегралів поповнюють довідкову математичну літературу в розділі обчислення невласних інтегралів від суперпозиції спеціальних функцій математичної фізики.

Список використаних джерел:

1. Степанов В. В. Курс дифференциальных уравнений / В. В. Степанов. — М. : Физматгиз, 1959. — 468 с.
2. Конет І. М. Інтегральні перетворення типу Мелера — Фока / І. М. Конет, М. П. Ленюк. — Чернівці : Прут, 2002. — 248 с.
3. Шилов Г. Е. Математический анализ. Второй специальный курс / Г. Е. Шилов. — М. : Наука, 1965. — 328 с.
4. Ленюк М. П. Гібридні інтегральні перетворення типу (Фур'є, Бесселя, Лежандра). Частина 1 / М. П. Ленюк, М. І. Шинкарик. — Тернопіль : Економ. думка, 2004. — 368 с.
5. Ленюк М. П. Обчислення поліпараметричних невласних інтегралів за власними елементами гібридних диференціальних операторів другого порядку / М. П. Ленюк. — Чернівці : Прут, 2010. — Том VI. — 404 с.
6. Курош А. Г. Курс высшей алгебры / А. Г. Курош. — М. : Наука, 1971. — 432 с.
7. Ленюк М. П. Гібридні інтегральні перетворення типу Ейлера—(Фур'є, Бесселя) / М. П. Ленюк. — Чернівці : Прут, 2009. — 76 с. — (Препринт / НАН України. Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача; 02.09).

The method of comparing the solution of boundary value problem for differential equations of Euler, Legendre and Fourierrniy on the field axis $r \geq R_0 > 0$ with the two coupling points, based on the one hand, by Cauchy functions, and on the other side of Metodom corresponding hybrid integral transformations calculated poliparametrychnu family yu improper integrals over elements of their own hybrid differential operator of Euler — Legendre — Fourier.

Key words: *improper integrals, Cauchy function, the main solutions, hybrid integral transform, the conditions determined unambiguously chnoyi solvability, the basic identity logic circuit.*

Отримано: 16.05.2011