28. Choi S. K. Stability in variation for nonlinear Volterra difference systems / S. K. Choi, N. J. Koo // Bull. Korean Math. Soc. — 2001. — Vol. 38, № 1. — P. 101—111.
29. Zouyousefain M. Stability results for difference equations of Volterra type / M. Zouyousefain, S. Leela // Appl. Math. Comp. — 1990. — Vol. 36, № 1. — P. 51—61.

A stepwise optimal control problem described by 2-D discrete systems is considered. Under assumptions of openness of a control domain, necessary optimality conditions of first and second order are obtained.

Key words: *Discrete two-parametric system, stepwise control problem, necessary optimality conditions, singular in the classical sense controls, classical extremals.*

Отримано: 27.03.2011

УДК 517.956

О. В. Мартинюк, канд. фіз.-мат. наук

Чернівецький національний університет
імені Юрія Федьковича, м. Чернівці

ЗАДАЧА КОШІ ДЛЯ СИНГУЛЯРНИХ ЕВОЛЮЦІЙНИХ РІВНЯНЬ У ЗЛІЧЕННО-НОРМОВАНИХ ПРОСТОРАХ НЕСКІНЧЕННО ДИФЕРЕНЦІЙОВНИХ ФУНКЦІЙ. I

У статті визначаються нові класи функцій-символів та нові класи псевдодиференціальних операторів, які будуються за такими символами з допомогою прямого та оберненого перетворення Бесселя. Встановлюється коректна розв’язність задачі Коші для еволюційних рівнянь з псевдо-Бесселевими операторами з початковими функціями з просторів типу розподілів Соболєва—Шварца.

Ключові слова: *перетворення Бесселя, простори основних функцій, простори узагальнених функцій, задача Коші, псевдо-Бесселеві оператори.*

Останні десятиліття інтенсивно досліджуються оператори, які формально можна подати у вигляді $A=\Im^{-1}_{\sigma\to x}\left[a\left(t,x,\sigma\right)\Im_{x\to\sigma}\right]$, де $\Im$, $\Im^{-1}$ — певні інтегральні перетворення (Фур’є, Бесселя, Фур’є—Бесселя, Фур’є на півосі та ін.), визначені в тому чи іншому просторі. Значна кількість праць присвячена вивченню властивостей оператора A, а також дослідженню еволюційних рівнянь з оператором A у випадку, коли $\Im = F$, де F — перетворення Фур’є. Функція a називається символом оператора A. До вказаного класу операторів належать диференціальні оператори, оператори дробового диференціювання та інтегрування, оператори згортки, тощо. Властивості оператора A істотно залежать від символу цього оператора. Важливими в застосуванні (у теорії випадкових процесів, теорії фракталів, теорії турбулентності) є оператори вказаного вигляду, які будуються за негладкими у точці $\sigma = 0$ і однорідними за аргументом σ символами, якщо символ задовольняє ще певні умови "параболічності", то він називається параболічним, а еволюційні рівняння з оператором A — параболічними псевдодиференціальними рівняннями.

До класу псевдодиференціальних рівнянь природно віднести і еволюційні рівняння з операторами, побудованими за допомогою інтегральних перетворень Бесселя або Фур'є—Бесселя (так звані псевдо-Бесселеві оператори [1]). Такі рівняння, як і рівняння з оператором Бесселя, вироджуються на межі області задання. Серед задач для еволюційних псевдодиференціальних рівнянь найбільше досліджувалася задача Коші. Для параболічних псевдодиференціальних рівнянь та еволюційних рівнянь з псевдо-Бесселевими операторами з гладкими символами задача Коші вивчалася в роботах С. Д. Ейдельмана, Я. М. Дріня, А. Н. Кочубея, Я. І. Житомирського, М. І. Матійчука, С. Д. Івасишена, В. В. Крехівського, В. В. Городецького, В. А. Літовченка, О. В. Мартинюк та ін. Отримано вагомі результати щодо коректності задачі Коші та властивостей її розв'язків. Зокрема, знайдено інтегральні зображення розв'язків у вигляді згортки фундаментальних розв'язків з початковими функціями.

У той же час еволюційні рівняння з псевдо-Бесселевими операторами, побудованими за однорідними, негладкими у фіксованій точці символами на теперішній час досліджені не достатньо повно. Задачу Коші для еволюційних рівнянь з операторами $F_{B_\nu}^{-1}\left[aF_{B_\nu}\right]$, де $F_{B_\nu}, F_{B_\nu}^{-1}$ — пряме та обернене перетворення Бесселя, $a = a(\sigma)$ — негладкий у точці 0 символ, у класі початкових даних, які є узагальненими функціями типу розподілів, вивчали В. В. Городецький, О. М. Ленюк, Н. М. Шевчук [1; 2]. Доведено коректну розв'язність задачі Коші, встановлено, що при кожному $t > 0$ розв'язок $u(t,\cdot)$ є елементом певного простору основних функцій Ф (до цього ж простору належить і фундаментальний розв'язок задачі Коші), але граничне значення існує вже у просторі $(Ф)'$ — просторі, топологічно спряженому до Ф; при цьому розв'язок подається у вигляді згортки фундаментального розв'язку вже з узагальненою початковою функцією.

Отже, природним є питання про розширення класу псевдо-Бесселевих операторів із негладкими символами (відповідно, класу сингулярних еволюційних рівнянь), розвиток теорії задачі Коші для таких рівнянь з початковими функціями з різних функціональних просторів, зокрема, з просторів узагальнених функцій як скінченного так і нескінченного порядків. Відповіді на ці питання даються в даній роботі, яка складається з чотирьох частин.

У першій частині будується зліченно-нормований простір θ нескінченно диференційовних на $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ функцій, який є природним середовищем дослідження задачі Коші для еволюційних рівнянь з псевдо-Бесселевими операторами; елементами такого простору є функції $e^{-a(\cdot)}$, де a — функція-символ, за якою будується відповідний псевдо-Бесселевий оператор, при цьому a є мультиплікатором у просторі θ. Подібні ситуації виникають при дослідженні еволюційних рівнянь параболічного типу за допомогою перетворення Фур'є. Наприклад, якщо розглянути рівномірно параболічне за Петровським рівняння вигляду $\partial u/\partial t = P(\lambda)u$, де $P(\lambda)$ — поліном степеня $2b, b\in\mathbb{N}$, то, як відомо [3], $P(\lambda)$ є мультиплікатором у просторі $S_{1/2b}^{1-1/2b}$ (просторі типу S, введеному в [3]), а $e^{P}\in S_{1/2b}^{1-1/2b}$, оскільки P задовольняє умову "параболічності" [4]. Тут досліджується топологічна структура простору θ та описуються класи функцій, які є мультиплікаторами в цьому просторі.

Простір $\theta_{M,\rho}$

Нехай M, ρ: $\mathbb{R}\to[0,+\infty)$ — неперервні, парні на $\mathbb{R}$ функції, диференційовні, монотонно зростаючі й необмежені на $(0,\infty)$, $M(0)=\rho(0)=0$, причому $\rho(x)=\int_0^x\omega(\xi)d\xi$ для $x\geq 0$, де ω — зростаюча, неперервна й необмежена на $[0,\infty)$ функція, $\omega(0)=0$. Функція ρ опукла (донизу) на $[0,+\infty)$, тобто

а) $\forall\{x_1,x_2\}\subset[0,+\infty)$: $\rho(x_1)+\rho(x_2)\leq\rho(x_1+x_2)$;

б) $\forall\alpha\geq 1$ $\forall x\in[0,\infty)$: $\rho(\alpha x)\geq\alpha\rho(x)$;

в) $\forall\alpha\in(0,1)$ $\forall x\in[0,\infty)$: $\rho(\alpha x)\leq\alpha\rho(x)$.

Припускаємо також, що виконуються наступні умови:

$$\forall\varepsilon>0\ \exists x_0=x_0(\varepsilon)>0\ \forall x\geq x_0:\ \rho(\varepsilon x)\geq M(x),$$

$$\rho(x)\underset{x\to 0+0}{\sim}x^{\gamma},\ \gamma\in(1,+\infty),\ M(x)\underset{x\to 0+0}{\sim}x^{\beta},\ \beta\in(0,1],$$

де γ та β — фіксовані параметри.

Символом $\theta_{M,\rho}$ позначимо сукупність усіх неперервних, парних на $\mathbb{R}$ функцій φ: $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, нескінченно диференційовних на $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, для яких

$$\exists a_0 > 0 \ \forall k \in \mathbb{Z}_+ \ \exists c'_k > 0 \ \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}:$$

$$M^k(x)\left|D_x^k \varphi(x)\right| \le c'_k \sum_{l=1}^{k} \rho^l(x) \cdot e^{-\rho\left(a_0 x\right)} \tag{1}$$

(якщо $k = 0$, то сума відсутня, якщо $k = 1$, то $l = 1$ і т.д.; якщо $k = 0$, то (1) справджується для всіх $x \in \mathbb{R}$).

Наведемо приклад функції із простору $\theta_{M,\rho}$, побудованому за конкретними функціями M та ρ. Для цього розглянемо функцію $\alpha: \ \mathbb{R} \to [0,\infty)$, яка використовується при побудові псевдодиференціальних операторів: α — неперервна, парна на $\mathbb{R}$ функція, однорідна порядку $\gamma > 1$, нескінченно диференційовна на $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, похідні цієї функції задовольняють умову:

$$\forall k \in \mathbb{N} \ \exists b_k > 0 \ \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : |D_x^k \alpha(x)| \le b_k \ |x|^{\gamma - k} \ .$$

Цю умову можна подати у вигляді:

$$M^k(x) \, | D_x^k \alpha(x) | \le b_k \rho(x), \ \ x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \ k \in \mathbb{N},$$

де $M(x) = |x|$, $\rho(x) = |x|^\gamma$. Тоді функція $\exp\{-\alpha(x)\}$ є елементом простору $\theta_{M,\rho}$ із вказаними вище функціями M та ρ (така функція є важливою при дослідженні задачі Коші для еволюційних рівнянь із псевдодиференціальними операторами, для яких вона є негладким у точці 0 однорідним символом). Справді, скориставшись формулою Фаа де Бруно диференціювання складеної функції

$$D_x^k\left(F\left(g(x)\right)\right) = \sum_{m=1}^{k} \frac{d^m}{dg^m} F(g) \times$$

$$\sum_{\substack{m_1 + \ldots + m_l = m \\ m_1 + 2m_2 + \ldots + l m_l = k}} \frac{k!}{m_1! \ldots m_l!} \left(\frac{d}{dx} g(x)\right)^{m_1} \ldots \left(\frac{1}{l!} \frac{d^l}{dx^l} g(x)\right)^{m_l}$$

(знак суми поширюється на всі розв'язки в цілих невід'ємних числах рівняння $k = m_1 + 2m_2 + \ldots + l m_l$, $m = m_1 + \ldots + m_l$) та поклавши тут $F = e^g$, $g = -\alpha(x)$, знайдемо, що

$$\left|D_x^k e^{-\alpha(x)}\right| \le c_k \sum_{m=1}^{k} |x|^{\gamma m - k} \cdot e^{-\alpha(x)}.$$

Записавши останню нерівність у вигляді

$$M^k(x) \, | D_x^k e^{-\alpha(x)} | \le c_k \sum_{m=1}^{k} \rho^m(x) e^{-\alpha(x)},$$

де $M(x) = |x|$, $\rho(x) = |x|^\gamma$, знайдемо, що функція $\exp\{-\alpha(x)\}$ є елементом простору $\theta_{M,\rho} = \theta_{|x|,|x|^\gamma}$.

Зазначимо, що із умови (1) випливає, що функції з $\theta_{M,\rho}$ задовольняють також нерівності

$$M^k(x)\,|\,D_x^k a(x)\,|\le c_k e^{-\rho(ax)}, k\in\mathbb{Z}_+, x\in\mathbb{R}\setminus\{0\},$$

де $0<a<a_0$. Справді, для x: $0\le\rho(x)\le 1$ дістаємо $\sum_{l=1}^{k}\rho^l(x)\le\beta_k$.

Для інших значень x справджується, наприклад, нерівність

$$\sum_{l=1}^{k}\rho^l(x)e^{-\rho(a_0x)}\le\tilde{\beta}_k e^{-\rho\left(\frac{a_0}{2}x\right)}\equiv\tilde{\beta}_k e^{-\rho(ax)},\ a=a_0/2.$$

Лема 1. *У функції* $D_x^k\varphi$, $\varphi\in\theta_{M,\rho}$, $x\ne 0$, $k\in\mathbb{Z}_+$, *існують скінченні односторонні границі* $\lim\limits_{x\to\pm 0}D_x^k\varphi(x)$.

Доведення. Доведення проведемо методом математичної індукції. Для $k=0$ твердження є очевидним, оскільки φ — неперервна на $\mathbb{R}$ функція. Припустимо, що твердження є правильним для функції $\psi(x):=D_x^k\varphi(x)$, тобто, існує скінченна правостороння границя $\lim\limits_{x\to+0}\psi(x)$ (випадок скінченної лівосторонньої границі розглядається аналогічно). Доведемо, що функція $\psi'(x)=D_x^{k+1}\varphi(x)$, $x\ne 0$, також має скінченну правосторонню границю у точці $x=0$.

Припустимо, що це не так, тобто $\lim\limits_{x\to+0}\psi'(x)=+\infty$. Іншими словами,

$$\forall B>0\ \exists\delta=\delta(B)>0\ \forall x: 0<x<\delta\Rightarrow\psi'(x)>B.$$

Із означення похідної функції в точці випливає, що

$$\forall\varepsilon_0\in(0,B)\ \ \exists\delta_0=\delta_0(\varepsilon_0)>0:\ |\Delta x|<\delta_0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left|\frac{\psi(x+\Delta x)-\psi(x)}{\Delta x}-\psi'(x)\right|<\varepsilon_0,\quad x\ne 0.$$

Отже,

$$\frac{\psi(x+\Delta x)-\psi(x)}{\Delta x}>\psi'(x)-\varepsilon_0>B-\varepsilon_0, x\in(0,\delta).$$

Для $\Delta x\in(0,\delta_0)$ правильною є нерівність:

$$\psi\left(x+\Delta x\right)>\left(B-\varepsilon_0\right)\Delta x+\psi(x).$$

За умовою $\lim\limits_{x\to+0}\psi(x)=c<+\infty$, тобто

$$\forall\varepsilon_1>0\,\exists\delta_1=\delta_1(\varepsilon_1)>0\,\forall x: 0<x<\delta_1\Rightarrow\left|\psi(x)-c\right|<\varepsilon_1,$$

або $\psi(x) > c - \varepsilon_1$. Отже, для $\Delta x \in (0, \tilde{\delta})$, $\tilde{\delta} = \min\{\delta_0, \delta_1\}$, $x \in (0, \delta)$, справджується нерівність

$$\psi(x + \Delta x) > (B - \varepsilon_0)\Delta x + c - \varepsilon_1. \qquad (2)$$

Оскільки функція ψ неперервна на $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, то $\lim\limits_{x \to +0} \psi(x + \Delta x) = \psi(\Delta x)$. Урахувавши це співвідношення перейдемо до границі при $x \to +0$ в нерівності (2); в результаті одержимо, що

$$\psi(\Delta x) \ge (B - \varepsilon_0)\Delta x + c - \varepsilon_1,$$

де $B > 0$ — довільне число. Це число завжди можна підібрати так, що $\psi(\Delta x) > c + \varepsilon_1$, $\Delta x \in (0, \tilde{\delta})$, що суперечить припущенню $\lim\limits_{x \to +0} \psi(x) = c < \infty$ (бо тоді $\psi(x) < c + \varepsilon_1$, якщо $x \in (0, \tilde{\delta})$).

Якщо припустити, що $\lim\limits_{x \to +0} \psi'(x) = -\infty$, то, міркуючи аналогічно, прийдемо до суперечності з припущенням про існування скінченної границі у функції $\psi(x)$ при $x \to +0$.

Нехай тепер $\lim\limits_{x \to +0} \psi'(x)$ не існує. Це означає, що для довільного B (зокрема, для довільного $B > 0$) знайдеться $\omega = \omega(B) > 0$ таке, що $|\psi'(x) - B| \ge \omega$ для всіх $x \in (0, \delta)$, де $\delta > 0$ — довільне. Звідси дістаємо, що для $x \in (0, \delta)$ справджується нерівність $\psi'(x) \ge B + \omega$. Далі доведення здійснюється за схемою дослідження випадку $\lim\limits_{x \to +0} \psi'(x) = +\infty$. Аналогічні міркування застосовуються і у випадку, коли не існує $\lim\limits_{x \to -0} \psi'(x)$.

Твердження доведено.

Наслідок. *Функція* $D_x^{2k}\varphi$, $x \ne 0$, $\varphi \in \theta_{M,\rho}$, $k \in \mathbb{N}$, *у точці* $x = 0$ *має усувний розрив.*

Лема 2. *Кожна функція* $\varphi \in \theta_{M,\rho}$ *у точці 0 задовольняє умову Діні.*

Доведення. Умова Діні для інтегровної функції f в точці $x \in \mathbb{R}$ полягає в тому, що при деякому $\delta > 0$ збіжним є інтеграл

$$\int_{-\delta}^{\delta} \left| \frac{f(x+t) - f(x)}{t} \right| dt.$$

У даному випадку $x = 0$, $f = \varphi$; потрібно довести, що при деякому $\delta > 0$ існує інтеграл

$$\int_{-\delta}^{\delta}\left|\frac{\varphi(t)-\varphi(0)}{t}\right|dt \equiv \int_{-\delta}^{\delta}|\psi(t)|\,dt,$$

який ми розуміємо як невласний, тобто

$$\int_{-\delta}^{\delta}|\psi(t)|\,dt=\lim_{\varepsilon\to+0}\left(\int_{\varepsilon}^{\delta}|\psi(t)|\,dt+\int_{-\delta}^{-\varepsilon}|\psi(t)|\,dt\right).$$

До інтеграла $\int_{\varepsilon}^{\delta}|\psi(t)|\,dt$ застосуємо теорему про середнє значення, врахувавши при цьому, що на проміжку $[\varepsilon,\delta]$ функція $|\psi|$ неперервна:

$$\int_{\varepsilon}^{\delta}|\psi(t)|\,dt=(\delta-\varepsilon)|\psi(\tilde{\delta})|,\quad \varepsilon<\tilde{\delta}<\delta.$$

Оскільки

$$|\psi(\tilde{\delta})|=\frac{|\varphi(\tilde{\delta})-\varphi(0)|}{\tilde{\delta}}=|\varphi'(\tilde{\tilde{\delta}})|,\quad \varepsilon<\tilde{\tilde{\delta}}<\tilde{\delta},$$

то

$$\int_{0}^{\delta}|\psi(t)|\,dt=\lim_{\varepsilon\to+0}(\delta-\varepsilon)|\varphi'(\tilde{\tilde{\delta}})|.$$

На проміжку $[\varepsilon,\delta]$ функція $|\psi'|$ обмежена як неперервна; за рахунок умови $\lim\limits_{x\to+0}\varphi'(x)<\infty$ (див. лему 1) вона буде обмеженою і на проміжку $[0,\delta]$, тобто $\int_{0}^{\delta}|\psi(t)|\,dt<\infty$. Аналогічно доводимо, що $\int_{-\delta}^{0}|\psi(t)|\,dt<+\infty$. Отже, умова Діні в точці 0 для функції $\varphi\in\theta_{M,\rho}$ виконується.

Символом $\theta_{M,\rho,a}$ позначимо сукупність тих функцій φ з простору $\theta_{M,\rho}$, які при довільному $\delta\in(0,a)$ задовольняють нерівності

$$M^k(x)\left|D_x^k\varphi(x)\right|\le c_{k\delta}e^{-\rho((a-\delta)x)},\ x\in\mathbb{R}\setminus\{0\},\ k\in\mathbb{Z}_+$$

(якщо $k=0$, то $x\in\mathbb{R}$). Введемо в $\theta_{M,\rho,a}$ структуру зліченно-нормованого простору, поклавши

$$\|\varphi\|_{p,a}:=\sup_{x\in(0,\infty)}\left\{\exp\left\{\rho\left(a\left(1-\frac{1}{p+2}\right)x\right)\right\}\cdot\sum_{k=0}^{p}M^{2k}(x)\left|D_x^{2k}\varphi(x)\right|\right\},$$

$$\varphi \in \theta_{M,\rho}, p \in \mathbb{Z}_+.$$

Покладемо $\Omega_p(x) = \exp\left\{\rho\left(a\left(1-\frac{1}{p+2}\right)x\right)\right\}$; функції $\Omega_p(x)$ утворюють зростаючу послідовність і

$$\|\varphi\|_{0,a} \le \|\varphi\|_{1,a} \le \ldots \le \|\varphi\|_{p,a} \le \ldots$$

Символом $\theta^p_{M,\rho,a}$ позначимо поповнення простору $\theta_{M,\rho,a}$ за нормою $\|\cdot\|_{p,a}$. При цьому $\theta^0_{M,\rho,a} \supset \theta^1_{M,\rho,a} \supset \ldots \supset \theta^p_{M,\rho,a} \supset \ldots$, вкладення $\theta^{p+1}_{M,\rho,a} \subset \theta^p_{M,\rho,a}$, $p \in \mathbb{Z}_+$, є неперервними, $\theta_{M,\rho,a} = \bigcap\limits_{p=0}^{\infty} \theta^p_{M,\rho,a}$. Доведемо, що $\theta_{M,\rho,a}$ — повний зліченно-нормований простір. Оскільки $\theta_{M,\rho,a} = \bigcap\limits_{p=0}^{\infty} \theta^p_{M,\rho,a}$, то досить встановити [3], що норми $\|\cdot\|_{p,a}$ та $\|\cdot\|_{p+1,a}$ узгоджені між собою. Урахувавши нерівність $\|\cdot\|_{p,a} \le \|\cdot\|_{p+1,a}$, доведення властивості узгодженості цих норм зводиться до такого: нехай послідовність $\{\varphi_\nu, \nu \ge 1\} \subset \theta_{M,\rho,a}$ фундаментальна за нормою $\|\cdot\|_{p+1,a}$ і збігається до нуля за нормою $\|\cdot\|_{p,a}$. Потрібно довести, що дана послідовність збігається до нуля і за нормою $\|\cdot\|_{p+1,a}$. Однак це твердження випливає з того, що простір $\theta^p_{M,\rho,a}$ — банаховий.

Зауваження 1. Збіжність послідовності $\{\varphi_\nu, \nu \ge 1\} \subset \theta_{M,\rho,a}$ у просторі $\theta_{M,\rho,a}$ до функції $\varphi \in \theta_{M,\rho,a}$ можна охарактеризувати ще й так: $\{\varphi_\nu, \nu \ge 1\} \subset \theta_{M,\rho,a}$ збігається за топологією простору $\theta_{M,\rho,a}$ до $\varphi \in \theta_{M,\rho,a}$ тоді й лише тоді, коли вона:

1) обмежена в $\theta_{M,\rho,a}$, тобто

$$\forall p \in \mathbb{Z}_+ \; \exists c = c(p) > 0 \; \forall \nu \ge 1 : \|\varphi_\nu\|_{p,a} \le c;$$

2) для довільного $k \in \mathbb{Z}_+$ послідовність $\left\{D_x^{2k}(\varphi_\nu - \varphi), \nu \ge 1\right\}$ збігається до нуля рівномірно на кожному компакті $\mathbb{K} \subset (0,\infty)$.

Справді, необхідність цього твердження очевидна. Доведемо його достатність, припустивши спочатку, що $\varphi = 0$. Зафіксуємо $p \in \mathbb{Z}_+$. Із умови 1) випливає, що

$$\lim_{x\to+\infty} \exp\left\{\rho\left(a\left(1-\frac{1}{p+2}\right)x\right)\right\} M^{2k}(x)\,|\,D_x^{2k}\varphi_\nu(x)\,| = \alpha_\nu, \tag{3}$$

$$\alpha_\nu = \alpha_\nu(k),\ 0 \le k \le p,\ 0 \le \alpha_\nu \le c,\ \forall \nu \ge 1.$$

Послідовність $\{\alpha_\nu, \nu \ge 1\}$ є обмеженою, тому існує $\inf\limits_{\nu\in\mathbb{N}}\{\alpha_\nu\} \ge 0$.

Доведемо, що $\inf\limits_{\nu\in\mathbb{N}}\{\alpha_\nu\} = 0$. Нехай це не так, тобто $\inf\limits_{\nu\in\mathbb{N}}\{\alpha_\nu\} = \alpha > 0$. Скориставшись співвідношенням (3) для $\varepsilon = \alpha/2 > 0$ знайдемо $N = N(\varepsilon, k, \nu)$ таке, що

$$\forall x : x > N \Rightarrow \exp\left\{\rho\left(a\left(1-\frac{1}{p+2}\right)x\right)\right\} M^{2k}(x)\,|\,D_x^{2k}\varphi_\nu(x)\,| >$$

$$> \alpha_\nu - \frac{\alpha}{2} \ge \inf_{\nu\in\mathbb{N}}\{\alpha_\nu\} - \frac{\alpha}{2} = \alpha - \frac{\alpha}{2} = \frac{\alpha}{2}.$$

Нехай $\sup\limits_{\nu\in\mathbb{N}}\{N(\varepsilon,k,\nu)\} = \tilde{N} < +\infty$, $\tilde{N} = \tilde{N}(\varepsilon, k)$, k — фіксоване. На відрізку $[\tilde{N}, 2\tilde{N}]$ справджуються нерівності

$$\left|D_x^{2k}\varphi_\nu(x)\right| \ge \frac{\alpha}{2\exp\left\{\rho\left(a\left(1-\frac{1}{p+2}\right)x\right)\right\} M^{2k}(x)} \ge \frac{\alpha}{2M^{2k}\left(2\tilde{N}\right)} \equiv \beta_0 > 0.$$

Внаслідок умови 2), яку задовольняє послідовність $\{\varphi_\nu, \nu \ge 1\}$, $D_x^{2k}\varphi_\nu$ рівномірно збігається до 0 при $\nu \to +\infty$ на відрізку $[\tilde{N}, 2\tilde{N}] \subset (0,\infty)$ при кожному фіксованому $k:\ 0 \le k \le p$. У той же час із останньої нерівності випливає, що $D_x^{2k}\varphi_\nu \not\to 0$ при $\nu \to +\infty$ на $[\tilde{N}, 2\tilde{N}]$. Одержана суперечність доводить, що в цьому випадку $\alpha = 0$.

Якщо $\sup\limits_{\nu\in\mathbb{N}}\{N(\varepsilon,k,\nu)\} = +\infty$, то на підставі властивостей точної верхньої межі твердимо, що для $A_n = A - \dfrac{1}{n}$, $A > 1$, $n \ge 1$, знайдеться $N\left(\varepsilon, k, \nu_n\right)$ таке, що $N\left(\varepsilon, k, \nu_n\right) > A_n$, $n \ge 1$. Тоді для всіх $x:\ x > A$ та $\nu_n \ge 1$ справджується нерівність

$$\exp\left\{\rho\left(a\left(1-\frac{1}{p+2}\right)x\right)\right\} M^{2k}(x)\,|\,D_x^{2k}\varphi_{\nu_n}(x)\,| > \frac{\alpha}{2}.$$

Отже, на відрізку $[A, 2A]$

$$\left|D_x^{2k}\varphi_{\nu_n}(x)\right| \geq \frac{\alpha}{2\exp\left\{\rho\left(a\left(1-\frac{1}{p+2}\right)x\right)\right\}M^{2k}(x)} \geq \frac{\alpha}{2M^{2k}\left(2A\right)} \equiv \beta_1 > 0.$$

З умови 2) випливає також, що $D_x^{2k}\varphi_\nu$ рівномірно збігається до 0 при $n\to\infty$ на відрізку $[A, 2A]$. З останньої нерівності дістаємо, що $D_x^{2k}\varphi_{\nu_n} \nrightarrow 0$ при $n\to\infty$ на відрізку $[A, 2A]$, що неможливо. Цим доведено правильність співвідношення $\inf\limits_{\nu\in\mathbb{N}}\left\{\alpha_\nu\right\} = 0$.

Із властивостей точної нижньої межі числової множини випливає існування підпослідовності $\{\alpha_{\nu_j}, j\geq 1\}$ послідовності $\left\{\alpha_\nu, \nu\geq 1\right\}$, яка збігається до нуля. Символом $\mathscr{F}$ позначимо сукупність усіх підпослідовностей послідовності $\{\alpha_\nu, \nu\geq 1\}$, які не збігаються до нуля. Нехай $\mathscr{F} = \left\{\alpha_{\nu'}, \nu'\geq 1\right\}$. Згідно з цим припущенням кожна послідовність $\{\alpha_{\nu'}, \nu'\geq 1\}$ є такою, що $\inf\limits_{\nu'}\left\{\alpha_{\nu'}, \nu'\geq 1\right\} = \gamma_0 > 0$. Міркуючи аналогічно попередньому, знайдемо відрізок $[a,b]\subset(0,+\infty)$, на якому $D_x^{2k}\varphi_{\nu'} \nrightarrow 0$ при $\nu'\to\infty$, що суперечить умові 2), яку задовольняє послідовність $\left\{\varphi_\nu, \nu\geq 1\right\}$. Отже, $\mathscr{F}$ складається лише із скінченних підпослідовностей послідовностей $\left\{\alpha_\nu, \nu\geq 1\right\}$. Звідси вже дістаємо, що всеможливі підпослідовності, які можна утворити з послідовності $\left\{\alpha_\nu, \nu\geq 1\right\}$, збігаються до нуля. Таким чином, доведено, що

$$\lim_{\nu\to\infty}\alpha_\nu \equiv \lim_{\nu\to\infty}\left(\lim_{x\to\infty}\exp\left\{\rho\left(a\left(1-\frac{1}{p+2}\right)x\right)\right\}M^{2k}(x)\left|D_x^{2k}\varphi_\nu(x)\right|\right) = 0,$$

$$0\leq k\leq p.$$

Отже, для заданого $\varepsilon > 0$

$$\exists\,\nu_0 = \nu_{0,k}(\varepsilon)\,\forall\,\nu\geq\nu_0 : \alpha_\nu < \varepsilon,$$

$$\exists R = R(\varepsilon)\,\forall\,\nu\geq\nu_0\ \forall x : x > R \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \exp\left\{\rho\left(a\left(1-\frac{1}{p+2}\right)x\right)\right\}M^{2k}(x)\left|D_x^{2k}\varphi_\nu(x)\right| < \alpha_\nu + \varepsilon < 2\varepsilon.$$

Введемо позначення: $\tilde{\nu}_0 = \max\left\{\nu_{0,0}(\varepsilon), \nu_{0,1}(\varepsilon), \ldots, \nu_{0,p}(\varepsilon)\right\}$. Тоді остання нерівність правильна для всіх k: $0 \le k \le p$, $\nu \ge \tilde{\nu}_0$ і для всіх $x \in (R, +\infty)$.

Оскільки у функції $D_x^{2k}\varphi_\nu$, $\nu \ge 1$, у точці $x = 0$ існують скінченні односторонні границі, рівні між собою, то звідси та з умови 2) випливає, що для заданого $\varepsilon > 0$

$$\exists\, \nu_0' = \nu_{0,k}'(\varepsilon)\, \forall\, \nu \ge \nu_0 : \sup_{x\in(0,R]} \left| D_x^{2k}\varphi_\nu(x) \right| < \varepsilon.$$

Нехай

$$\tilde{\tilde{\nu}}_0 = \max\left\{\nu_{0,0}'(\varepsilon), \nu_{0,1}'(\varepsilon), \ldots, \nu_{0,p}'(\varepsilon)\right\}, \nu_0^* = \max\left\{\tilde{\nu}_0, \tilde{\tilde{\nu}}_0\right\}.$$

Тоді остання нерівність справджується на проміжку $(0, R]$ для всіх k: $0 \le k \le p$, починаючи з номера ν_0^*. Отже,

$$\forall\, \nu \ge \nu_0^*\, \forall x \in (0, R] : \Omega_p(x) M^{2k}(x) \,|\, D_x^{2k}\varphi_\nu(x) \,| < \gamma_k(R)\cdot\varepsilon,$$

$$\forall\, \nu \ge \nu_0^*\, \forall x \in (R, +\infty) : \Omega_p(x) M^{2k}(x) \,|\, D_x^{2k}\varphi_\nu(x) \,| < 2\varepsilon,$$

де $\gamma_k(R) = \Omega_p(R)\cdot M^{2k}(R)$. Тоді для всіх $\nu \ge \nu_0^*$

$$\left\|\varphi_\nu\right\|_{p,a} = \sup_{x\in(0,\infty)} \left\{\Omega_p(x) \sum_{k=0}^{p} M^{2k}(x) \,|\, D_x^{2k}\varphi_\nu(x) \,|\right\} \le$$

$$\le \sup_{x\in(0,R]} \left\{\Omega_p(x) \sum_{k=0}^{p} M^{2k}(x) \,|\, D_x^{2k}\varphi_\nu(x) \,|\right\} +$$

$$+ \sup_{x\in(R,+\infty)} \left\{\Omega_p(x) \sum_{k=0}^{p} M^{2k}(x) \left| D_x^{2k}\varphi_\nu(x) \right|\right\} < \omega_p \cdot \varepsilon,$$

де

$$\omega_p = \Omega_p(R) \sum_{k=0}^{p} M^{2k}(R) + 2(p+1).$$

Таким чином,

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists\, \nu_0^* = \nu_0^*(\varepsilon)\, \forall\, \nu \ge \nu_0^* : \left\|\varphi_\nu\right\|_{p,a} < \omega_p \cdot \varepsilon.$$

Це і означає, що $\varphi_\nu \to 0$ при $\nu \to \infty$ у просторі $\theta_{M,\rho,a}$, що й потрібно було довести.

Загальний випадок ($\varphi \ne 0$) зводиться до попереднього, оскільки для послідовності $\left\{\psi_\nu := \varphi_\nu - \varphi, \nu \ge 1\right\}$ умови 1), 2) набувають вигляду:

1) $\left\|\psi_\nu\right\|_{p,a} = \left\|\varphi_\nu - \varphi\right\|_{p,a} \le \left\|\varphi_\nu\right\|_{p,a} + \left\|\varphi\right\|_{p,a} \le c_p + \left\|\varphi\right\|_{p,a} \equiv \tilde{c}_p$;

2) для кожного $k \in \mathbb{Z}_+$ послідовність $\left\{ D_x^{2k} \psi_\nu, \nu \geq 1 \right\}$ збігається до нуля рівномірно на кожному компакті $\mathbb{K} \subset (0, \infty)$.

Твердження доведено.

Об'єднання просторів $\theta_{M,\rho,a}$ за індексами $a \in \left\{ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots \right\}$ збігається, очевидно, з простором $\theta_{M,\rho}$. Збіжність у просторі $\theta_{M,\rho}$ — це збіжність у одному з просторів $\theta_{M,\rho,a}$, яка охарактеризована вище.

Лема 3. Нехай $\chi \in C^\infty(\mathbb{R})$ (або $\chi \in C^\infty\left(\mathbb{R} \setminus \{0\} \right) \cap C(\mathbb{R})$), функція χ парна і задовольняє умову:

$$\forall \varepsilon > 0 \, \forall k \in \mathbb{Z}_+ \, \exists b_{\varepsilon k} > 0 \, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}:$$

$$\left| D_x^k \chi(x) \right| \leq b_{\varepsilon k} M^k(x) e^{\rho(\varepsilon x)} \tag{4}$$

(якщо $k = 0$, то $x \in \mathbb{R}$). Тоді операція $\varphi \to \chi\varphi$, $\varphi \in \theta_{M,\rho}$, визначена і неперервна в просторі $\theta_{M,\rho}$.

Доведення. Кожна функція $\varphi \in \theta_{M,\rho}$ характеризується певною сталою $a > 0$ такою, що

$$M^k(x) \, | D_x^k \varphi(x) | \leq c_k \sum_{j=1}^{k} \rho^j(x) \cdot e^{-\rho(ax)}, \; x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \; k \in \mathbb{Z}_+. \tag{5}$$

Для доведення того, що $\chi\varphi \in \theta_{M,\rho}$, досить вказати сталу $\tilde{a} > 0$ таку, що функція $\chi\varphi$ задовольняє нерівності вигляду (5). Оскільки, за умовою, $\varepsilon > 0$ довільне, то візьмемо ε з проміжку $(0, a/2)$ і покладемо $\tilde{a} = a/2 - \varepsilon$. Тоді, урахувавши (4) та (5), знайдемо, що

$$\Lambda(x) := e^{\rho(\tilde{a}x)} M^k(x) \left| D_x^k \left(\chi(x) \varphi(x) \right) \right| \leq$$

$$\leq e^{\rho(\tilde{a}x)} M^k(x) \sum_{l=0}^{k} C_k^l \left| D_x^l \chi(x) \right| \cdot \left| D_x^{k-l} \varphi(x) \right| \leq$$

$$\leq e^{\rho(\tilde{a}x) + \rho(\varepsilon x) - \rho(ax)} M^k(x) \sum_{l=0}^{k} C_k^l b_{\varepsilon l} c_{k-l} M^l(x) M^{-(k-l)}(x) \sum_{j=1}^{k-l} \rho^j(x).$$

Із нерівності опуклості, застосованої до функції ρ, дістаємо, що

$$\rho\left(\left(\frac{a}{2} - \varepsilon \right) x \right) + \rho(\varepsilon x) \leq \rho\left(\frac{a}{2} x \right), \quad -\rho(ax) \leq -\rho\left(\frac{a}{2} x \right) - \rho\left(\frac{a}{2} x \right).$$

Із обмежень, накладених на функції ρ та M, випливає нерівність $M^{2l}(x)\exp\left\{-\rho\left(\frac{a}{2}x\right)\right\}\le d_l$, яка справджується для всіх x: $|x|\ge x_0>0$, $x_0=x_0\left(\frac{a}{2}\right)$. Тоді для всіх $x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$

$$\Lambda(x)\le e^{\rho(\frac{a}{2}x)}\cdot e^{-\rho(\frac{a}{2}x)}\cdot\sum_{l=0}^{k}C_k^l b_{\varepsilon l}c_{k-l}M^{2l}(x)e^{-\rho(\frac{a}{2}x)}\cdot\sum_{j=1}^{k}\rho^j(x)\le$$

$$\le\beta_k\sum_{j=1}^{k}\rho^j(x),\quad \beta_k=\sum_{l=0}^{k}C_k^l b_{\varepsilon l}c_{k-l}d_l<\infty.$$

Отже, $\chi\varphi\in\theta_{M,\rho}$, тобто операція $\varphi\to\chi\varphi$ визначена в просторі $\theta_{M,\rho}$.

Урахувавши, що $\theta_{M,\rho}=\bigcup\limits_a\theta_{M,\rho,a}$, із наведеного дослідження випливає, що $\chi\varphi\in\theta_{M,\rho,a/2}$, якщо $\varphi\in\theta_{M,\rho,a}$. Міркуючи аналогічно попередньому, знаходимо, що

$$\forall p\in\mathbb{Z}_+\ \exists c_p>0:\left\|\chi\varphi\right\|_{p,a}\le c_p,\quad \varphi\in\theta_{M,\rho,a}.$$

Звідси вже дістаємо неперервність вказаної операції. Справді, якщо $\varphi_\nu\to0$ при $\nu\to+\infty$ в просторі $\theta_{M,\rho}$, то $\varphi_\nu\to0$ при $\nu\to\infty$ в просторі $\theta_{M,\rho,a}$ при деякому $a>0$. Отже, послідовність $\{\varphi_\nu,\nu\ge1\}$ обмежена в $\theta_{M,\rho,a}$ і для довільного $k\in\mathbb{Z}_+$ послідовність $\left\{D_x^{2k}\varphi_\nu,\nu\ge1\right\}$ збігається до нуля рівномірно на кожному компакті $\mathbb{K}\subset(0,\infty)$. Тоді, як випливає із наведених раніше результатів, послідовність $\{a\varphi_\nu,\nu\ge1\}$ обмежена в просторі $\theta_{M,\rho,a/2}$. Крім того, безпосередньо переконуємося в тому, що послідовність $\left\{D_x^{2k}\left(a\varphi_\nu\right),\nu\ge1\right\}$ збігається до нуля рівномірно на кожному компакті $\mathbb{K}\subset(0,\infty)$ (для довільного $k\in\mathbb{Z}_+$). Таким чином, операція $\varphi\to\chi\varphi$ неперервна в просторі $\theta_{M,\rho}$.

Твердження доведено.

Зауваження 2. Мультиплікатором у просторі $\theta_{M,\rho}$ є також парна функція $\chi\in C^\infty(\mathbb{R})$ (або $\chi\in C^\infty\left(\mathbb{R}\setminus\{0\}\right)\cap C(\mathbb{R})$), яка задовольняє умову:

$$\forall\varepsilon>0\ \forall k\in\mathbb{Z}_+\ \exists b_{\varepsilon k}>0\ \forall x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}:$$

$$\left|D_x^k \chi\left(x\right)\right| \le b_{\varepsilon k}\left(1+M^k(x)\right)e^{\rho(\varepsilon k)}.$$

Доведення цього твердження аналогічне наведеному вище доведенню леми 3.

Зазначимо також, що мультиплікатором в $\theta_{M,\rho}$ є кожний поліном P вигляду $P(x)=\sum_{k=0}^{n} c_k x^{2k}$ (доведення цієї властивості використовує той факт, що опукла функція ρ зростає на нескінченності швидше за довільну лінійну функцію).

Список використаних джерел:

1. Городецький В. В. Еволюційні рівняння з псевдо-Бесселевими операторами / В. В. Городецький, О. М. Ленюк // Доп. НАН України. — 2007. — № 8. — С. 11—15.
2. Шевчук Н. М. Задача Коші для еволюційних рівнянь з псевдо-Бесселевими операторами нескінченного порядку / Н. М. Шевчук // Науковий вісник Чернівецького університету : зб. наук. пр. — Чернівці : Рута, 2008. — Вип. 374. — С. 145—154.
3. Гельфанд И. М. Пространства основных и обобщенных функций / И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов. — М. : Физматгиз, 1958. — 307 с.
4. Городецький В. В. Граничні властивості гладких у шарі розв'язків рівнянь параболічного типу / В. В. Городецький. — Чернівці : Рута, 1998. — 225 с.

The new classes of functions-symbols and new classes of pseudo-differential operators, which are built on such characters by direct and inverse Bessel transformation, are defined in the paper. The correct solvability of the Cauchy problem for evolution equations with pseudo-Bessel operators with initial functions of the spaces such as Sobolev-Schwartz distributions is set.

Key words: *Bessel transformation; spaces of basic functions; spaces of generalized functions; the Cauchy problem; pseudo-Bessel operators.*

Отримано: 14.06.2011